

Súbor príkladov na precvičenie č. 4

1. Číselné charakteristiky spojitej náhodnej premennej.

(a) Nech $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1, \\ k \cdot (x+1) & \text{for } -1 < x < 2, \\ 0 & \text{for } x \geq 2. \end{cases}$

- i. Vypočítajte konštantu k tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X .
- ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte $P(-1 \leq X < 1)$.
- iv. Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$[\text{i) } k = \frac{2}{9}; \text{ ii) } E(X) = 1, D(X) = \frac{1}{2}; \text{ iii) } \frac{4}{9}; \text{ iv) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq -1; \\ \frac{1}{9}(x+1)^2 & \text{pre } x \in (-1, 2); \\ 1 & \text{pre } x > 2. \end{cases}]$$

(b) Nech $f(x) = \begin{cases} a(3x-2), & \text{ak } x \in (2, 4), \\ 0, & \text{ak } x \notin (2, 4). \end{cases}$

- i. Určte hodnotu parametra a tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X .
- ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(1 < X \leq 3)$.
- iv. Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$[\text{i) } a = \frac{1}{14}; \text{ ii) } E(X) = \frac{22}{7}, D(X) = \frac{46/147}{294}; \text{ iii) } \frac{11}{28}; \text{ iv) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 2; \\ \frac{1}{84}(9x^2 - 12x - 12) & \text{pre } x \in (2, 4); \\ 1 & \text{pre } x > 2. \end{cases}]$$

(c) (6 b) Nech $f(x) = \begin{cases} a(2x-1), & \text{ak } x \in (2, 3), \\ 0, & \text{ak } x \notin (2, 3). \end{cases}$

- i. Určte hodnotu parametra a tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X .
- ii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(1 < X \leq 2, 5)$.

$$[\text{i) } a = \frac{1}{4}; \text{ ii) } E(X) = \frac{61}{24}; \text{ iii) } 0,5625] \quad 0,4375$$

(d) Nech $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x < 1, \\ k \cdot \sqrt{x}, & \text{ak } 1 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{ak } x > 4. \end{cases}$

- i. Vypočítajte konštantu k tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X .
- ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte $P(2 \leq X < 3)$ a $P(0,5 < X \leq 5)$.
- iv. Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$[\text{i) } k = \frac{3}{14}; \text{ ii) } E(X) = \frac{93}{35}, D(X) = \frac{876}{1225}; \text{ iii) } \frac{1}{7}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}); \text{ iv) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 1; \\ \frac{1}{7}(x\sqrt{x} - 1) & \text{pre } x \in (1, 4); \\ 1 & \text{pre } x > 4. \end{cases}]$$

(e) Nech $f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{ak } x \in (0, 2), \\ 0, & \text{ak } x \notin (0, 2). \end{cases}$

- i. Určte hodnotu parametra a tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X .
- ii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(1 < X \leq 2)$.
- iv. Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$[\text{i) } a = -\frac{1}{2}; \text{ ii) } E(X) = \frac{2}{3}; \text{ iii) } \frac{1}{4}; \text{ iv) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 2; \\ \frac{1}{4}(4x - x^2) & \text{pre } x \in (2, 4); \\ 1 & \text{pre } x > 2. \end{cases}]$$

(f) Daná je funkcia: $F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 1, \\ b \cdot (x^2 - 1), & \text{ak } 1 \leq x \leq 3, \\ c, & \text{ak } x > 3. \end{cases}$

- i. Stanovte parametre a, b tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X .
- ii. Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- iv. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(0 \leq X < 2)$.

$$\text{[i] } a = 0, b = \frac{1}{8}, c = 1; \text{ ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & \text{pre } x \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle 1, 3 \rangle. \end{cases}; \text{ iii) } E(X) = \frac{13}{6}, \text{ iv) } \frac{3}{8}]$$

(g) Daná je funkcia:
$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < -4, \\ bx + c, & \text{ak } -4 \leq x \leq 2, \\ d, & \text{ak } x > 2. \end{cases}$$

- i. Stanovte parametre a, b, c, d tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X .
- ii. Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- iv. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(-5 \leq X < -3)$.

$$\text{[i] } a = 0, b = \frac{1}{6}, c = \frac{2}{3}, d = 1; \text{ ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pre } x \in \langle -4, 2 \rangle; \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -4, 2 \rangle; \end{cases} \text{ iii) } E(X) = -1; \text{ iv) } \frac{1}{6}]$$

(h) Daná je funkcia

$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 0, \\ x + b, & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, \\ c, & \text{ak } x > 1. \end{cases}$$

- i. Stanovte parametre a, b, c tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X .
- ii. Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .

$$\text{[i] } a = b = 0, c = 1; \text{ ii) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle 0, 1 \rangle; \end{cases}; \text{ iii) } E(X) = \frac{1}{2}, D(X) = \frac{1}{12}]$$

(i) Daná je funkcia

$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 1, \\ b\sqrt{x} + c, & \text{ak } 1 \leq x \leq 9, \\ 2d, & \text{ak } x > 9. \end{cases}$$

- i. Stanovte parametre a, b, c tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X .
- ii. Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X .
- iii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .

$$\text{[i] } a = 0, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}; \text{ ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{pre } x \in \langle 1, 9 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle 1, 9 \rangle; \end{cases}; \text{ iii) } E(X) = \frac{13}{3}, D(X) = \frac{244}{45}]$$

2. Exponenciálne rozdelenie

(a) Priemerná doba životnosti súčiastky je 600 hodín. Doba životnosti má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraná súčiastka bude fungovať

- i. menej ako 800 hodín,
- ii. viac ako 500 hodín,
- iii. viac ako 600, ale menej ako 700 hodín.
- iv. Určte takú hodnotu t , že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako t hodín, je 0,9.

$$\text{[i] } 0,7364; \text{ ii) } 0,4346; \text{ iii) } 0,0564; \text{ iv) } t = 63,22 \text{ hod.}]$$

(b) Doba životnosti elektronickej súčiastky má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 800 hodín. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- i. súčiastka sa nepokazí v priebehu 1000 hodín,
- ii. súčiastka sa pokazí skôr ako za 600 hodín,
- iii. súčiastka sa pokazí neskôr ako za 500 hodín, ale skôr ako za 800 hodín.
- iv. Určte takú hodnotu t , že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako t hodín, je 0,95.

$$\text{[i] } 0,2865; \text{ ii) } 0,5263; \text{ iii) } 0,16746; \text{ iv) } t = 41,03 \text{ hod.}]$$

(c) Doba, za ktorú je zákazník obslužený po príchode do predajne má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 4 minúty. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- i. zákazník je obslužený do 5 minút po príchode do predajne,
- ii. zákazník nebude obslužený v priebehu 7 minút po príchode do predajne,
- iii. zákazník čaká na obsluhu viac ako 3 minúty, ale najviac 6 minút.
- iv. Určte, do koľkých minút po príchode do predajne bude zákazník obslužený s pravdepodobnosťou 0,99.

$$\text{[i] } 0,71350; \text{ ii) } 0,17377; \text{ iii) } 0,24924; \text{ iv) } t = 18,42 \text{ min.}]$$

(d) Priemerná doba bezchybného fungovania výrobku je 10000 hodín, pričom predpokladáme že táto doba sa riadi exponenciálnym rozdelením. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- i. výrobok sa pokazí skôr ako za 2000 hodín,
- ii. výrobok bude fungovať bezchybne viac ako 12000 hodín,
- iii. výrobok bude fungovať bezchybne viac ako 8000, ale menej ako 13 000 hodín.
- iv. Určte takú hodnotu t , že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude kratšia ako t hodín, je 0,15.

[i) 0, 1813; ii) 0, 3012; iii) 0, 1768; iv) $t = 1625, 19$ hod.]

3. Normálne rozdelenie

- (a) Pružnosť náhodne vybratého výrobku má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 3,5 a smerodajnou odchýlkou 0,4. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. náhodne vybratý výrobok je má pružnosť menšiu ako 3,7,
 - ii. náhodne vybratý výrobok je má pružnosť väčšiu ako 3,1,
 - iii. náhodne vybratý výrobok je má pružnosť v intervale $\langle 3, 2, 5, 2 \rangle$.
- [i) 0,69146; ii) 0,84134; iii) 0,77336]
- (b) Výška dospelého muža má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 177 cm smerodajnou odchýlkou 5 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. náhodne vybratý muž má výšku menšiu ako 180 cm,
 - ii. náhodne vybratý muž má výšku väčšiu ako 170 cm,
 - iii. náhodne vybratý muž má výšku v intervale $\langle 165 \text{ cm}, 192 \text{ cm} \rangle$.
- [i) 0,72575; ii) 0,91924; iii) 0,99045]
- (c) Pevnosť v ťahu náhodne vybratého výrobku má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 2,4 a smerodajnou odchýlkou 0,6. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. náhodne vybratý výrobok je má pevnosť v ťahu menšiu ako 4,
 - ii. náhodne vybratý výrobok je má pevnosť v ťahu väčšiu ako 2,2,
 - iii. náhodne vybratý výrobok je má pevnosť v ťahu v intervale $\langle 2, 1; 5, 2 \rangle$.
- [i) 0,99621; ii) 0,6293; iii) 0,69146]
- (d) Výška päťročného dieťaťa má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 110 cm smerodajnou odchýlkou 6 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. náhodne vybraté dieťa má výšku menšiu ako 105 cm,
 - ii. náhodne vybraté dieťa má výšku väčšiu ako 120 cm,
 - iii. náhodne vybraté dieťa má výšku v intervale $\langle 100 \text{ cm}, 140 \text{ cm} \rangle$.
- [i) 0,20327; ii) 0,04746; iii) 0,95254]
- (e) Výskum ukázal, že ročná spotreba teplej vody v domácnostiach má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 60 m^3 a smerodajnou odchýlkou 10 m^3 . Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. náhodne vybratá domácnosť má spotrebu vyššiu ako 70 m^3 ,
 - ii. náhodne vybratá domácnosť má spotrebu nižšiu ako 65 m^3 ,
 - iii. náhodne vybratá domácnosť má spotrebu v intervale od 58 m^3 do 64 m^3 .

[i) 0, 15866; ii) 0, 69146; iii) 0, 23468]

4. Matematická štatistika

- (a) Kontrolór namerá nasledujúce hodnoty objemu fliaš Coca-Coly:

0,49; 0,5; 0,48; 0,47; 0,505; 0,485; 0,49; 0,495; 0,5; 0,48.

- i. Určte 95%- ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu a disperziu.
- ii. Nájdite 99% -ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.
- iii. Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 0,5$ oproti hypotéze $H_1 : \mu < 0,5$.

[i) $\mu \in \langle 0, 4817; 0, 4973 \rangle, \sigma^2 \in \langle 5, 638 \cdot 10^{-5}; 39, 716 \cdot 10^{-5} \rangle$;

ii) $\sigma^2 \in \langle 4, 9502 \cdot 10^{-5}; \infty \rangle$; iii) $t = -3, 0417 \in (-\infty; -1, 8331) \Rightarrow H_0$ zamietame]

- (b) Pri meraní hmotnosti žiakov 7. ročníka boli namerané hodnoty:

54.2; 38.8; 45.6; 51.2; 49.7; 51.6; 50.1; 41.7; 36.1; 45.0.

- i. Nájdite 95%- ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.
- ii. Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 47$ proti $H_1 : \mu \neq 47$.
- iii. Nájdite 99% -ný obojstranný interval spoľahlivosti pre disperziu.

iv. Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 48$ proti alternatívnej hypotéze $H_1 : \mu < 48$.

[i] $\sigma^2 \in (19, 1525; \infty)$; ii) $t = -0,3162 \notin (-\infty; -2,2622) \cup (2,2622; \infty) \Rightarrow H_0$ nezamietame
iii) $\sigma^2 \in (13, 7369; 186, 771)$; iv) $t = -0,8432 \notin (-\infty; -1,8331) \Rightarrow H_0$ nezamietame]

(c) Trasa na určitej linke MHD bola prejdená rýchlosťami (v km/hod):

8,5; 9,5; 7,8; 8,2; 9,0; 7,5; 8,2; 7,8; 9,0; 8,5.

i. Otestujte na hladine významnosti 0,01 hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 0,35$ proti hypotéze $H_1 : \sigma^2 > 0,35$.

ii. Určte 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

[i) $\chi^2 = 10,17 \notin (21,666; \infty) \Rightarrow H_0$ nezamietame; ii) $\mu \in (7,9258; 8,8743)$]

(d) Náhodným výberom sa zisťoval vek fanúšikov hokejového zápasu. Výsledky boli nasledovné:

15, 21, 17, 15, 17, 15, 21, 17, 18, 21, 18, 18.

i. Nájdite 99%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

ii. Nájdite 95%-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.

iii. Na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 4$ proti $H_1 : \sigma^2 \neq 4$.

iv. Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 6$ proti $H_1 : \sigma^2 < 6$.

v. Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ otestujte hypotézu, že stredná hodnota veku fanúšikov je 18 rokov proti alternatívnej hypotéze, že je vyššia ako 18 rokov.

[i] $\mu \in (15,72256; 19,77744)$; ii) $\sigma^2 \in (2,8589; \infty)$; iii) $\chi^2 = 14,0625 \notin (0; 4,5748) \cup (19,6751; \infty) \Rightarrow H_0$ nezamietame;

iv) $\chi^2 = 9,375 \notin (0; 4,57481) \Rightarrow H_0$ nezamietame; (v) $t = -0,38292 \notin (1,7959; \infty) \Rightarrow H_0$ nezamietame]

(e) Hráč bowlingu nahral nasledujúce počty bodov:

7, 9, 8, 4, 6, 5, 0, 3, 10, 7.

i. Nájdite 95%-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.

ii. Na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 6$ proti $H_1 : \mu < 6$.

[i] $\sigma^2 \in (4,7816; \infty)$, ii) $t = -0,10548 \notin (-\infty; -1,3830) \Rightarrow H_0$ nezamietame]

(f) Priemerný počet bodov, ktoré získali študenti na skúške bol 57 bodov. Skupina študentov sa rozhodla, že zlepšenou študijnou disciplínou dosiahnu lepšie výsledky. Bodové hodnotenie 7 študentov bolo

55; 63; 70; 54; 65; 58; 62.

i. Určte 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre disperziu.

ii. Na hladine významnosti 0,1 rozhodnite, či sa študijné výsledky zlepšili.

[i] $\sigma^2 \in (15,5654; 119,84847)$; ii) $t = 1,85341 \in (1,4398; \infty) \Rightarrow H_0$ zamietame]

(g) Zo základného súboru s normálnym rozdelením pravdepodobnosti sa urobil náhodný výber s nameranými hodnotami

22, 4; 28, 0; 20, 1; 27, 4; 25, 6; 23, 9; 24, 8; 26, 4; 27, 0; 25, 4.

i. Určte 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;

ii. určte 95%-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;

iii. na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 19$ proti hypotéze $H_1 : \mu > 19$.

[i] $(23,3614; 26,8386)$; ii) $(23,6912; \infty)$; iii) $t = 1,5878 \in (1,383; \infty) \Rightarrow H_0$ zamietame]

(h) Náhodný výber 32 analýz na overenie koncentrácie istej chemickej látky v roztoku poskytol tieto výsledky:

x_i	9	11	12	14	15	16	17	18	20	21
n_i	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Predpokladáme normálne rozdelenie pravdepodobnosti koncentrácie so známym $\sigma^2 = 7,4$. Určte:

i. obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu na hladine významnosti 0,01;

ii. 99%-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;

iii. 95%-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

[a] $\mu \in (14,1051; 16,5824)$; b) $\mu \in (14,2250; \infty)$; c) $\mu \in (-\infty; 16,1347)$]

(i) Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0,06$ bol urobený náhodný výber s nameranými hodnotami:

1, 3; 1, 8; 1, 4; 1, 2; 0, 9; 1, 5; 1, 7.

Určte:

- i. 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- ii. 90 %-ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- iii. 99 %-pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

$$[i) \mu \in (1,2185; 1,5815); ii) \mu \in (1,2814; \infty); iii) \mu \in (-\infty; 1,6154)]$$

- (j) Náhodným výberom boli namerané tieto časy príchodov študentov pred začiatkom prednášky v minútach (záporná hodnota znamená meškanie):

$$5, 1; 0, 5; 2, 2; 2, 5; 7, 1; 1, 6; -2, 3; 2, 8; 4, 0; 3, 3; 6, 7; -3, 9; 1, 9; 2, 4; 1, 6; -1, 1.$$

Určte

- i. 99,5 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu času príchodu na prednášku;
- ii. 99 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre rozptyl času príchodu na prednášku;
- iii. na hladine významnosti 0,05 určte, či študenti prichádzajú na prednášku načas.

$$[i) \mu \in (-0,2649; 4,5649);$$

b) $\sigma^2 \in (0; 24,7870)$, iii) $H_0 : \mu = 0; H_1 : \mu < 0; t = 2,9255 \notin (-\infty, -1,7531) \Rightarrow H_0$ nezamietame (študenti prichádzajú na prednášku načas)]

- (k) Študenti písali zápočtovú s maximálnym ziskom 15 bodov. Náhodným výberom boli zistené nasledujúce výsledky (počty získaných bodov):

x_i	0	2	3	5	6	8	10	12	14	15
n_i	1	2	1	4	5	5	3	2	1	1

Predpokladáme normálne rozdelenie počtu bodov so známym $\sigma^2 = 14$. Určte:

- i. 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- ii. 99 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- iii. 95 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- iv. na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 6,2$ oproti hypotéze $H_1 : \mu > 6,2$;
- v. na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 7,8$ oproti hypotéze $H_1 : \mu \neq 7,8$

$$[i) \mu \in (5,73333; 8,6667); ii) \mu \in (5,4591; \infty); iii) \mu \in (-\infty; 8,4039);$$

iv) $Y = 1.336306 \in (1,28155, \infty) \Rightarrow H_0$ zamietame; v) $Y = 0.80178 \notin (-\infty, -1,95996) \cup (1,95996, \infty) \Rightarrow H_0$ nezamietame]