1.5 Riešenie nerovníc. Kvadratické nerovnice

Úlohy, v ktorých treba určiť v danej číselnej množine všetky prvky spĺňajúce dané nerovnosti medzi dvoma výrazmi, nazývame **nerovnice**. Nerovnicou s premennou $x \in \mathbb{R}$ je napríklad zápis $3(x-1) > 2x+5$. Výraz $3(x-1)$ tvorí ľavú stranu a výraz $2x+5$ pravú stranu tejto nerovnice.

Pri nerovniciach sú dôležité tieto pojmy:

- **obor nerovnice** (označenie $\mathcal{O}$): je to číselná množina, v ktorej hľadáme prvky spĺňajúce danú nerovnosť[7];
- **definičný obor nerovnice** (označenie $\mathcal{D}$): je to číselná podmnožina množiny $\mathcal{O}$, v ktorej majú všetky výrazy v nerovnici zmysel;
- **množina riešení** alebo **koreňov nerovnice** (označenie $\mathcal{K}$): je to množina všetkých tých prvkov množiny $\mathcal{D}$, ktoré spĺňajú požadovanú nerovnosť.

Zrejme platí $\mathcal{K} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{O}$.

Pri riešení nerovníc obyčajne používame tieto ekvivalentné úpravy nerovníc:

1. Nahradenie ľubovoľnej strany nerovnice výrazom, ktorý sa jej na $\mathcal{D}$ rovná.
2. Pripočítanie výrazu, ktorý je definovaný na $\mathcal{D}$, k obidvom stranám nerovnice.
3. Vynásobenie obidvoch strán nerovnice výrazom, ktorý na $\mathcal{D}$ nadobúda
   - kladné hodnoty,
   - záporné hodnoty a súčasne „obrátime“ znak nerovnosti.
4. Ak obidve strany nerovnice nadobúdajú na $\mathcal{D}$ nezáporné hodnoty, tak
   - umocnenie obidvoch strán nerovnice na druhú, štvrtú atď.,
   - odmocnenie obidvoch strán nerovnice.
5. Nepárne umocnenie a odmocnenie oboch strán nerovnice.

Vhodná metóda na riešenie nerovníc v obore reálnych čísel je tzv. **intervalová metóda** alebo tiež **metóda nulových bodov**. Exaktné zdôvodnenie tejto metódy nepodáme – vyžadovalo by si to hlbšie poznatky napr. o funkciách. Je to jednoduchá a „bezpečná“ metóda. Jej jednotlivé kroky sú vysvetlené pri riešení nasledujúceho príkladu.

Príklad 1.13 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$\frac{5-x}{x-1} + \frac{1+4x}{2(x+2)} < 1.$$

[7] My sústredíme pozornosť na prípad, keď $\mathcal{O}$ je množina reálnych čísel $\mathbb{R}$.

Riešenie. Vysvetlíme si jednotlivé kroky intervalovej metódy.

1. **„Vyrobíme“ si na jednej strane nerovnice nulu**: v našom prípade stačí k obidvom stranám nerovnice pripočítať číslo (-1) (tým sme vlastne „preniesli pravú stranu nerovnice na jej ľavú stranu“). Dostaneme

$$\frac{5-x}{x-1}+\frac{1+4x}{2(x+2)}-1<0.$$

2. **Upravíme nenulovú stranu nerovnice na jeden zlomok $\boldsymbol{V_1(x)/V_2(x)}$.** V našom prípade dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$\frac{x+23}{2(x-1)(x+2)}<0, \qquad \text{čo je nerovnica typu} \qquad V(x)=\frac{V_1(x)}{V_2(x)}<0, \tag{1.23}$$

kde $V_1(x)=x+23$ a $V_2(x)=2(x-1)(x+2)$.

3. **Určíme nulové body výrazov $\boldsymbol{V_1(x)}$ a $\boldsymbol{V_2(x)}$** (t. j. **vyriešime rovnice $\boldsymbol{V_1(x)=0}$**, resp. **$\boldsymbol{V_2(x)=0}$ – nech $\boldsymbol{\mathcal{K}_1}$**, resp. **$\boldsymbol{\mathcal{K}_2}$ sú ich riešeniami**).
V riešenom príklade to vyzerá takto:

$$x+23=0, \qquad\qquad 2(x-1)(x+2)=0,$$

a teda $\mathcal{K}_1=\{-23\}$ a $\mathcal{K}_2=\{1;-2\}$.

4. **Na číselnej osi znázorníme**
– nulové body $\boldsymbol{\mathcal{K}_2}$ menovateľa $\boldsymbol{V_2(x)}$ prázdnymi krúžkami[8]
– nulové body $\boldsymbol{\mathcal{K}_1}$ čitateľa $\boldsymbol{V_1(x)}$

- **prázdnymi krúžkami v prípade ostrej nerovnice typu $<$ alebo $>$;**
- **plnými krúžkami v prípade nerovnice typu $\leqq$ alebo $\geqq$.**

V našom prípade ide o ostrú nerovnicu, a preto znázorníme na číselnej osi všetky body $\mathcal{K}_1=\{-23\}$ a $\mathcal{K}_2=\{1;-2\}$ prázdnymi krúžkami (pozri obr. 1.1):

Obr. 1.1: Ilustrácia intervalovej metódy

5. **Krúžky z predchádzajúceho kroku nám rozdelili číselnú os na intervaly. Na každom z týchto intervalov nadobúda výraz $\boldsymbol{V_1(x)/V_2(x)}$**

[8] „Prázdny krúžok“ znamená, že zodpovedajúce číslo nepatrí do riešenia danej nerovnice; „plný krúžok“ znamená, že zodpovedajúce číslo patrí do riešenia danej nerovnice.

len kladné alebo len záporné hodnoty. O tom rozhodneme tak, že vyčíslime hodnotu výrazu $V(x) = V_1(x)/V_2(x)$ v ľubovoľnom vybranom vnútornom bode konkrétneho intervalu. Podľa toho, či hodnota výrazu $V(x)$ vo vybranom bode konkrétneho intervalu je kladná, resp. záporná, označíme na číselnej osi tento interval znakom $\oplus$, resp. $\ominus$.

V našom príklade sme dostali otvorené intervaly $(-\infty; -23)$, $(-23; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; +\infty)$. Z prvého intervalu $(-\infty; -23)$ vyberieme napr. číslo -24 a vyčíslime v ňom hodnotu výrazu[9] $V(x) = (x+23)/[2(x-1)(x+2)]$. Overte, že $V(-24) < 0$. Vyšlo nám záporné číslo, a preto sme na obr. 1.1 označili interval $(-\infty; -23)$ znakom $\ominus$. Obdobným spôsobom postupujeme aj pre ostatné intervaly:
$-3 \in (-23; -2)$ a $V(-3) > 0$, a preto sme na obr. 1.1 označili interval $(-23; -2)$ znakom $\oplus$;
$0 \in (-2; 1)$ a $V(0) < 0$, , a preto sme priradili intervalu $(-23; -2)$ znak $\ominus$;
$2 \in (1; \infty)$ a $V(2) > 0$, a teda pre interval $(-23; -2)$ máme $\oplus$.

6. **Z číselnej osi získame samotné riešenie nerovnice: ak daná nerovnica po kroku 2 má tvar:**
$V(x) > 0$, tak jej riešením je zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme v kroku 5 označili znakom $\oplus$;
$V(x) < 0$, tak jej riešením je zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme označili znakom $\ominus$.

V našom príklade na základe (1.23) chceme zistiť, kedy je splnená nerovnica $V(x) < 0$. Preto riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sú označené znakom $\ominus$. Teda

$$\mathcal{K} = (-\infty; -23) \cup (-2; 1).$$

Poznámka 1.5 *Všimnite si, že pri intervalovej metóde sme danú nerovnicu upravili na tvar $V_1(x)/V_2(x) < 0$, pričom sme použili len prvé dve z uvedených ekvivalentných úprav nerovníc. Tieto dve úpravy sú menej náročné ako ostatné ekvivalentné úpravy (sú pomerne „bezpečné“). Nie je potrebné násobiť a ani deliť nerovnicu nejakým výrazom. To sú úpravy, ktoré študenti obyčajne nesprávne používajú (a nielen pri nerovniciach, ale aj pri rovniciach).*

Príklad 1.14 *Riešme v $\mathbb{R}$ nerovnicu*

$$\frac{2}{x} - \frac{1-x}{1+x} \geqq \frac{1+x}{x}.$$

Riešenie. Prvé dva kroky intervalovej metódy (pozri predchádzajúci príklad) sú jednoduché: po prenesení výrazu $\frac{1+x}{x}$ na ľavú stranu nerovnice a následnej

[9] Nezaujíma nás presná hodnota $V(-24)$; dôležité je to, či táto hodnota je kladná alebo záporná.

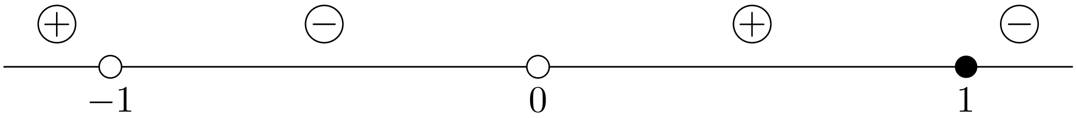
úprave ľavej strany dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$\frac{1-x}{x(1+x)} \geqq 0, \qquad \text{čo je nerovnica typu} \qquad V(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)} \geqq 0, \qquad (1.24)$$

kde $V_1(x) = 1 - x$ a $V_2(x) = x(1 + x)$.

V treťom kroku určíme korene čitateľa, resp. menovateľa, t. j. vyriešime rovnicu $1 - x = 0$, resp. a $x(1 + x) = 0$. Je zrejmé, že ich korene sú $\mathcal{K}_1 = \{1\}$, resp. $\mathcal{K}_2 = \{0; -1\}$.

Vo štvrtom kroku znázorníme na číselnej osi korene menovateľa (čísla 0 a -1) prázdnym krúžkom a koreň čitateľa (číslo 1) plným krúžkom (lebo daná nerovnica je „neostrá“, t. j. je typu $\geqq$):



Obr. 1.2: Ilustrácia intervalovej metódy

V piatom kroku vyčíslením hodnoty výrazu $V(x) = \frac{1-x}{x(1+x)}$ vo vhodne vybratých bodoch jednotlivých intervalov (napríklad -2; $-1/2$; $1/2$; 2) získame označenie týchto intervalov znakom $\oplus$ alebo $\ominus$.

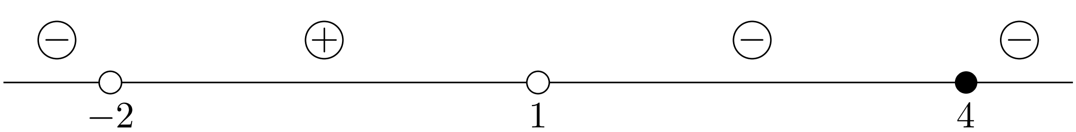
Na záver si uvedomíme, že riešením nerovnice (1.24) je množina tých hodnôt x, pre ktoré je výraz $V(x)$ nezáporný. Tomu zodpovedá zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme na obr. 1.2 označili znakom $\oplus$. Teda riešením danej nerovnice je množina

$$\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (0; 1\rangle.$$

Príklad 1.15 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$0 \geqq \frac{(x-4)^2(x+2)}{(x+2)^2(1-x)^3}.$$

Riešenie. Nerovnica má na jednej strane nulu a na jej druhej strane je zlomok, v ktorom je $V_1(x) = (x-4)^2(x+2)$ a $V_2(x) = (x+2)^2 \cdot (1-x)^3$ – teda prvé dva kroky intervalovej metódy sú „vybavené“. Korene polynómov V_1, resp. V_2 sú $\mathcal{K}_1 = \{-2; 4\}$, resp. $\mathcal{K}_2 = \{-2; 1\}$. Pri ich znázornení na číselnej osi označíme body -2 a 1 prázdnym krúžkom a bod 4 plným krúžkom (ide o neostrú nerovnicu).[10]



Riešením danej nerovnice je množina $\mathcal{K} = (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$.

[10]Viete vysvetliť, prečo sme číslo -2 znázornili prázdnym krúžkom? Veď $-2 \in \mathcal{K}_1$. A prvky množiny $\mathcal{K}_1$ znázorňujme pri neostrej nerovnici plným krúžkom!

Poznámka 1.6 *Výhody intervalovej metódy môžeme použiť aj pri riešení kvadratických nerovníc alebo aj algebrických nerovníc. Pri takýchto nerovniciach je výraz $V_2(x)$ v (1.23) rovný jednej, a preto je $\mathcal{K}_2 = \emptyset$. Takto štruktúra riešenia týchto nerovníc závisí len od množiny $\mathcal{K}_1$. Ale to nie je nič iné ako korene zodpovedajúcej kvadratickej alebo algebrickej rovnice.*

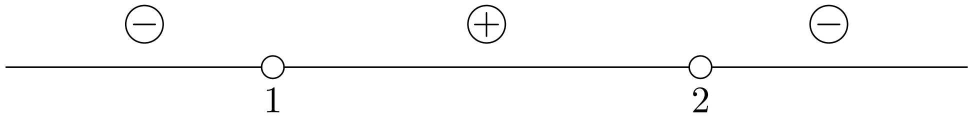
Príklad 1.16 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnice: a)* $3x - x^2 - 2 < 0$*; b)* $x^2 - 4x + 4 \leqq 0$*; c)* $x^4 - 3x^2 - 4 \leqq 0$.

Riešenie. Vo všetkých troch prípadoch použijeme intervalovú metódu a poznámku 1.6.

a) Určíme množinu $\mathcal{K}_1$, t. j. vypočítame korene zodpovedajúcej kvadratickej rovnice $-x^2 + 3x - 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \begin{cases} 1, \\ 2 \end{cases}$$

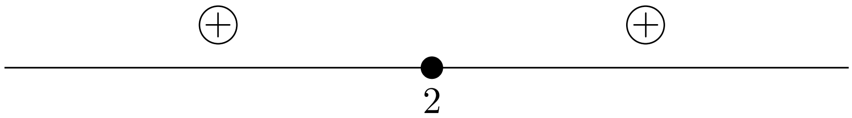
a znázorníme ich na číselnej osi prázdnymi krúžkami (nerovnica je ostrá)



Vyčíslením hodnoty výrazu $P(x) = -x^2 + 3x - 2$ v bodoch 0, 3/2, 3 dostaneme označenie získaných intervalov: $P(0) < 0$, $P(3/2) > 0$, $P(3) < 0$. Riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sme označili symbolom $\ominus$, t. j. množina

$$\mathcal{K} = (-\infty; 1) \cup (2; \infty).$$

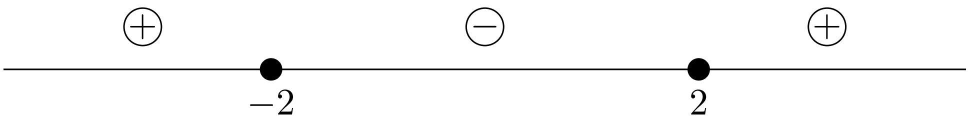
b) Zodpovedajúca kvadratická rovnica $x^2 - 4x + 4 = 0$ má jediný reálny koreň, a to číslo 2. Vyznačíme ho na číselnej osi plným krúžkom (nerovnica je neostrá). Číselnú os rozdelí na dva intervaly.



Obr. 1.3: Intervalová metóda

Výraz $x^2 - 4x + 4$ nadobúda vo zvolených bodoch 0 a 3 kladné hodnoty (obr. 1.3). Riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sme označili symbolom $\ominus$. Žiaden interval nie je takto označený. Ale bod 2 je s plným krúžkom, a preto riešením danej kvadratickej nerovnice je množina $\mathcal{K} = \{2\}$.

c) Substitúciou $x^2 = t$ určíme reálne korene príslušnej rovnice $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. Overte, že $\mathcal{K} = \{\pm 2\}$. Čísla ± 2 vyznačíme na číselnej osi plnými krúžkami a zistíme znamienka polynómu $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ na získaných intervaloch.



Napr. $P(-3) = 50 > 0$, $P(0) = -4 < 0$ a $P(3) = 50 > 0$, čo vyznačíme na obrázku. Riešením danej nerovnice je množina $\mathcal{K} = \langle -2; 2 \rangle$.

Príklad 1.17 *Pre ktoré hodnoty parametra $p \in \mathbb{R}$ nemá rovnica*

$$(2p+1)x^2 - 3(p-1)x - p + 1 = 0$$

reálne korene?

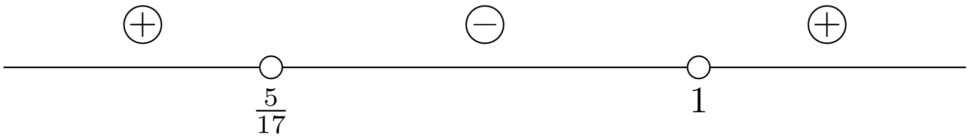
Riešenie. Pre $p = -1/2$ ide o lineárnu rovnicu, ktorá má práve jeden reálny koreň (presvedčte sa o tom). Pre $p \neq -1/2$ máme kvadratickú rovnicu, ktorej diskriminant je

$$D = [-3(p-1)]^2 - 4(2p+1)(-p+1) = 17p^2 - 22p + 5.$$

Daná rovnica nemá reálne korene, ak $D < 0$, t. j. ak je splnená kvadratická nerovnica

$$17p^2 - 22p + 5 < 0.$$

Nebudeme vysvetľovať detaily riešenia tejto nerovnice: príslušná kvadratická rovnica $17p^2 - 22p + 5 = 0$ má korene $\mathcal{K} = \{1; 5/17\}$, ktoré delia číselnú os na tri časti:



Získaným intervalom priradíme obvyklým spôsobom znaky $\oplus$ alebo $\ominus$. Rovnica nemá reálne korene pre $p \in (5/17; 1)$. Tu si treba uvedomiť, že $-1/2 \notin (5/17; 1)$. Viete prečo?

Poznámka 1.7 *Pri určovaní definičného oboru funkcií je často potrebné vedieť riešiť sústavu nerovníc s jednou neznámou (pozri príklad 4 z nasledujúcich cvičení). K tomu je nutné zvlášť vyriešiť každú nerovnicu a riešenie sústavy nerovníc je potom prienikom riešení všetkých uvažovaných nerovníc – teda žiadna vylučovacia metóda alebo dosadzovacia metóda!*

Cvičenia

1. V množine $\mathbb{R}$ riešte nerovnice:

   a) $\dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2} \geqq \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6}$; $\quad [\mathcal{K} = \langle 2; \infty)]$

   b) $3x^2 - 2x + 5 > 0$; $\quad [\mathcal{K} = \mathbb{R}]$

   c) $-3x^2 - 7x + 6 \geqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = \langle -3; 2/3\rangle]$

   d) $x^2 + 2x < 6x - 15$; $\quad [\mathcal{K} = \emptyset]$

   e) $(x+2)(x+8) \leqq (x+8)(4x-25)$; $\quad [\mathcal{K} = (-\infty;\ -8\rangle \cup \langle 9;\ \infty)]$

   f) $x^4 + x^3 - x - 1 \leqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = \langle -1;\ 1\rangle]$

   g) $x^4 + x^3 + x + 1 \leqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = \{-1\}]$

   h) $x^4 + 13x^2 + 36 \leqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = \emptyset]$

   i) $x^4 - 13x^2 + 36 \leqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = \langle -3; -2\rangle \cup \langle 2; 3\rangle]$

   j) $x^4 - 12x^2 + 36 \leqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = \{\pm\sqrt{6}\}]$

   k) $\dfrac{(x+2)^3 x^8 (1-x^2)^3}{(x-3)^5 (x-1)(x-2)^4} \leqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = \langle -2;\ -1\rangle \cup \{0\} \cup (3; \infty)]$

   ℓ) $\dfrac{1}{x+2} \leqq \dfrac{3}{x-2}$; $\quad [\mathcal{K} = \langle -4; -2) \cup (2; \infty)]$

   m) $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} < 0$; $\quad [\mathcal{K} = (-4; -1) \cup (-1; 6)]$

   n) $\dfrac{-x^3 + x^2 - x + 1}{x+8} \geqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = (-8; 1\rangle]$

   o) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geqq 1$; $\quad [\mathcal{K} = (-\infty; -2) \cup (-1; 0\rangle]$

   p) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} \leqq \dfrac{1}{x(x+1)}$; $\quad [\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (0; 1/2\rangle \cup (1; 2)]$

   q) $\dfrac{x+1}{x-5} \geqq \dfrac{x-2}{x-5}$; $\quad [\mathcal{K} = (5; \infty)]$

   r) $\dfrac{1-3x}{x+4} < 2$; $\quad [\mathcal{K} = (-\infty; -4) \cup (-7/5; +\infty)]$

   s) $x^2 - 0,2x + 0,01 \leqq 0$; $\quad [\mathcal{K} = \{0,1\}]$

   t) $\dfrac{5-x}{2x-2} + \dfrac{1+4x}{2x+2} < 1$. $\quad [\mathcal{K} = (-1; 1)]$

2. Pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ má daná rovnica len kladné riešenie?
   a) $a(2x+1) = 4(x+3)$; $[a \in (2; 12)]$
   b) $\dfrac{2}{2x-a} = \dfrac{1}{4-ax}$; $[a \in (-\infty; -8) \cup (-1; \infty)]$
   c) $\dfrac{4x-1}{x-1} = a+3$; $[a \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)]$
   d) $\dfrac{3x-1}{a+2} + \dfrac{x}{5} = 1$. $[a \in (-\infty; -17) \cup (-3; \infty)]$

3. Určte všetky hodnoty parametra $b \in \mathbb{R}$, pre ktoré je riešením danej sústavy rovníc v $\mathbb{R}^2$ dvojica záporných čísel $x < 0$ a $y < 0$:
   a) $x + 2by = 3$, $3x - 2y$=1; $[(-3; -1/3)]$
   b) $2x - y = 8$, $3x - 2y = b$; $[(16; \infty)]$
   c) $2x - y = 8$, $bx + y = 10$; $[(-\infty; -2)]$
   d) $3x - 6y = 1$, $5x - by = 2$; $[(10; 12)]$
   e) $4x + 3y = 12$, $2x + by = 5$; $[\emptyset]$
   f) $3x - 2y = 1$, $bx + 2y = 8$. $[(-\infty; -3)]$

4. V $\mathbb{R}$ riešte sústavu nerovníc:
   a) $2x + 3 \geqq 1$, $\quad 1/x + 1/3 < 0$; $[\langle -1; 0)]$
   b) $x^2 - 5x + 18 \geqq 0$, $\quad x^2 < 1$; $[(-1; 1)]$
   c) $5x - 4 \leqq x^2 < 16$; $[(-4; 1\rangle]$
   d) $-x^2 + x + 6 \geqq 0$, $\quad x^2 + 2x - 3 > 0$; $[(1; 3\rangle]$
   e) $x^2 + x - 2 \leqq 0$, $\quad \dfrac{2x}{x+1} \geqq 1$. $[\langle -2; -1) \cup \{1\}]$

5. Urobte diskusiu o počte reálnych koreňov daných kvadratických rovníc v závislosti na parametri $p \in \mathbb{R}$:
   a) $2px^2 - 2x - 3p - 2 = 0$; b) $(p-1)x^2 - 2(p+1)x + p - 2 = 0$;
   c) $(x-1)(x-3) + p(x-2)(x-4) = 0$; d) $x^2 + 3x + p^2 + 4 = 0$.

   [a) pre $p \neq 0$ má rovnica dva reálne korene, pre $p = 0$ má jeden koreň $\mathcal{K} = \{-1\}$; b) pre $p \in (1/5; 1) \cup (1; \infty)$ má dva reálne korene, pre $p \in \{1/5; 1\}$ má jeden a pre $p \in (-\infty; 1/5)$ nemá reálny koreň; c) pre $p \neq -1$ má dva reálne korene, pre $p = -1$ má jeden koreň $\mathcal{K} = \{2{,}5\}$; d) pre žiadne $p \in \mathbb{R}$ nemá reálny koreň]

1.6 Rovnice a nerovnice s neznámou v absolútnej hodnote

Bežný postup riešenia úloh s neznámou v absolútnej hodnote spočíva „v odstránení absolútnych hodnôt“. Často je k tomu potrebné nájsť také intervaly maximálnej veľkosti, že na každom z nich je každý výraz, vyskytujúci sa v absolútnej hodnote, len kladný alebo len záporný (k tomu zvyčajne je potrebné nájsť body, v ktorých tieto výrazy „menia znamienko“ – dohodneme sa na tom, že tieto body nazveme **kritickými**). Potom k odstráneniu absolútnej hodnoty stačí použiť jej definíciu (1.1).

Pri riešení konkrétnych úloh môžeme použiť napr. „tabuľkovú metódu“ (známu zo strednej školy) alebo modifikáciu „intervalovej metódy“. Informácia o znamienkach jednotlivých výrazov na ľubovoľnom intervale nám umožní prepísať riešenú úlohu na tvar, v ktorom už absolútne hodnoty nevystupujú. Takto prepíšeme úlohu na každom intervale, vyriešime ju na ňom a riešenie pôvodnej úlohy je zjednotením získaných riešení na jednotlivých intervaloch.

V špeciálnych prípadoch môžeme využiť **geometrický význam absolútnej hodnoty**: nech $a \in \mathbb{R}$ je pevné číslo, potom $|x-a|$ geometricky vyjadruje vzdialenosť bodu x od bodu a na číselnej osi. Takto napr. riešením nerovnice $|x+3| < 5$ v $\mathbb{R}$ je množina tých bodov, ktorých vzdialenosť od bodu $a=-3$ je menšia ako 5. Presvedčte sa nákresom na číselnej osi, že riešením úlohy je interval $(-8;2)$. Túto geometrickú interpretáciu absolútnej hodnoty je výhodné „mechanicky“ ovládať pri práci s limitami a príbuznými problémami.

Príklad 1.18 *Upravme výraz* $V(x) = \sqrt{(x+2)^2} - |6-x|$ *tak, aby neobsahoval odmocninu a ani absolútnu hodnotu.*

Riešenie. Druhú odmocninu odstránime na základe (1.2), kde $n=2$. Dostaneme

$$V(x) = |x+2| - |6-x|. \tag{1.25}$$

Je zrejmé, že výraz $|x+2|$ má jediný kritický bod, a to číslo -2 (výraz $(x+2)$ v ňom „mení znamienko“). Pre $|6-x|$ je kritické číslo 6. Body -2 a 6 rozdeľujú množinu reálnych čísel na tri intervaly $(\infty;-2)$, $(-2;6)$ a $(6;\infty)$. Na každom z týchto intervalov je výraz $(x+2)$ kladný alebo záporný. To isté platí aj pre $(6-x)$. V krajných bodoch týchto intervalov môžu byť tieto výrazy rovné nule – to nám neprekáža, lebo $|0|=0$. Na základe definície absolútnej hodnoty (1.1) sa dopracujeme k bežne používanej tabuľke:

	$\|x+2\|$	$\|6-x\|$
$(\infty;-2\rangle$	$-x-2$	$6-x$
$\langle -2;6\rangle$	$x+2$	$6-x$
$\langle 6;\infty)$	$x+2$	$x-6$

V tejto tabuľke je podchytené správanie sa výrazov $|x+2|$ a $|6-x|$ na jednotlivých intervaloch: napr. na intervale $\langle -2;6\rangle$ (pozri riadok) je výraz $|6-x|$ (pozri stĺpec) rovný výrazu $6-x$.

Teraz môžeme na jednotlivých intervaloch pomocou tejto tabuľky upraviť výraz (1.25):

- ak $x \in (\infty;-2\rangle$, tak $V(x) = (-x-2)-(6-x) = -8$;

- ak $x \in \langle -2; 6 \rangle$, tak $V(x) = (x+2) - (6-x) = 2(x-2)$;
- a ak $x \in \langle 6; \infty)$, tak $V(x) = (x+2) - (x-6) = 8$.

A tu je prehľadné zhrnutie našich výpočtov:

$$V(x) = \begin{cases} -8 & \text{pre } x \in (-\infty; -2\rangle\,; \\ 2(x-2) & \text{pre } x \in \langle -2; 6\rangle\,; \\ 8 & \text{pre } x \in \langle 6; +\infty). \end{cases} \tag{1.26}$$

Príklad 1.19 *Vyriešme v* $\mathbb{R}$*:* *a)* $|x-1| = 2x+3$*;* *b)* $|1-x| + x < 2$*;* *c)* $|4-x^2| < |x+4| - 2$*;* *d)* $|3-4x| \geqq 1$.

Riešenie.

a) Pre výraz $|x-1|$ je jediným kritickým bodom číslo 1, lebo len v bode $x = 1$ výraz $(x-1)$ „mení znamienko“. Množinu $\mathbb{R}$ vyjadríme ako zjednotenie dvoch intervalov, na ktoré ju číslo 1 „rozdeľuje“: $\mathbb{R} = (-\infty; 1\rangle \cup \langle 1; \infty)$. Na každom z týchto intervalov odstránime absolútnu hodnotu a po tejto úprave vyriešime vzniknutú rovnicu.

   1. Pre $x \in (-\infty; 1\rangle$ je $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ a daná rovnica má tvar
   $$-x+1 = 2x+3$$
   odkiaľ $x = -2/3$. Pretože $-2/3 \in (-\infty; 1\rangle$, tak $\mathcal{K}_1 = \{-2/3\}$.
   2. Pre $x \in \langle 1; \infty)$ je $|x-1| = x-1$ a daná rovnica má tvar
   $$x-1 = 2x+3$$
   odkiaľ $x = -4$. Pretože $-4 \notin \langle 1; \infty)$, tak $\mathcal{K}_2 = \emptyset$.

   Riešením danej rovnice je množina $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \{-2/3\}$.

b) Aj pre výraz $|1-x|$ je jediným kritickým bodom číslo 1. Ďalej postupujeme tak ako v časti a) tohto príkladu, len s tým rozdielom, že na každom z intervalov $(-\infty; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$ budeme po odstránení absolútnej hodnoty riešiť nerovnicu a nie rovnicu.

   1. Pre $x \in (-\infty; 1\rangle$ je $|1-x| = 1-x$ a daná nerovnica má tvar
   $$(1-x) + x < 2 \qquad \text{t. j.} \qquad 1 < 2.$$
   Jej riešením je celá množina reálnych čísel $\mathbb{R}$, a preto riešením danej nerovnice na intervale $(-\infty; 1\rangle$ je množina
   $$\mathcal{K}_1 = (-\infty; 1\rangle \cap \mathbb{R} = (-\infty; 1\rangle.$$

2. Pre $x \in \langle 1; \infty)$ je $|1 - x| = -(1 - x) = x - 1$ a daná nerovnica má tvar

$$x - 1 + x < 2 \qquad \text{t. j.} \qquad x < \frac{3}{2}\,,$$

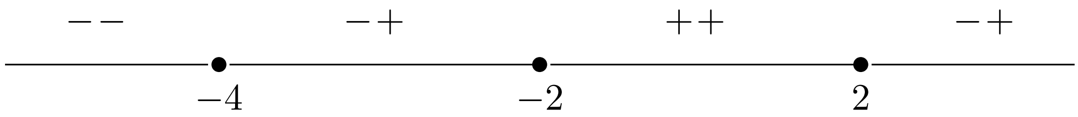
čo dáva interval $(-\infty; 3/2)$. Teda

$$\mathcal{K}_2 = \langle 1; \infty) \cap (-\infty; 3/2) = \langle 1; 3/2).$$

Záver: riešením danej nerovnice je množina

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = (-\infty; 3/2)$$

c) Ľahko zistíme, že výraz $V_1(x) = 4 - x^2$ je kladný na intervale $(-2; 2)$ a záporný na množine $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$; výraz $V_2(x) = x + 4$ je kladný na $(-4; \infty)$ a záporný na $(-\infty; -4)$. V každom z bodov ± 2 a -4 jeden z týchto výrazov mení znamienko. Na obrázku je situácia znázornená tým, že na jednotlivých intervaloch je vľavo uvedené znamienko, ktoré na ňom nadobúda výraz V_1 a vpravo znamienko pre výraz V_2.



Všimnime si, že na intervaloch $\langle -4; -2\rangle$ a $\langle 2; \infty)$ sú rovnaké označenia $-+$, a preto daná nerovnica má na nich po odstránení absolútnych hodnôt rovnaký tvar. Teraz môžeme na jednotlivých množinách použiť intervalovú metódu riešenia nerovnice – odlišnosť bude len v tom, že nebudeme znázorňovať celú číselnú os,[11] ale množinu, na ktorej budeme riešiť upravenú nerovnicu.

1. Ak $x \in \langle -4; -2\rangle \cup \langle 2; \infty) = A$ má daná nerovnica tvar $x^2 - 4 < x + 4 - 2$, t. j. $x^2 - x - 6 < 0$. Koreňmi polynómu $P(x) = x^2 - x - 6$ sú čísla 3 a -2. Vyznačíme ich v množine A „prázdnymi krúžkami“ (ostrá nerovnosť):

   a zistíme znamienka polynómu P na získaných intervaloch množiny A. Keďže riešime na množine A nerovnicu $x^2 - x - 6 < 0$, tak jej riešením je zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme na obrázku označili znakom mínus. Teda riešením danej nerovnice na množine A je $\mathcal{K}_1 = \langle 2; 3)$.

2. Ak $x \in (-\infty; -4\rangle = B$, tak nerovnica má tvar $x^2 - 4 < -x - 4 - 2$. Presvedčte sa, že jej riešením na množine B je $\mathcal{K}_2 = \emptyset$.

[11] Pozri kroky intervalovej metódy v príklade 1.13.

3. Ak $x \in \langle -2; 2\rangle = C$, tak daná nerovnica má tvar $4 - x^2 < x + 4 - 2$. Overte, že jej riešením na množine C je $\mathcal{K}_3 = (1; 2\rangle$.

   Riešením danej nerovnice je $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 = (1; 3)$.

d) Keďže výraz $|3 - 4x|$ sa dá upraviť na tvar, ktorý je číselným násobkom výrazu typu $|x - a|$, tak tu môžeme použiť geometrický význam absolútnej hodnoty. Na základe vety 1.3 a definície absolútnej hodnoty dostaneme

$$|3 - 4x| = |-4| \cdot \left|x - \frac{3}{4}\right| = 4\left|x - \frac{3}{4}\right|,$$

t. j. danú nerovnicu môžeme ekvivalentne zapísať ako $|x - 3/4| \geqq 1/4$. Jej riešením je množina všetkých tých bodov, ktorých vzdialenosť od bodu $3/4$ nie je menšia ako $1/4$. Overte, že $\mathcal{K} = (-\infty; 1/2\rangle \cup \langle 1; \infty)$.

Cvičenia

V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnice, resp. nerovnice:

1. $|3x - 1| = |3x - 2|$; $\quad [\mathcal{K} = \{1/2\}]$
2. $|7 - 2x| = |5 - 3x| + |x + 2|$; $\quad [\mathcal{K} = \langle -2; 5/3\rangle]$
3. $|1 - |1 - x|| = 1$; $\quad [\mathcal{K} = \{\pm 1;\ 3\}]$
4. $|x| + |x - 5| < 7$; $\quad [\mathcal{K} = (-1; 6)]$
5. $\left|\dfrac{1}{x - 1} + 2\right| < \dfrac{1}{2}$; $\quad [\mathcal{K} = (1/3; 3/5)]$
6. $|7 - 2x| \leqq |5 - 3x| + |x + 2|$; $\quad [\mathcal{K} = \mathbb{R}]$
7. $|x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2$; $\quad [\mathcal{K} = \langle -3; 1\rangle]$
8. $\dfrac{|x - 2|}{x^2 - 5x + 6} \geqq 3$; $\quad [\mathcal{K} = (3; 10/3\rangle]$
9. $|x^3 + 1| \geqq x + 1$; $\quad [\mathcal{K} = \mathbb{R} - (0; 1)]$
10. $x^3 + 1 \geqq |x + 1|$; $\quad [\mathcal{K} = \langle -1;\ 0\rangle \cup \langle 1;\ \infty)]$
11. $\dfrac{1}{|2x - 3|} \geqq 5$; $\quad [\mathcal{K} = \langle 7/5; 3/2) \cup (3/2; 8/5\rangle]$
12. $|x - 6| \geqq |x^2 - 5x + 6|$; $\quad [\mathcal{K} = \langle 0;\ 4\rangle]$

13. $|x-6| \geqq |x^2-5x+9|$; $[\mathcal{K} = \langle 1;\, 3\rangle]$

14. $\big||x|-3\big| = -2x$; $[\mathcal{K} = \{-1\}]$

15. $2+\big||x+1|-|x-1|\big| \leqq 2x$; $[\mathcal{K} = \langle 2;\infty)]$

16. $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \leqq 1$; $[\mathcal{K} = \mathbb{R}]$

17. $3x-|2x-1| = x+1$; $[\mathcal{K} = \langle 1/2;\, +\infty)]$

18. $|3x-2|+4 = |2x+3|$; $[\mathcal{K} = \{3/5; 1\}]$

19. $|x+6|-|x+2|+|x-5|-9 \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \langle -8;-4\rangle \cup \langle 0;10\rangle]$

20. $|x^2+1| \leqq 2x+1$; $[\mathcal{K} = \langle 0;2\rangle]$

21. $|2x+1|-|2x|+1 = 2x$; $[\mathcal{K} = \{1\}]$

22. $5|x-1|-3|x-2|+|x-4|+x-5 > 0$; $[\mathcal{K} = (-\infty;-1) \cup (1{,}5;\, \infty)]$

23. $\dfrac{x^2-|x|-6}{x-2} \geqq 2x$; $[\mathcal{K} = (-\infty;\, 2)]$

24. $\dfrac{x^2-|x|-6}{x-2} \geqq 2.$ $[\mathcal{K} = \langle -1;\, 2) \cup \langle (3+\sqrt{17})/2;\, \infty)]$