Matematika III – pomocný súbor 1

Úprava kvadratického výrazu doplnením na štvorec

Pr. 1

$x^2 - 7x + 10 = 0$

Riešenie:

$(x - \frac{7}{2})^2 + 10 - \frac{49}{4} = 0$

$(x - \frac{7}{2})^2 + \frac{40}{4} - \frac{49}{4} = 0$

$(x - \frac{7}{2})^2 - \frac{9}{4} = 0$

$(\underbrace{x - \frac{7}{2}}_{a})^2 - \left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{b}\right)^2 = 0$

$\left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$

$(x - 5)(x - 2) = 0$

Metóda doplnením na štvorec:

1. upravíme kvadratickú rovnicu $x^2 \pm Bx \pm C = 0$ na tvar

   $(x \pm \frac{B}{2})^2 \pm C - (\frac{B}{2})^2 = 0$

2. Využijeme vzorec pri úprave $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Pr. 2

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Riešenie:

$$(x - 2)^2 + 3 - 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 1 = 0$$

$$(\underset{a}{x - 2})^2 - (\underset{b}{1})^2 = 0$$

$$(x - 2 - 1)(x - 2 + 1) = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

Rozklad racionálnej funkcie na elementárne (parciálne) zlomky

Funkciu $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame **racionálnou funkciou.**

Ak

I. *n* < *m* je funkcia *f* (*x*) **rýdzoracionálna**

II. *n* > *m* je funkcia *f* (*x*) **nerýdzoracionálna**

I. Vieme rozložiť na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

kde $A, B, C, \alpha, p, q \in R,\ n \in N,\ p^2 - 4q < 0.$

II. Predelíme a vyjadríme ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie, ktorú rozložíme na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, st\ R(x) < m$$

I. *n* < *m*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha)^1(x-\beta)^1(x-\gamma)^1} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$

tri reálne korene

tri zlomky

počet zlomkov = počet exponentov v menovateli

Pr. 1 **1. Urobíme kanonický rozklad menovateľa na súčin koreňových činiteľov**

$$\frac{2x^2+10x-18}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$\frac{D(6)}{D(1)} = \frac{\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}}{\{\pm 1\}} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$1-2-5+6=0 \Rightarrow$ 1 je koreň

$(x-1)$

2. Vyjadríme racionálnu funkciu pomocou parciálnych zlomkov a upravíme na spoločného menovateľa

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	

-2 je koreň $(x+2)$

$(x-3)$

rozklad menovateľa $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$

$$\frac{2x^2+10x-18}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$2x^2+10x-18 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)$$

3. Na vyjadrenie koeficientov A, B, C použijeme dosadzovaciu metódu (za neznámu *x* v rovnici dosadzujeme korene menovateľa, prípadne ďalšie možné hodnoty, napr. 0)

$x = 1$

$$2 \cdot 1 + 10 \cdot 1 - 18 = A \cdot (1+2)(1-3)$$

$$-6 = -6A$$

$$\underline{\underline{1 = A}}$$

$x = -2$

$$2 \cdot 4 - 20 - 18 = 15B$$

$$-30 = 15B$$

$$\underline{\underline{-2 = B}}$$

$x = 3$

$$2 \cdot 9 + 30 - 18 = 10C$$

$$30 = 10C$$

$$\underline{\underline{3 = C}}$$

$$\frac{2x^2 + 10x - 18}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{x-3}$$

2-násobný koreň

(súčet mocnín v menovateli 2+1=3

tri zlomky

Pr. 2 rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}$

$$x^3-x^2-x+1 = x(x^2-1)-1(x^2-1) = (x^2-1)(x-1) =$$
$$= (x-1)(x+1)(x-1)$$
$$= (x-1)^2(x+1)$$

$$\frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$-x^2+5 = A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2$$

$x = 1$

$$-1+5 = 2A$$
$$\underline{\underline{2 = A}}$$

$x = -1$

$$-1+5 = C(-2)^2$$
$$4 = 4C$$
$$\underline{\underline{1 = C}}$$

$x = 0$

$$0 + 5 = A \cdot 1 + B(0-1)(0+1) + C\,1$$

$$5 = A - B + C$$

$$5 = 2 - B + 1$$

$$\underline{\underline{-2 = B}}$$

$$\frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

Faktoriál

Faktoriál čísla n je rovný súčinu všetkých prirodzených čísel, ktoré sú menšie alebo rovné číslu n. Faktoriál zapisujeme pomocou výkričníka **n!**.

platí: **n! = n. (n-1) . (n-2) 5. 4. 3. 2. 1**
0! = 1

Napr. 5! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120

Faktoriál vieme rozpísať podľa potreby, napr. pri úprave výrazu $\frac{(n+3)!}{n!}$, rozpíšeme čitateľa po n!, aby sme ho vykrátili s menovateľom: (n+3)! = (n+3). (n+2). (n+1). n!

$$\frac{(n+3)!}{n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+3)(n+2)(n+1)$$

Limita funkcie

Zápis limity: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{b}$

Pri výpočte limity:

a) dosadíme za neznáme x číslo *a*, ak **žiadna neurčitosť**, vypočítame limitu

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3} = \frac{2^2 + 5}{2^2 - 3} = 9$$

Tipy neurčitosti: $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \mathbf{1}^{\infty}$

b) dosadím, ak **neurčitosť** $\frac{\infty}{\infty}$, delíme čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou v menovateli

17/30

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 - 5x}{10x^2 - 3x + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^4}{x^2} - \frac{5x}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - \frac{5}{x}}{19 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 \cdot \infty - \overbrace{\frac{5}{\infty}}^{0}}{19 - \underbrace{\frac{3}{\infty}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\infty}}_{0}} = \frac{\infty}{19} = \infty$$

$\infty . \infty = \infty$, $-\infty . -\infty = \infty$, $\infty . -\infty = -\infty$, $\boldsymbol{c} . \infty = \infty$,

$\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty + \boldsymbol{c} = \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \to \infty} x = \infty, \sqrt{\infty} = \infty$$

c) dosadíme, ak **neurčitosť 1^{∞}**, použijeme vzorec

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 \pm \frac{1}{x}\right)^{x} = e^{\pm 1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{(x-1)\cdot\frac{(x+1)}{3}\cdot\frac{3}{(x+1)}} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right]}_{e^{-1}}{}^{\frac{x-1}{x+1}\cdot 3}$$

$$= e^{-1\cdot\lim\frac{3x-3}{x+1}} = e^{-1\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}} = e^{-1\cdot\left(\frac{3-0}{1+0}\right)} = e^{-3}$$