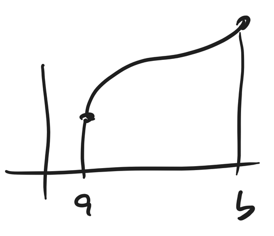
VIAZANÉ EXTRÉMY F2P

P = ?   V = ?

① → $\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}$



pre fciu $\boxed{y = x^2}$ na $\langle a, b\rangle$

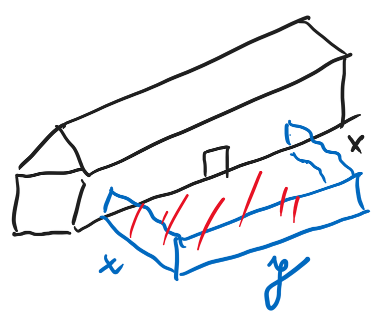
sa dĺžka krivky počíta $l = \int_a^b \sqrt{1+4x^2}\,dx$ 2^0

$y' = 2x$

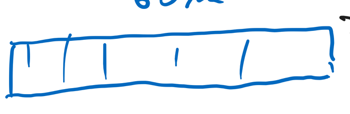
VIAZANÉ EXTRÉMY F2P

Sada príkladov

P1



60m   ohrady



povrazmi ohradu, tak, že 1 stranu tvorí budova, a plocha je maximálna

$P = f(x,y) = xy \to$ MAX, ale $\boxed{2x + y = 60}$ PODMIENKA

LOK (GL) EXT.   VÄZBA $2x + y - 60 = 0$

Vo všeobec

$f(x,y) \to$ MAX/MIN, až $\boxed{g(x,y) = 0}$ NOVINKA DODATOČNÁ PODMIENKA VÄZBA

$\underbrace{f(x,y) \to \text{MAX/MIN}, \text{ až } g(x,y)=0}_{\text{ÚLOHA NA VIAZANÝ EXTRÉM}}$

F1P

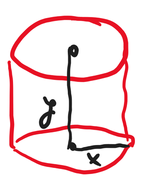
$F(x) = f(x,y) = x(60-2x)$ $y = 60 - 2x$

$F'(x) = 60 - 4x = 0 \overset{S.B}{\Rightarrow} x = \frac{60}{4} = 15$ $\Rightarrow y = 60 - 30 = 30$

$F''(x) = -4 < 0$ t.j. pre $x = 15$ máme lok. max = Gl. max

$x = 15$, $y = 30$

P2 plechovka



je daná podmienka $V = 1l = 1dm^3$

Hľadáme najekonomickejšiu plechovku

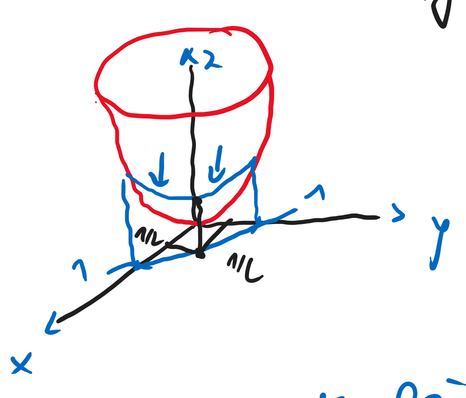
povrch   podstavy   kruh

$S = f(x,y) = 2\pi x^2 + 2\pi x y \to$ MIN   až $V = 1 = \pi x^2 y$

väzba

F1P $y = ?$

P3. Máme $f(x,y) = x^2 + y^2$, je zrejmé, že táto fcia má v $[0,0]$ gl/lok. extrém



až pridáme podmienku

$x + y - 1 = 0$ $(g(x,y) = 0)$

zúžili def. obor f na priamku

geometricky zobrazuje rovinu $x + y - 1 = 0$

My hľadáme lok. extrém (viazaný) pre novú fciu

LOK MINIMUM

POSTUP PRI HĽADANÍ VIAZ EXTR.

1° MOŽNOSŤ Z väzby $g(x,y) = 0$ viem vyjadriť $\boxed{y = h(x)}$ resp. $x = g(y)$

Potom vlastne

$f(x,y) = f(x, h(x)) = F(x)$ máme F1P a poznáme techniky

viaz. ext. $f(x,y) = x^2 + y^2$ až $x + y - 1 = 0$

$\hookrightarrow y = 1 - x$

$f(x,y) = x^2 + (1-x)^2 = F(x)$

1. SB. $F'(x) = 2x - 2(1-x) = 0 \Rightarrow 2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$ $\left[y = \frac{1}{2}\right]$

2. dost. $F''(x) = 4 > 0$ t.j. $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ lok. min

2. MOŽNOSŤ z väzby $g(x,y) = 0$ neviem (jednoznačne) vyjadriť ani x ani y

v tomto prípade zostrojím pomocnú fciu LAGRANGEOVA

NOVÝ PARAMETER (NOVÁ PREM)

$\underbrace{L(x,y,\lambda)}_{F3P} = L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

F2P + parameter   pre F2P môžme jedn. dost. na lok. ext.

a hľadám lok. ext. tejto novej fcie

POSTUP

1. SB (F3P)
   - ✓ $L'_x = f'_x + \lambda g'_x = 0$
   - ✓ $L'_y = f'_y + \lambda g'_y = 0$
   - ✓ $L'_\lambda = \underbrace{\boxed{g(x,y) = 0}}_{\text{väzba}}$

$L'_x = 0$ až $A = [a,b]$ je SB

$L'_y = 0$ tak $\Downarrow$ $g(a,b) = 0$

$g(x,y) = 0$ VÄZBA

F2P

2. dost.   nájde lok. extrémy $L(x,y)$ a oni sú vlastne hľadané viazané extrémy.

Zdôvodnenie   VSTUP $f(x,y) \to$ MAX   až $\boxed{g(x,y) = 0}$

UROB $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ nech L má lok. max v $A = [a,b]$

t.j.

$L(x,y) = f(x,y) + \lambda \underbrace{g(x,y)}_{=0} \geq L(a,b) = f(a,b) + \lambda \underbrace{g(a,b)}_{=0}$

$\Downarrow$

nás zaujímajú iba body $[x,y]$ pre ktoré $g(x,y) = 0$

$f(x,y) \geq f(a,b)$ t.j. v A je viaz. ext.

PRAVIDLO

lokálny extrém $L(x,y)$ je viazaný extrém $f(x,y)$