

Matematika I, opak. – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: RNDr. Z. Gibová, PhD. (zuzana.gibova@tuke.sk)

Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

Konzultácie: na cvičení posledná 45 hodina

- cvičenia (povinné),
- prednášky (link na stránke KMTI – Výučba – aktuálne predmety – Matematika I) - **doc. RNDr. Blanka Baculíková, PhD)**

Predmet končí KZ: 2 zápočtové písomky – získať v súčte **aspoň 51 bodov**

1ZP - 7. týždeň na cvičení za 45 b (30 b + 15 b za teóriu),

2ZP – 7.1.2025, miestnosť P25, 9:00, za 55 b (40 b +15 b za teóriu),

OZP – 1ZP – 3.4 týždeň skúškového obdobia

OZP - 2. oprava len pre študentov, ktorí majú v súčte z oboch písomiiek viac ako 40 bodov

Bonusové body – max 5 bodov, malé písomky na každom cvičení

Literatúra k cvičeniam

- *Baculíková, Grinčová:* MATEMATIKA I v príkladoch, Elfa, Košice, 2009
- *Baculíková, Grinčová:* MATEMATIKA I - Vzorové neriešené úlohy (2013)

Všetky informácie k predmetu na

<https://kmti.fei.tuke.sk/pedagog/rndr-zuzana-gibova-phd> v časti **Oznamy**

Funkcia

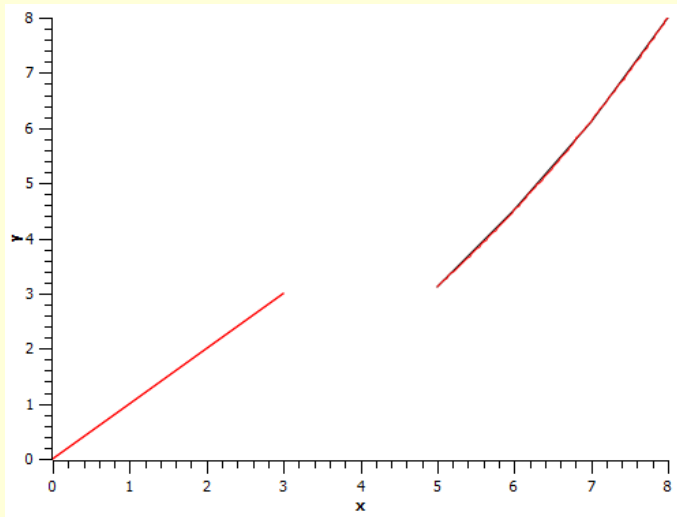
Definícia: Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú dve neprázdne množiny a f je pravidlo (predpis), ktoré každému $x \in A$ priraduje práve jeden prvok $f(x) \in B$. Potom hovoríme, že f je funkcia, ktorá zobrazuje množinu A do množiny B .

Píšeme $f : A \rightarrow B$

definičný obor funkcie $f : D(f) = A$

obor hodnôt funkcie $f : H(f) = \{f(x) : x \in A\}$

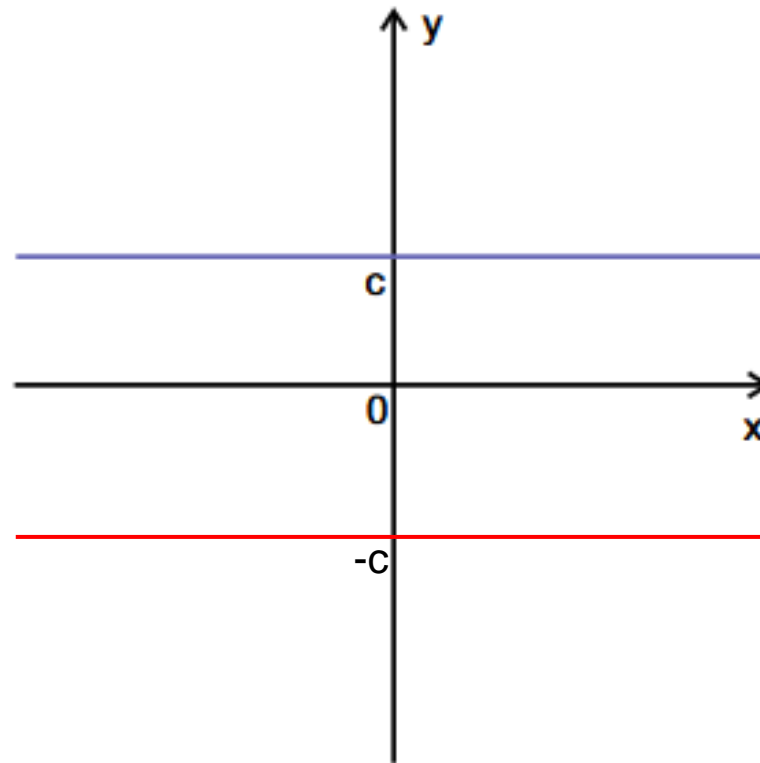
graf funkcie $f : G(f) = \{[x, f(x)] \in A \times B, x \in A\}$



funkcia nie je definovaná na intervale $(3,5)$
 $D(f) = (0, 3) \cup (5, \infty)$

Elementárne funkcie

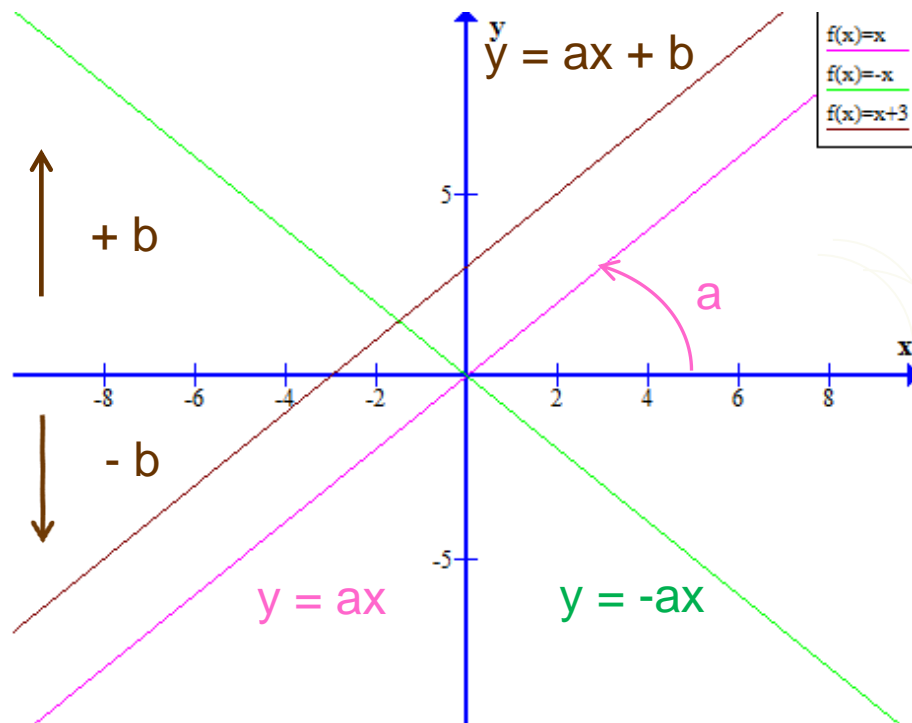
Konštantná funkcia $y = c, c \in \mathbb{R}$



Grafom je priamka rovnobežná s osou x. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Lineárna funkcia $y = ax + b$, $a \neq 0$



- a - ovplyvní sklon priamky
- $- a$ - ovplyvní smer priamky
- b – posun na osi y

Grafom je priamka. $D(f) = \mathbb{R}$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
3. Viesť zvolenými bodmi priamku.

1. Načrtnite grafy funkcí:

a) $y = 0,5 x$

b) $y = - x + 5$

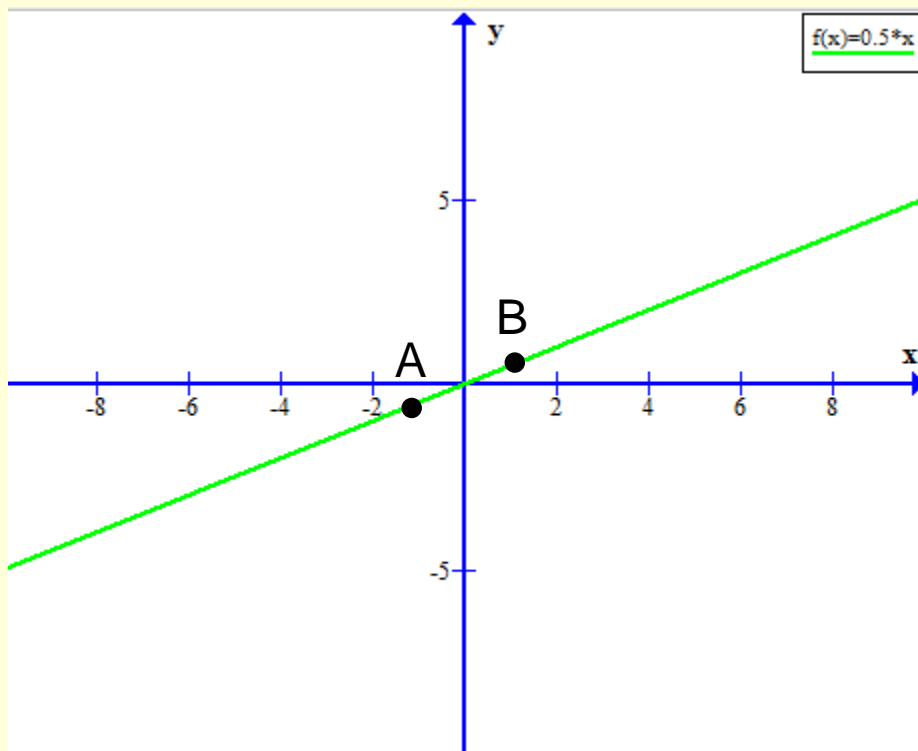
c) $y = 2x - 4,$

d) $y = - 3x + 1,$

e) $y = 5.$

sami, dú

1. a) $y = 0,5 x$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

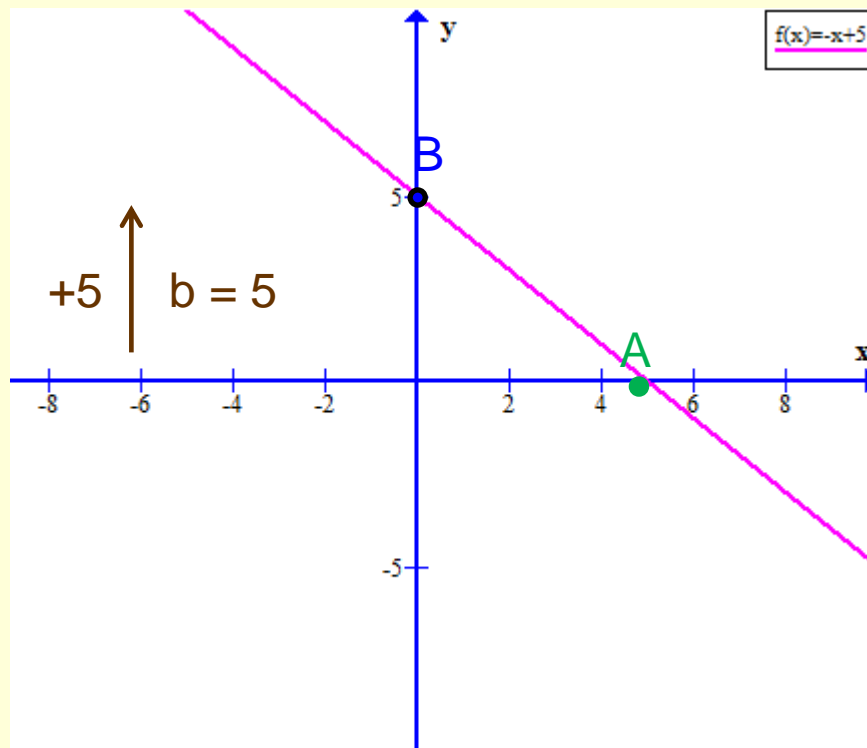
priesečník s osou x a y:
nemá, je to funkcia $y = a \cdot x$
prechádza počiatkom
súradnicového systému, preto
volíme dve hodnoty x z $D(f)$ a
dopočítame ich y -ové súradnicu

$$A: x_1 = 1, y_1 = 0,5 \cdot 1 = 0,5$$

$$B: x_2 = -1, y_2 = 0,5 \cdot (-1) = -0,5$$

*Poznámka: $a = 0,5 > 0$,
preto priamka má smer od prvého
do tretieho kvadrantu*

1. b) $y = -x + 5$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

priesečník s osou x a y:

je to funkcia $y = a \cdot x + b$, má priesečníky s osami:

priesečník s osou x: ($y = 0$)

$$0 = -x + 5$$

$$-5 = -x$$

$$x = 5$$

$$A: y = 0, x = 5$$

priesečník s osou y: ($x = 0$)

$$y = -0 + 5$$

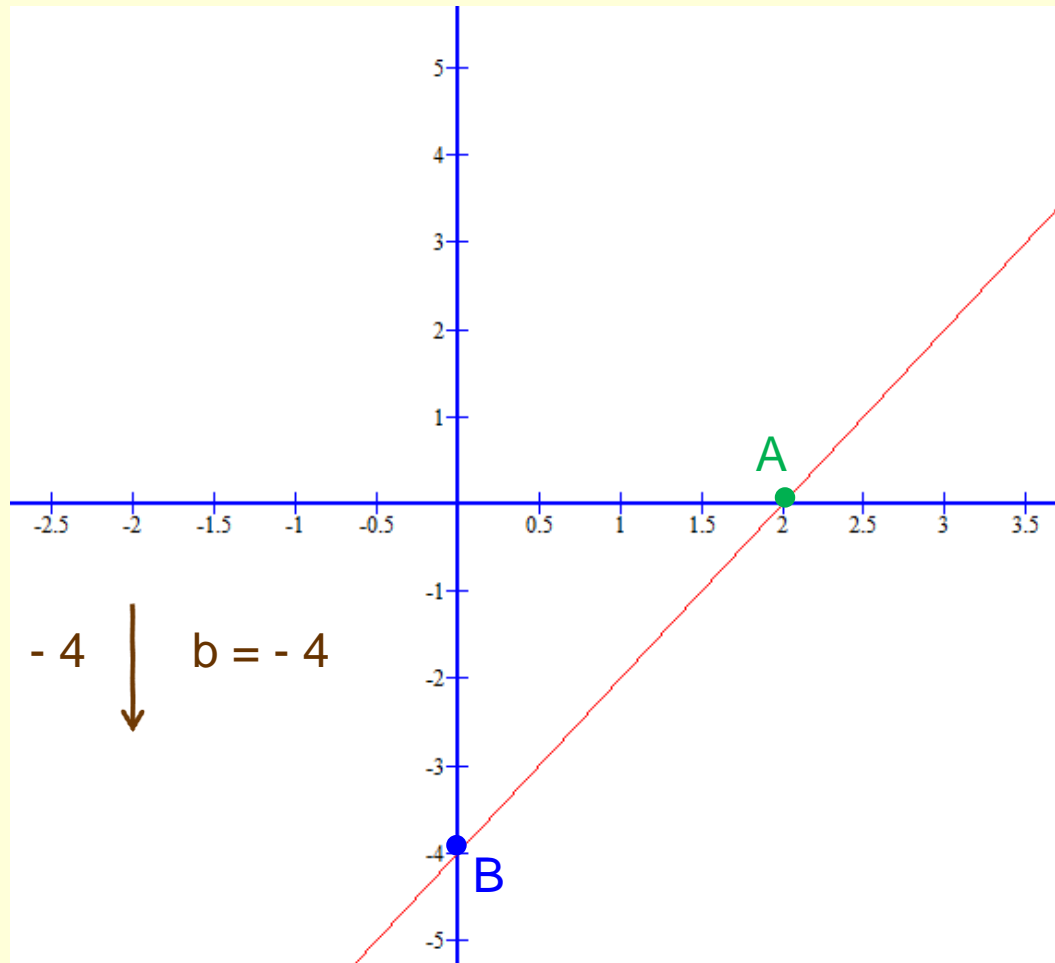
$$Y = 5$$

$$B: x = 0, y = 5$$

Poznámka:

$a = -1 < 0$, preto priamka má smer od druhého do štvrtého kvadrantu
 $b = 5$, posun priamky nahor o 5 v smere osi y

1.c) $y = 2x - 4$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

priesečník s osou x: ($y = 0$)

$$0 = 2x - 4$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

$$A: y = 0, x = 2$$

priesečník s osou y: ($x = 0$)

$$y = 2 \cdot 0 - 4$$

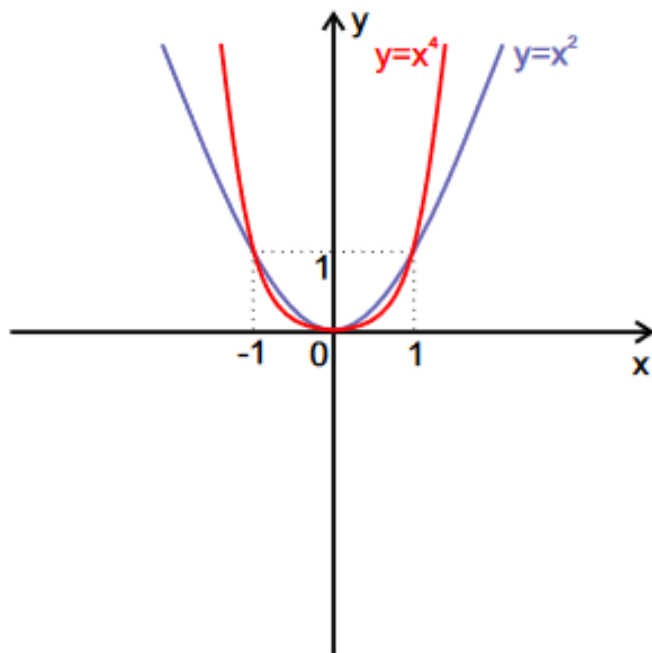
$$y = -4$$

$$B: x = 0, y = -4$$

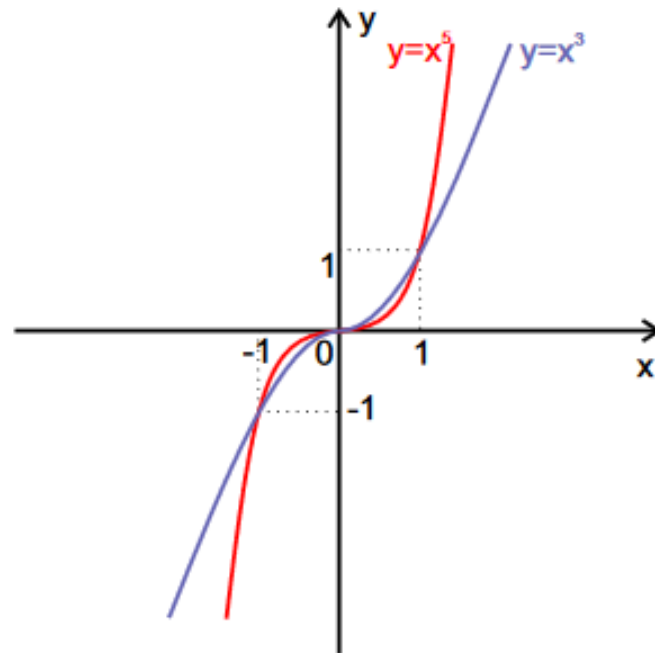
Elementárne funkcie

Mocninová funkcia $y = x^n, n \in \mathbb{N}$

n-párne



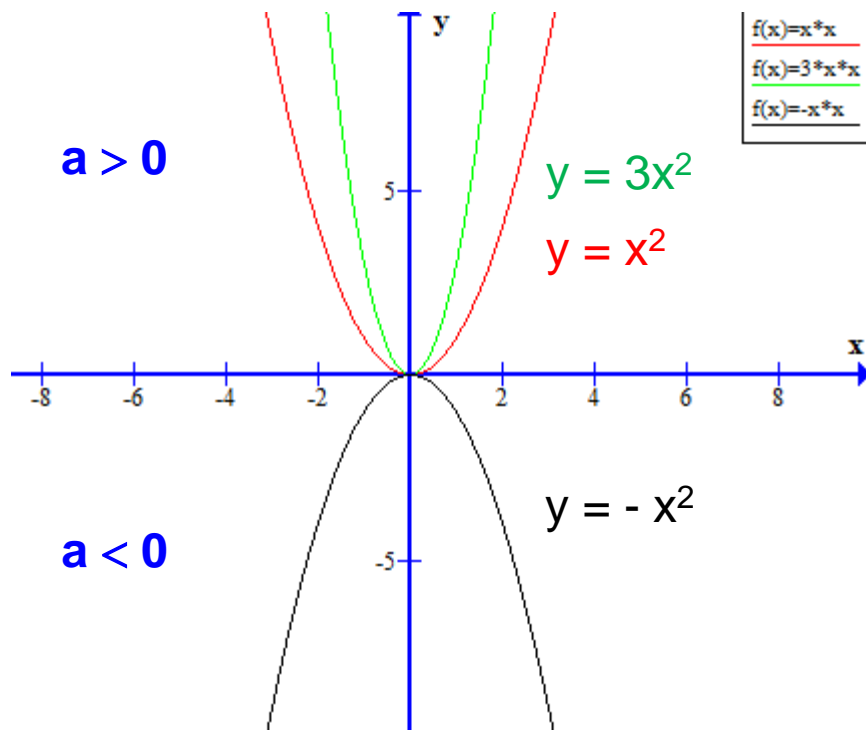
n-nepárne



$D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$, $b = c = 0$
 $a \neq 0$

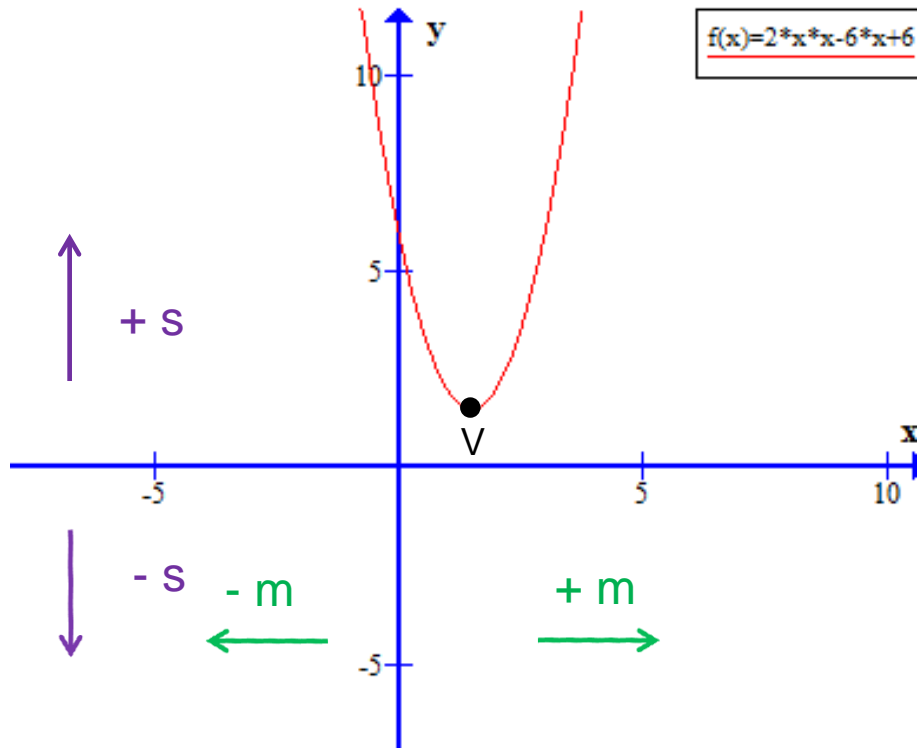


a - ovplyvní strmosť funkcie
 $-a$ - orientácia funkcie

Grafom je parabola. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$



$D > 0$, **dva** priesečníky: x_1, x_2

$D = 0$, **jeden** priesečník: $x_1 = x_2$

$D < 0$, **nemá** priesečníky s osou x

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = a(x - m)^2 + s$$

Vrchol paraboly: $V(m, s)$

m – posun na osi x

s – posun na osi y

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť súradnice vrcholu $V (m, s.)$
3. Vypočítať priesečníky s osou X (zvolíme $y = 0$) pomocou determinantu, ak nemá priesečníky zvolíme dva body z $D(f)$ a vypočítame y .
4. Vypočítať priesečník s osou Y (zvolíme $x = 0$).
5. Viesť parabolou cez vrchol a určené priesečníky s osami.

2. Načrtnite grafy funkcí:

a) $y = 4x^2$

b) $y = (x - 1)^2$

c) $y = - (x + 3)^2$

d) $y = - 3x^2 - 6x + 2$

e) $y = x^2 - 2x + 2$

f) $y = (x + 2)^2$

g) $y = x^2 - 4x - 5$

sami, dú

2. a) $y = 4x^2$

$D(f) = \mathbb{R}$

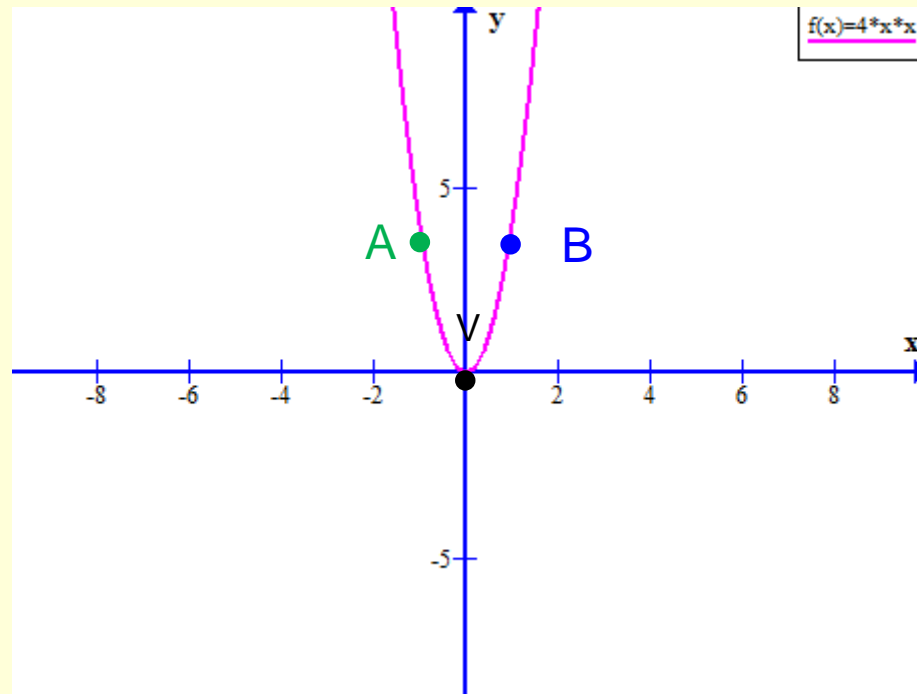
je to funkcia $y = ax^2$, jej vrchol leží v počiatku súradnicového systému - V (0,0)

má jeden **priesečník s osou x** vo vrchole V

priesečník s osou y nemá, preto volíme dve hodnoty x z $D(f)$ a dopočítame ich y -ové súradnicu

A: $x_1 = 1, y_1 = 4 \cdot 1^2 = 4$

B: $x_2 = -1, y_2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4$



Poznámka: $a = 4 > 0$, parabola otočená dohora (usmievavá)

2. b) $y = (x - 1)^2$

$D(f) = \mathbb{R}$

porovnaním zápisu funkcie $y = (x - 1)^2$ so všeobecným zápisom

$y = a(x - m)^2 + s, \quad m = 1, s = 0$

súradnice vrcholu **V** (m, s) sú $V(1, 0)$

priesečník s osou x: má jeden vo vrchole V

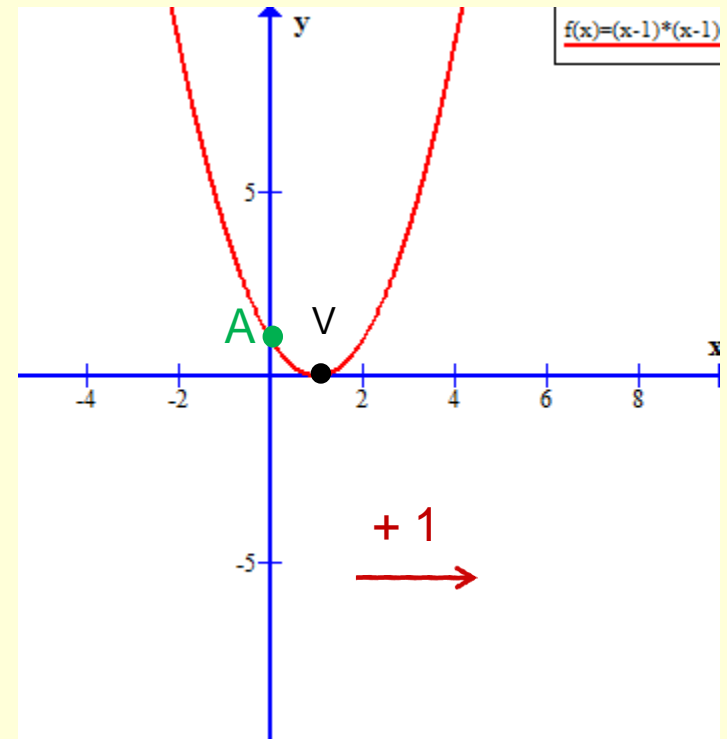
priesečník s osou y: $x = 0$

$y = (0 - 1)^2 = 1$

$y = 1$

A: $x = 0, y = 1$

Poznámka: $m = 1$, posun paraboly v smere x



2. c) $y = -(x + 3)^2$

$D(f) = \mathbb{R}$

súradnice vrcholu **V** (m, s)
sú $V(-3, 0)$

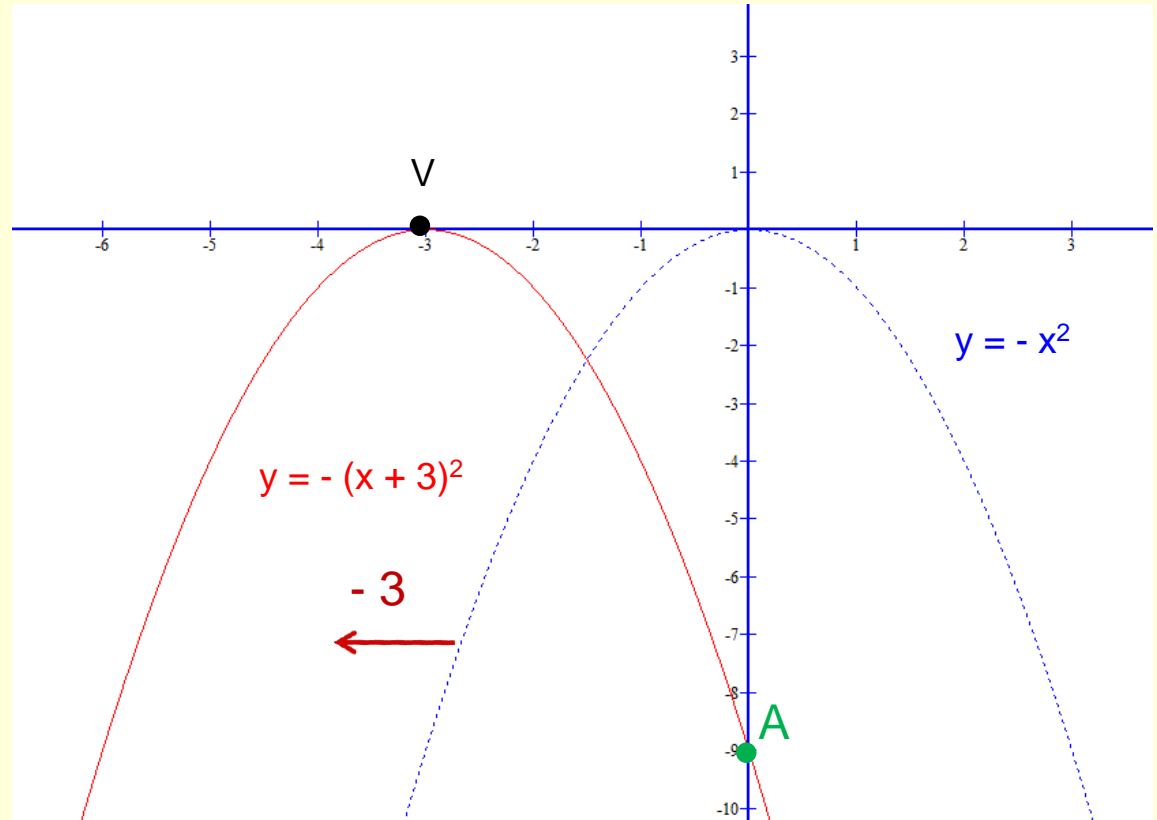
priesečník s osou x má
jeden vo vrchole V
 $m = -3, s = 0$

priesečník s osou y: $x = 0$

$y = -(0 + 3)^2 = -9$

$y = -9$

A: $x = 0, y = -9$



Poznámka: $a = -1 < 0$, parabola otočená nadol (smutná), $m = -3$, posun paraboly v smere $-x$

2. d) $y = -3x^2 - 6x + 2$

$D(f) = \mathbb{R}$

vrchol: úprava doplnením na štvorec

$$y = -3x^2 - 6x + 2$$

$$y = -3\left(x^2 + 2x - \frac{2}{3}\right)$$

$$y = -3\left[\left(x + 1\right)^2 - \frac{2}{3} - 1\right]$$

$$y = -3(x + 1)^2 + 5$$

$V(-1, 5)$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = -0^2 - 6 \cdot 0 + 2$$

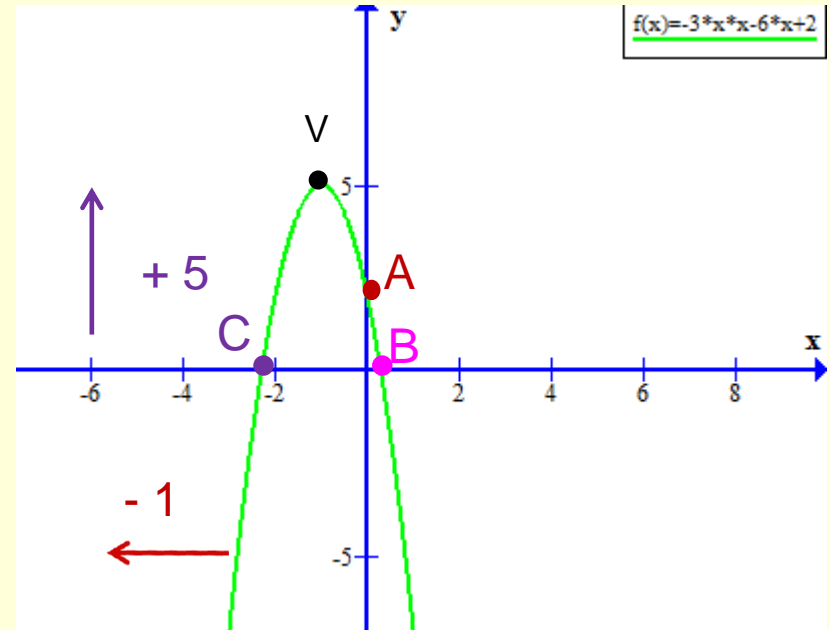
$$y = 2 \quad \text{A: } x = 0, y = 2$$

priesečníky s osou x: $y = 0$, výpočet cez determinat

$$D = 36 + 4 \cdot 6 = 60, \text{ bude mať dva priesečníky}$$

$$\text{B: } x_1 = 0.29, y_1 = 0$$

$$\text{C: } x_2 = -2.29, y_1 = 0$$



Poznámka: $m = -1$, posun paraboly v smere $-x$
 $s = 5$, posun paraboly nahor v smere y

2. e) $y = x^2 - 2x + 2$

$D(f) = \mathbb{R}$

vrchol:

$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$y = (x - 1)^2 + 2 - 1$$

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

$$V(1, 1)$$

priesečník s osou y:

$$x = 0$$

$$y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2$$

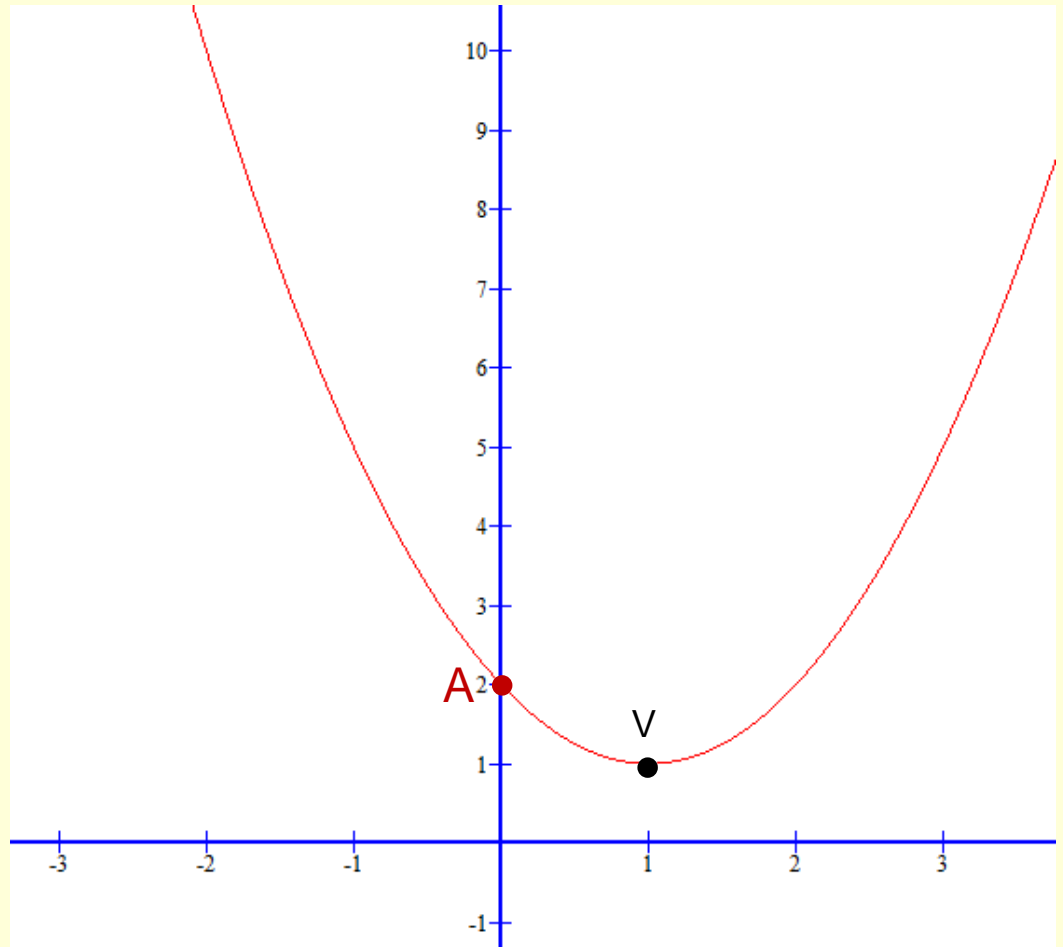
$$y = 2$$

$$A: x = 0, y = 2$$

priesečníky s osou x:

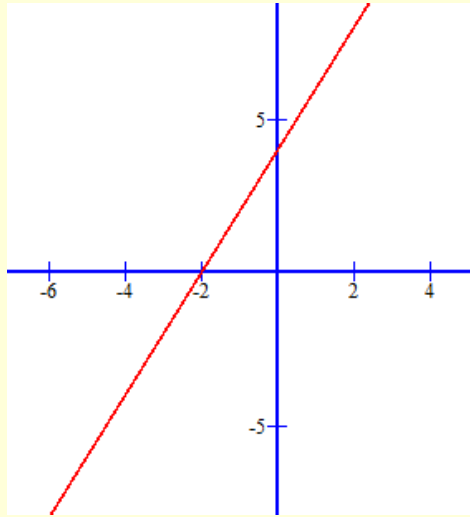
nemá priesečníky s osou x

$D < 0$ (z polohy V vyplýva, že diskriminant nemusíme počítat')

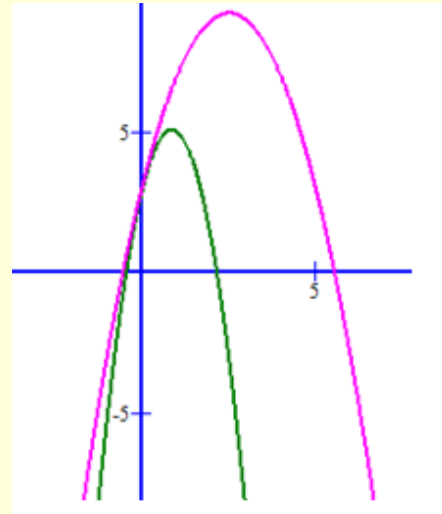


Kontrolka: 1. Vyberte, ktorý zápis funkcie zodpovedá grafu na obrázku 1.

a) $y = 4x - 2$, b) $y = 2x$, c) $y = 2x + 4$, d) $y = -2x + 4$.



obr. 1



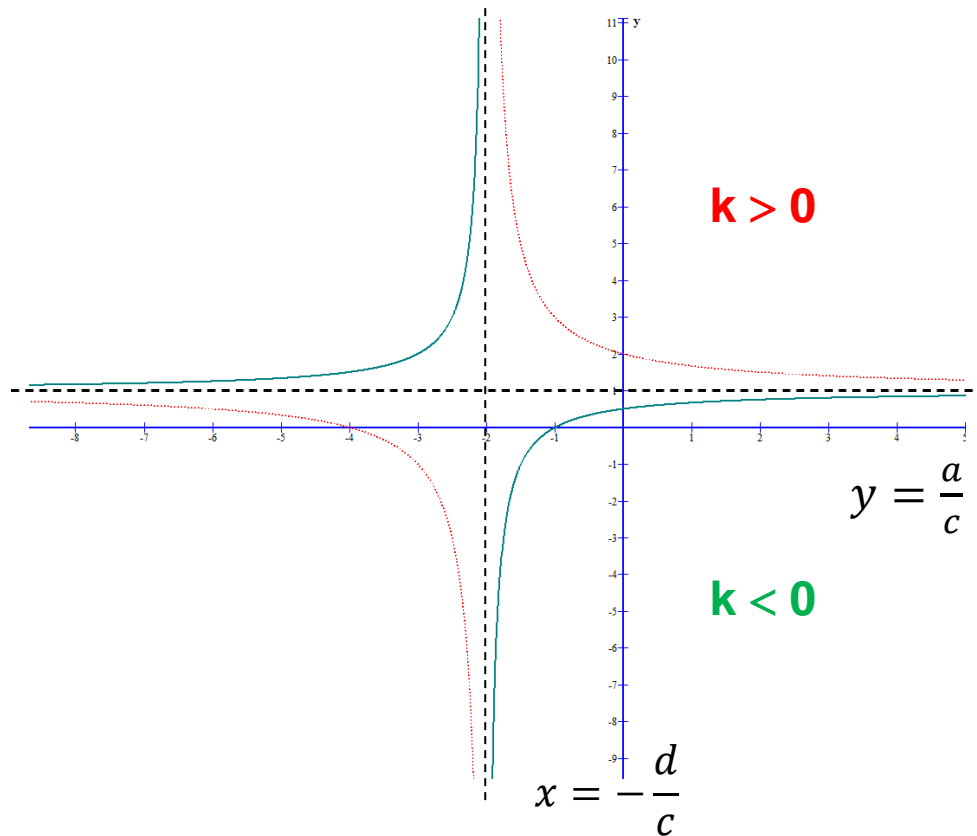
obr. 2

2. Vyberte správne tvrdenia, ktoré platia pre zelenú funkciu na obrázku 2:

- a) v jej zápise je koeficient $a > 0$,
- b) $D = 0$,
- c) koeficienty b , c v jej zápise nie sú nulové,
- d) súradnice jej vrcholu sú $(5, 2)$,
- e) vzhľadom na ružovú funkciu je koeficient a väčší ($a_z > a_r$).

Elementárne funkcie

Lomená funkcia $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $a, b, c, d \in R$



$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \rightarrow y = \frac{k}{x - m} + s$$

Asymptoty:

$$x = m = -\frac{d}{c} \quad \text{posun na osi } x$$

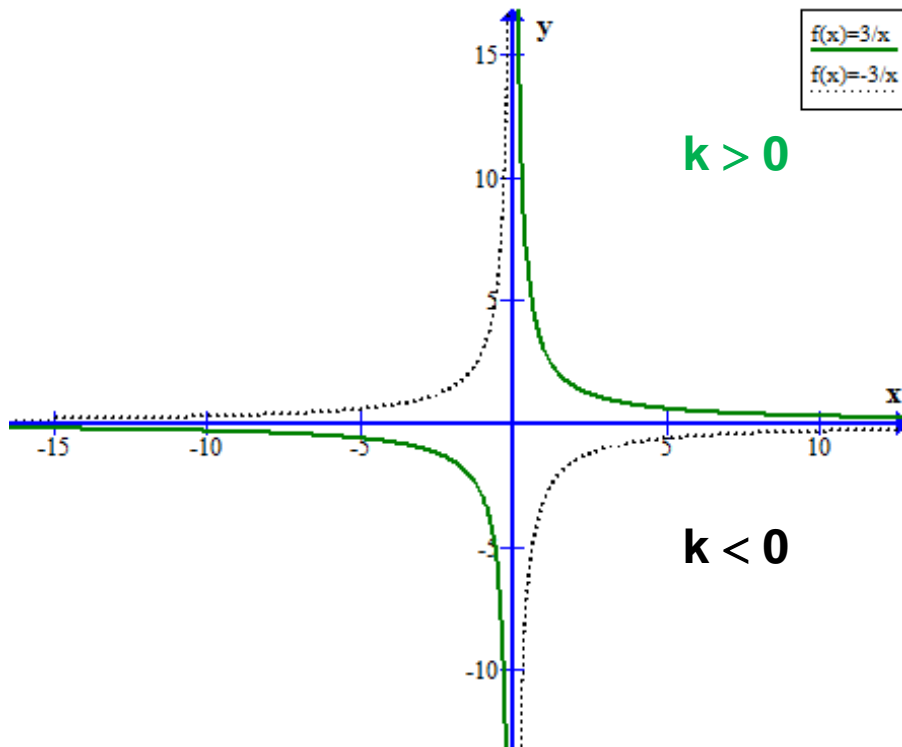
$$y = s = \frac{a}{c} \quad \text{posun na osi } y$$

Grafom je hyperbola. $D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

Elementárne funkcie

Lomená funkcia – nepriama úmernosť

$$y = \frac{k}{x} \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$



Grafom je hyperbola. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť polohu asymptót.
3. Vypočítať pre jeden zvolený bod z $D(f)$ jeho y a viesť ním rameno hyperboly.
4. Symetricky viesť druhé rameno hyperboly v protiláhlom kvadrante.

3. Načrtnite grafy funkcí:

$$\text{a) } y = \frac{-3}{x}$$

$$\text{b) } y = \frac{5}{x+1}$$

$$\text{c) } y = \frac{3-2x}{x-1}$$

$$\text{d) } y = \frac{2x}{x+1}$$

$$\text{e) } y = \frac{5}{x}$$

$$\text{f) } y = \frac{-2}{x+2}$$

$$\text{g) } y = \frac{4+x}{x+2}$$

sami, dú

$$a) y = \frac{-3}{x}$$

$$x \neq 0$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

je to graf nepriamej úmernosti $y = \frac{k}{x}$,
kde $k = -3 < 0$, hyperbola leží
v druhom a štvrtom kvadrante

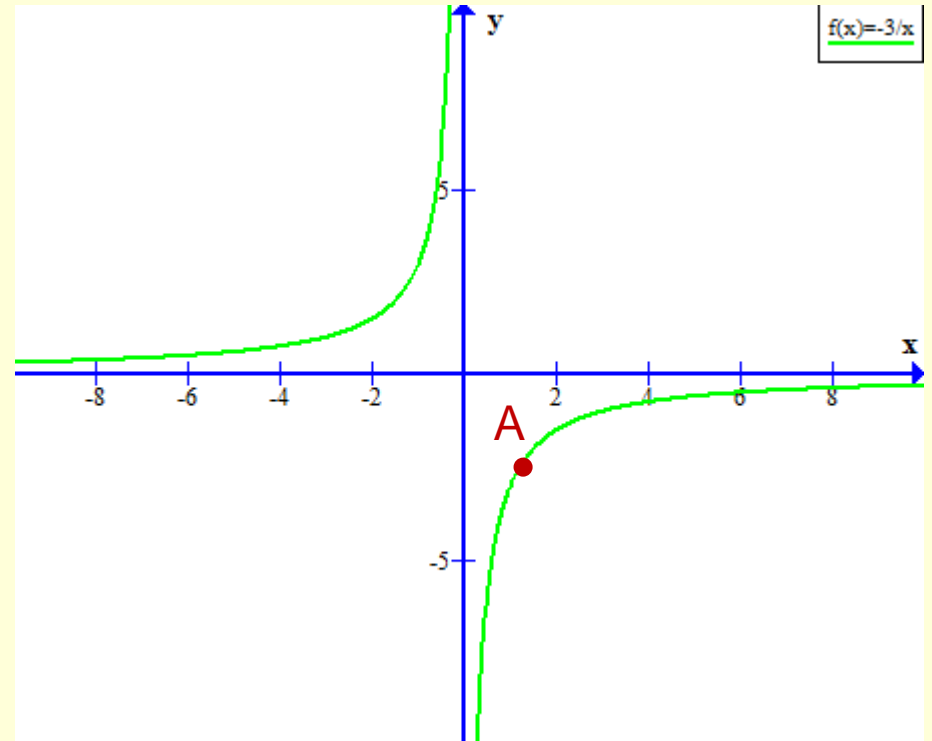
Asymptoty sú priamo os x a os y :

$$x = 0, y = 0$$

Zvolíme jeden bod z $D(f)$ a vypočítame
jeho y – ovú súradnicu:

$$A: x = 1, y = \frac{-3}{1} = -3$$

Bodom A vedieme jedno rameno hyperboly
A druhú umiestnime symetricky do protíahlého kvadrantu.



$$b) y = \frac{5}{x+1}$$

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Asymptoty: porovnaním zápisu

funkcie $y = \frac{5}{1 \cdot x + 1}$ zo všeobecným zápisom

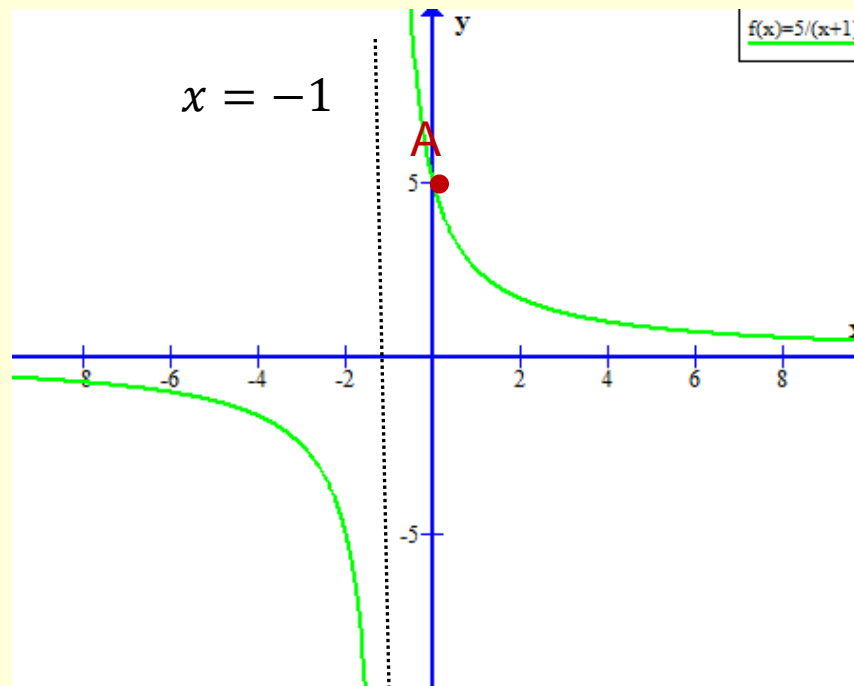
$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad a = 0, b = 5, c = 1, d = 1$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y = \frac{a}{c} = \frac{0}{1} = 0$$

Zvolíme jeden bod z $D(f)$ a vypočítame jeho y – ovú súradnicu:

$$A: x = 0, y = \frac{5}{0 + 1} = 5$$



$$c) y = \frac{3-2x}{x-1}$$

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asymptoty: porovnaním zápisu

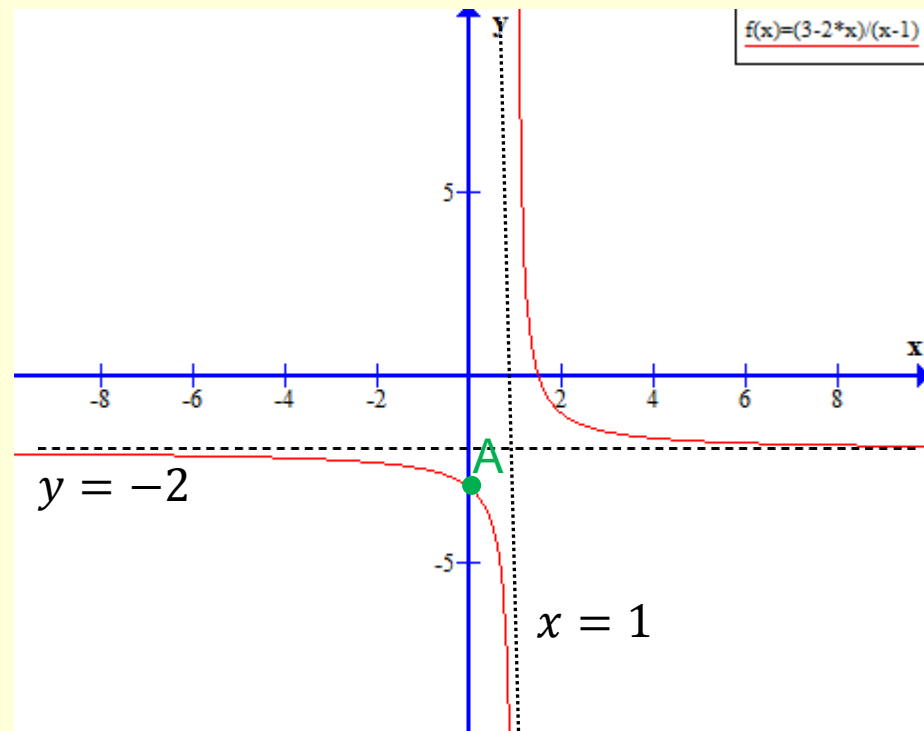
funkcie $y = \frac{3-2x}{x-1}$ zo všeobecným zápisom

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad a = -2, b = 3, c = 1, d = -1$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{a}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$A: x = 0, y = \frac{3 - 2 \cdot 0}{0 - 1} = -3$$



$$d) \quad y = \frac{2x}{x+1}$$

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

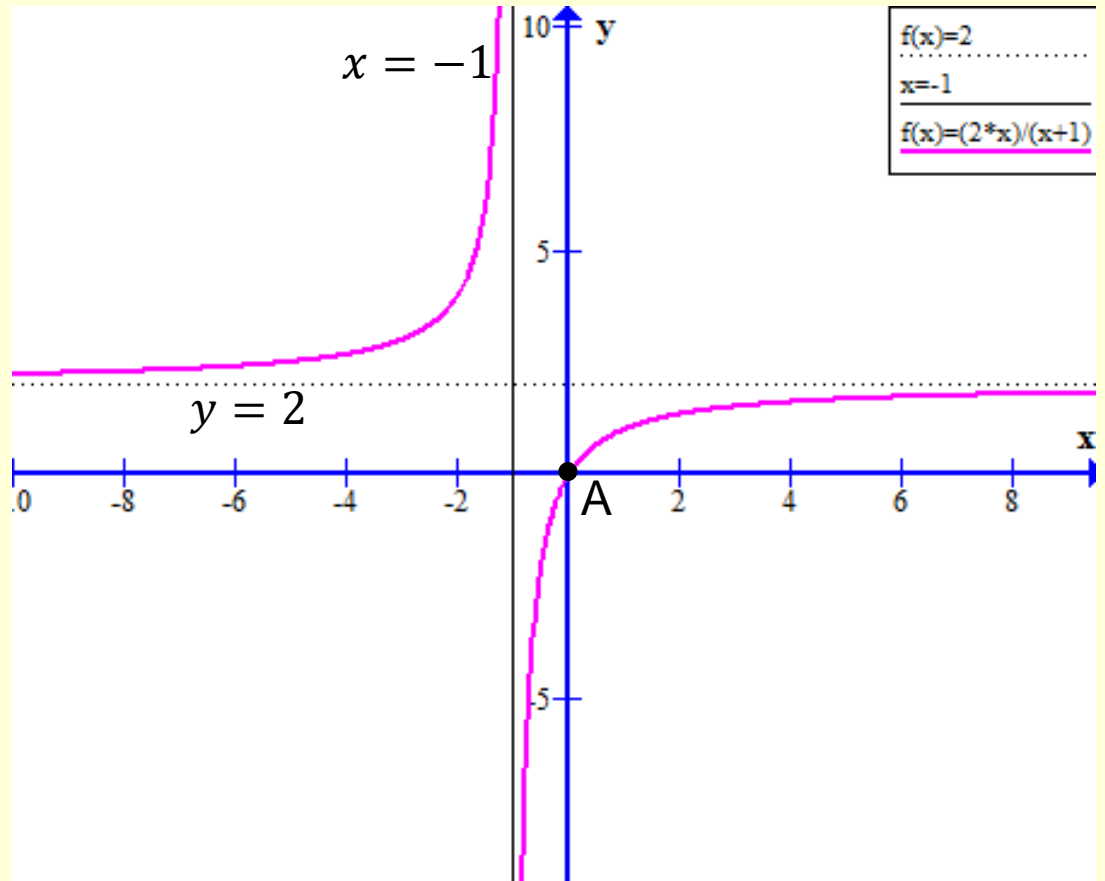
$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Asymptoty:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-1}{1} = -1$$

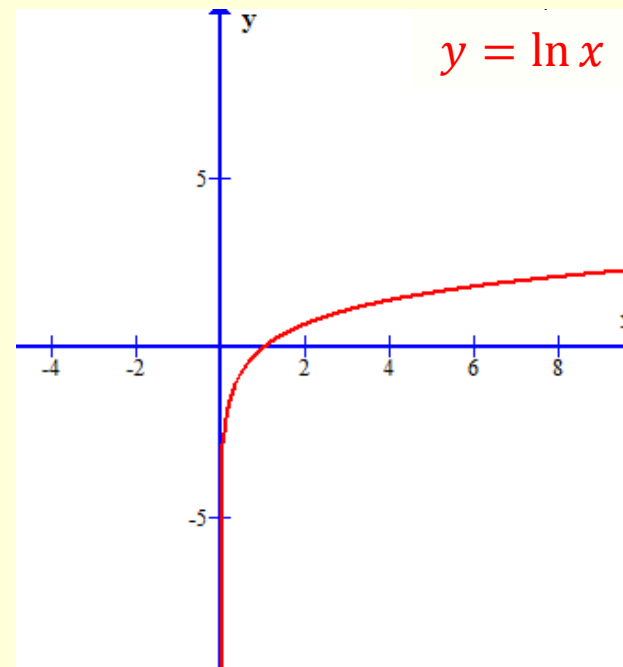
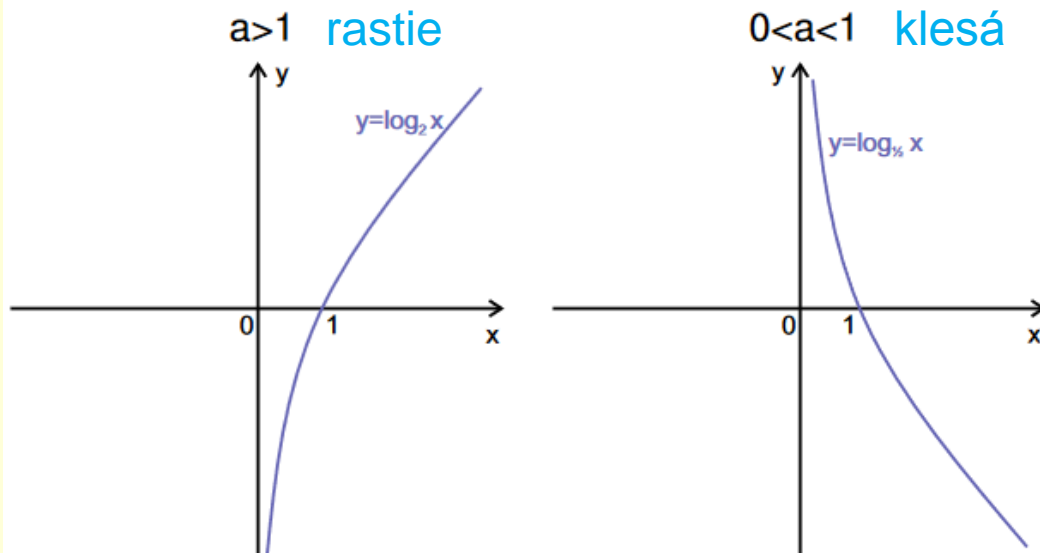
$$y = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

$$A: x = 0, y = \frac{2 \cdot 0}{0+1} = 0$$



Elementárne funkcie

Logaritmická funkcia $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$



Číslo a nazývame základ funkcie.

$$D(f) = (0, \infty)$$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

4. Načrtnite grafy funkcí:

a) $y = \log_2(x + 4)$

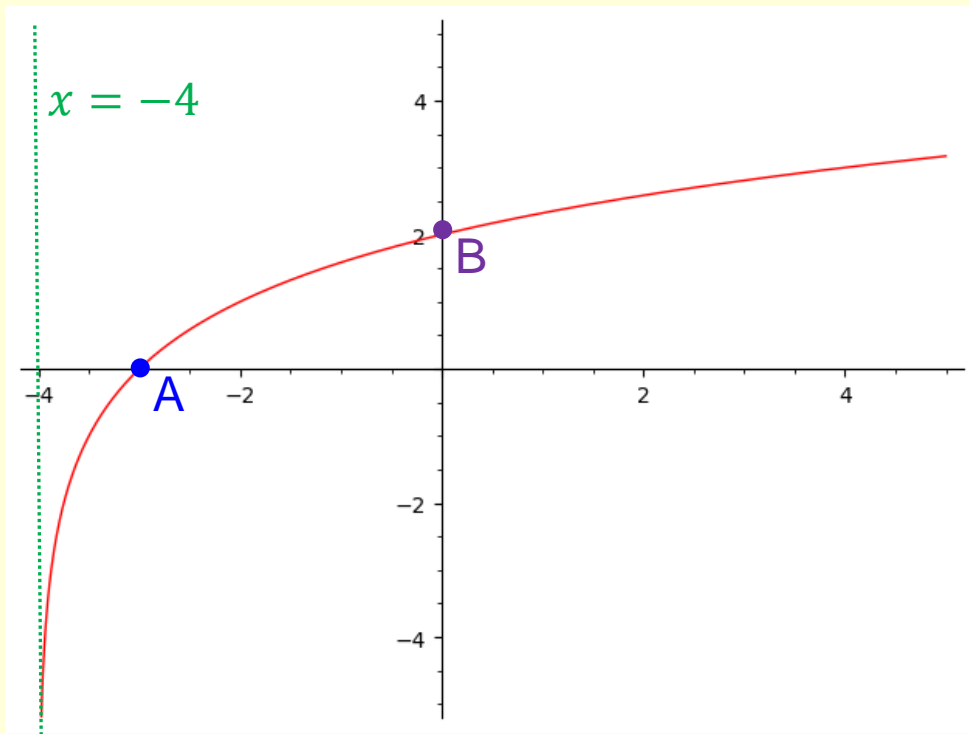
b) $y = \log_{0,5}(x + 2)$

c) $y = \log_3 x$

d) $y = \log_{0,5}(x - 1)$

sami, dú

a) $y = \log_2(x + 4)$



$$x + 4 > 0$$

$$x > -4$$

$$D(f) = (-4, \infty) \quad a = 2, \text{ rastie}$$

asymptota: $x + 4 = 0$

$$x = -4$$

priesečník s osou x: $y = 0$

$$0 = \log_2(x + 4)$$

$$2^0 = x + 4$$

$$1 = x + 4$$

$$A: x = -3, y = 0$$

priesečník s osou y: $x = 0$

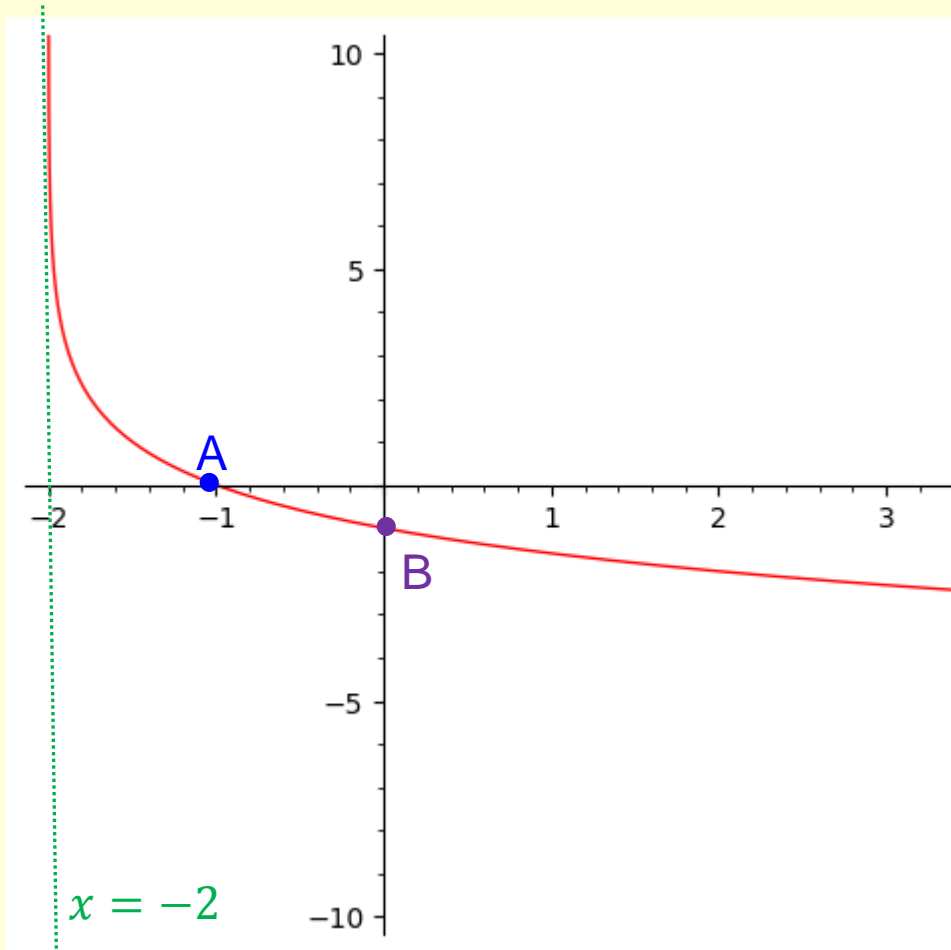
$$y = \log_2(0 + 4)$$

$$y = \log_2(4)$$

$$2^y = 4 = 2^2$$

$$B: y = 2, x = 0$$

b) $y = \log_{0,5}(x + 2)$



$$x + 2 > 0$$

$$x > -2$$

$$D(f) = (-2, \infty) \quad a = 0,5, \text{ klesá}$$

asymptota: $x + 2 = 0$
 $x = -2$

priesečník s osou x: $y = 0$

$$0 = \log_{0,5}(x + 2)$$

$$0,5^0 = x + 2$$

$$1 = x + 2$$

$$A: x = -1, y = 0$$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = \log_{0,5}(0 + 2)$$

$$y = \log_{0,5}(2)$$

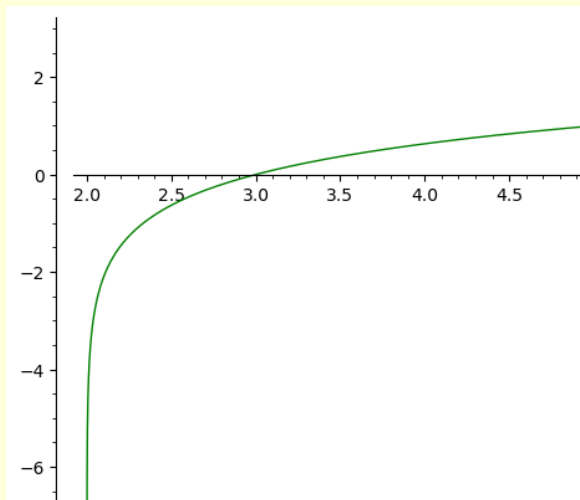
$$0,5^y = 2$$

$$B: y = -1, x = 0$$

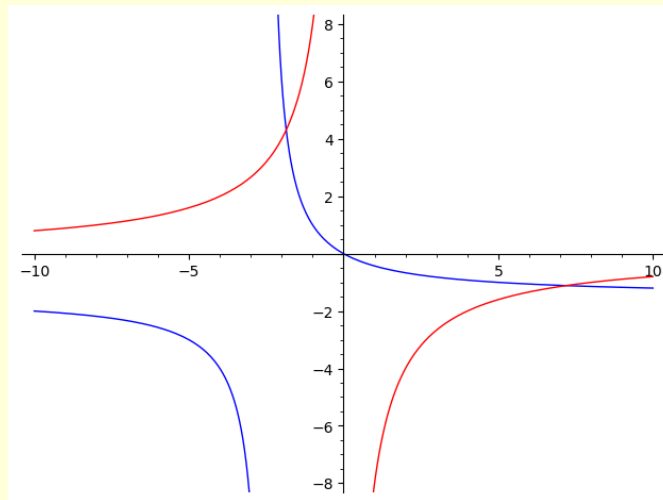
Kontrolka:

1. Vyberte, ktorý zápis funkcie zodpovedá grafu na obrázku 1.

a) $y = \log_{0,1}(x - 2)$, b) $y = \log_6(x + 1)$, c) $y = \log_3(x + 2)$, d) $y = \log_3(x - 2)$.



obr. 1



obr. 2

2. Vyberte správne tvrdenia, ktoré platia pre funkcie na obrázku 2:

a) pre modrú funkciu je asymptota $x = 0$,

b) pre červenú funkciu je asymptota $y = 0$,

c) pre modrú funkciu je $k > 0$,

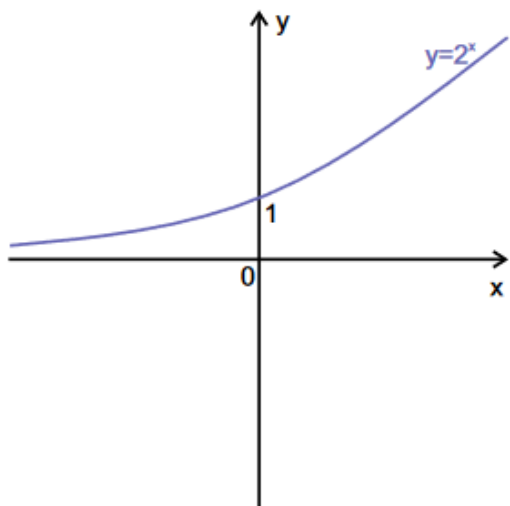
d) pre modrú funkciu $D(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$,

e) červený graf je grafom nepriamej úmernosti.

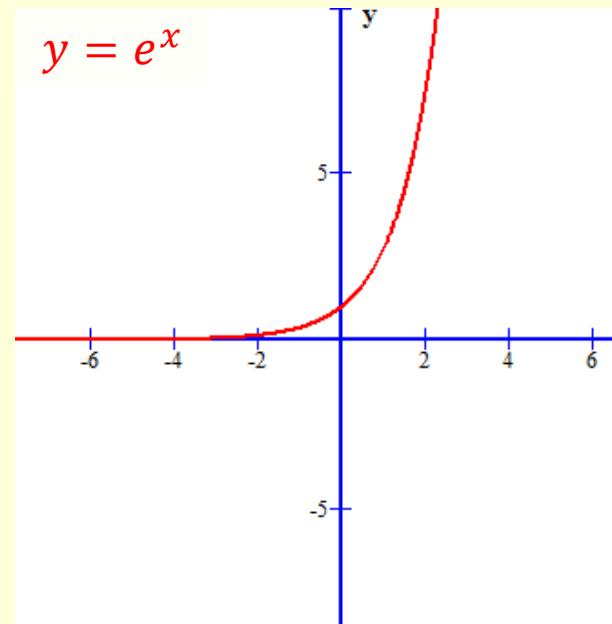
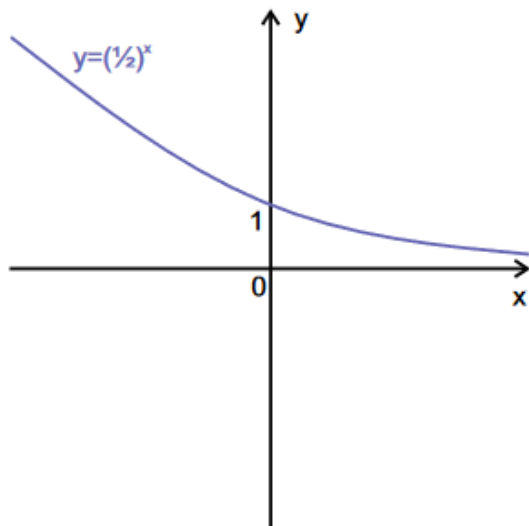
Elementárne funkcie

Exponenciálna funkcia $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$a > 1$ rastie



$0 < a < 1$ klesá



Číslo a nazývame základ funkcie.

$D(f) = \mathbb{R}$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

5. Načrtnite grafy funkcí:

a) $y = 0,2^x - 5$

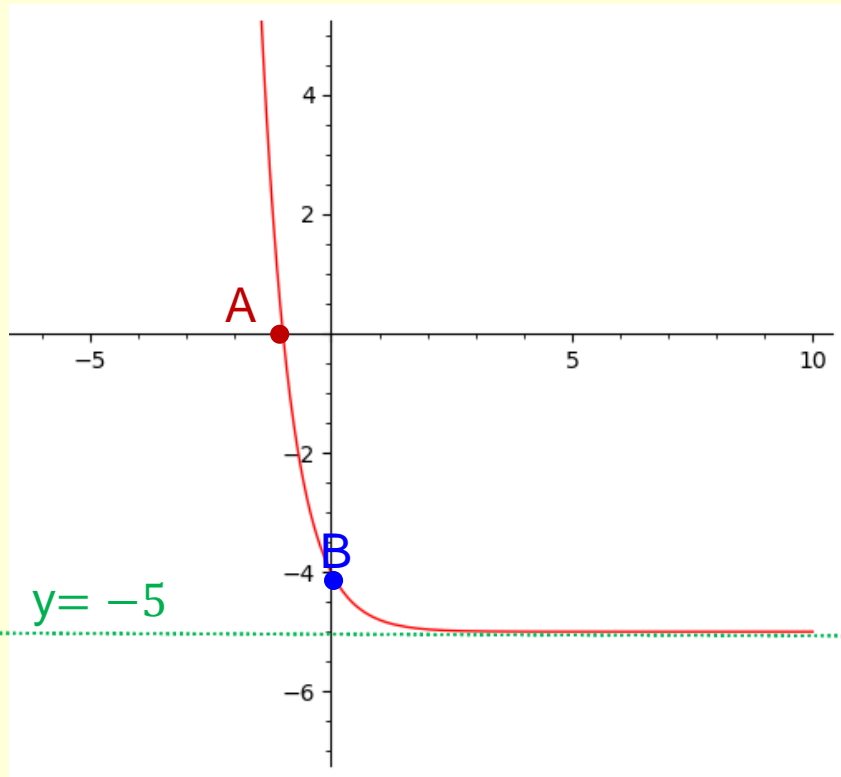
b) $y = 4^x + 2$

c) $y = 2^x - 1$

d) $y = 0,5^x$

sami, dú

a) $y = 0,2^x - 5$



$D(f) = \mathbb{R}$ $a = 0,2$, klesá

asymptota: upravíme zápis funkcie na tvar $y + 5 = 0,2^x$

Pri určovaní asymptoty

$$y + 5 = 0$$

$$y = -5$$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = 0,2^0 - 5$$

$$y = 1 - 5$$

$$B: y = -4, x = 0$$

priesečník s osou x: $y = 0$

$$0 = 0,2^x - 5$$

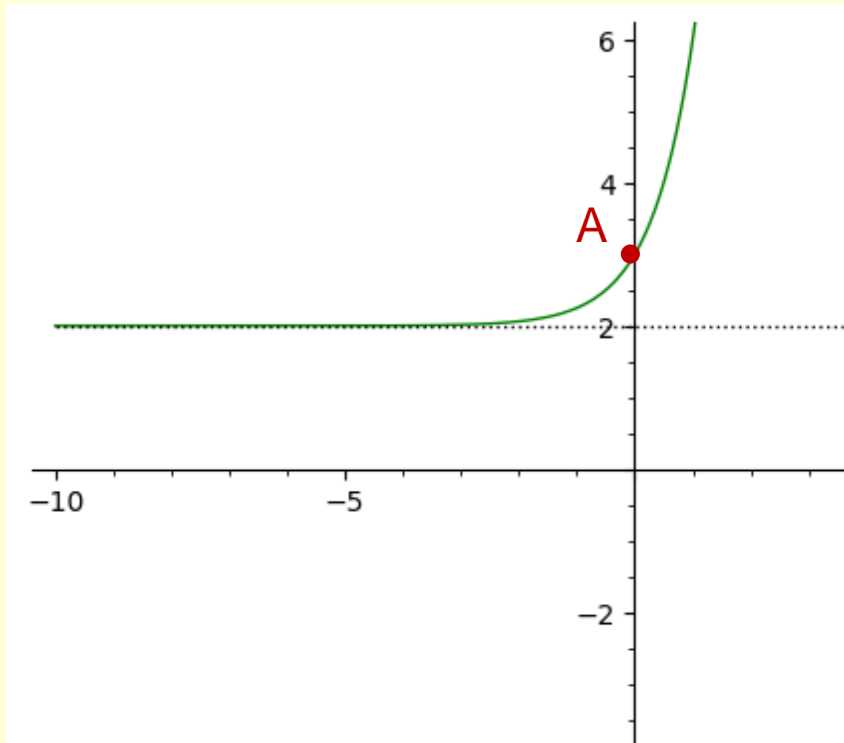
$$5 = 0,2^x$$

$$1^{-1} = 1^x$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$A: y = 0, x = -1$$

b) $y = 4^x + 2$



$D(f) = \mathbb{R}$ $a = 4$, rastie

asymptota: $y - 2 = 0$
 $y = 2$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = 4^0 + 2$$

$$y = 1 + 2$$

A: $y = 3, x = 0$

priesečník s osou x: nemá

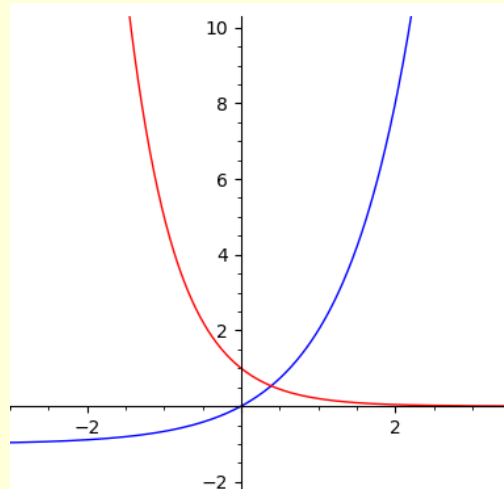
ak $y = 0$, potom rovnica

$$0 = 4^x + 2 \text{ nemá riešenie}$$

Kontrolka:

Vyberte správne tvrdenia, ktoré platia pre funkcie na obrázku 1:

- a) pre červenú je $a > 0$,
- b) pre modrú je asymptota $y = 1$,
- c) $D(f)$ červenej je \mathbb{R} ,
- d) červená má prienik s osou x v bode $(0, 0)$,
- e) vzhľadom na červenú funkciu je modrá funkcia posunutá v smere osi x .



obr. 1