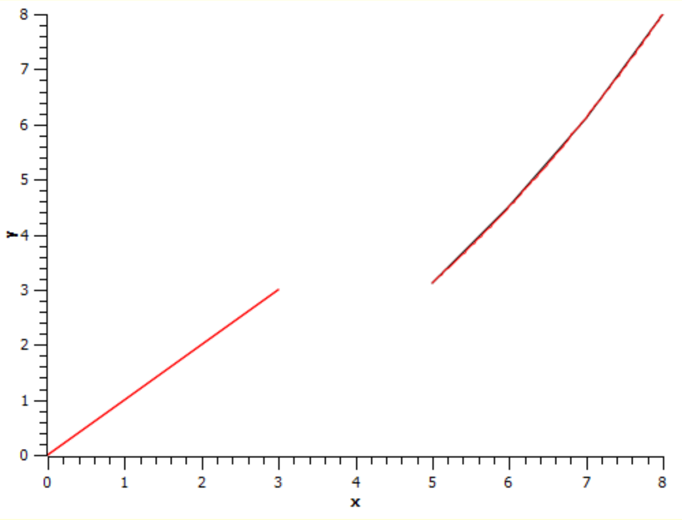
Matematika I – 2.cvičenie

Funkcia
Definičný obor funkcie

Definícia: Nech $A, B \subset R$ sú dve neprázdne množiny a f je pravidlo (predpis), ktoré každému $x \in A$ priraďuje práve jeden prvok $f(x) \in B$. Potom hovoríme, že f je funkcia, ktorá zobrazuje množinu A do množiny B.
Píšeme $f : A \to B$

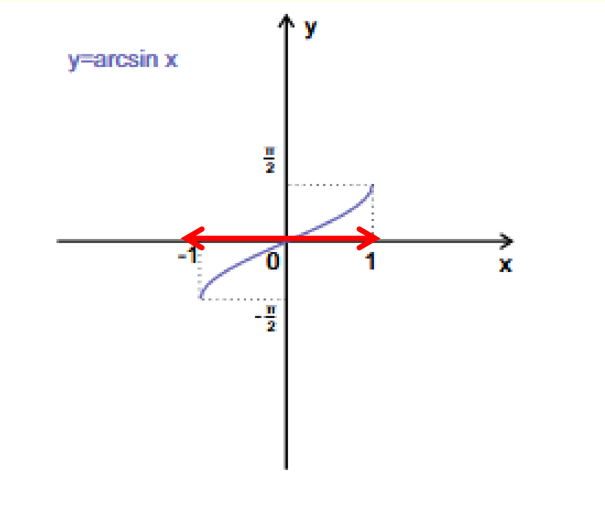
definičný obor funkcie f : $D(f) = A$
obor hodnôt funkcie f : $H(f) = \{f(x) : x \in A\}$

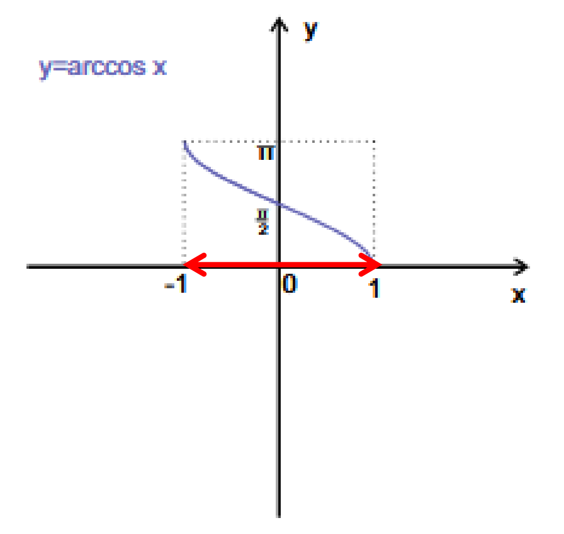


funkcia nie je definovaná na intervale $(3,5)$
$D(f) = \langle 0, 3\rangle \cup \langle 5, \infty)$

Podmienky určovania D(f)

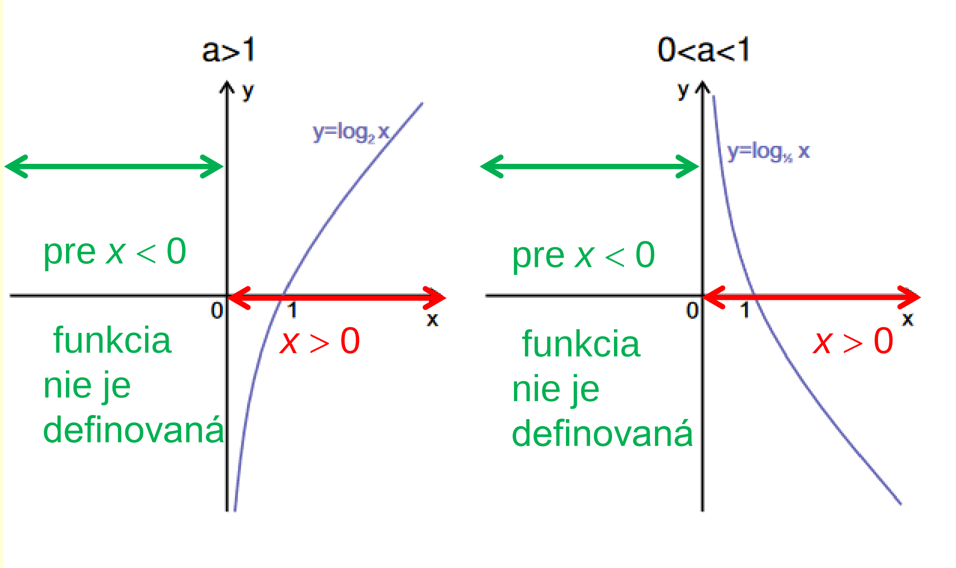
- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule $\frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný $\sqrt[2n]{x} \rightarrow x \geq 0$
- funkcie $y = \arcsin x, y = \arccos x$ sú definované pre $\mathbf{-1 \leq x \leq 1}$



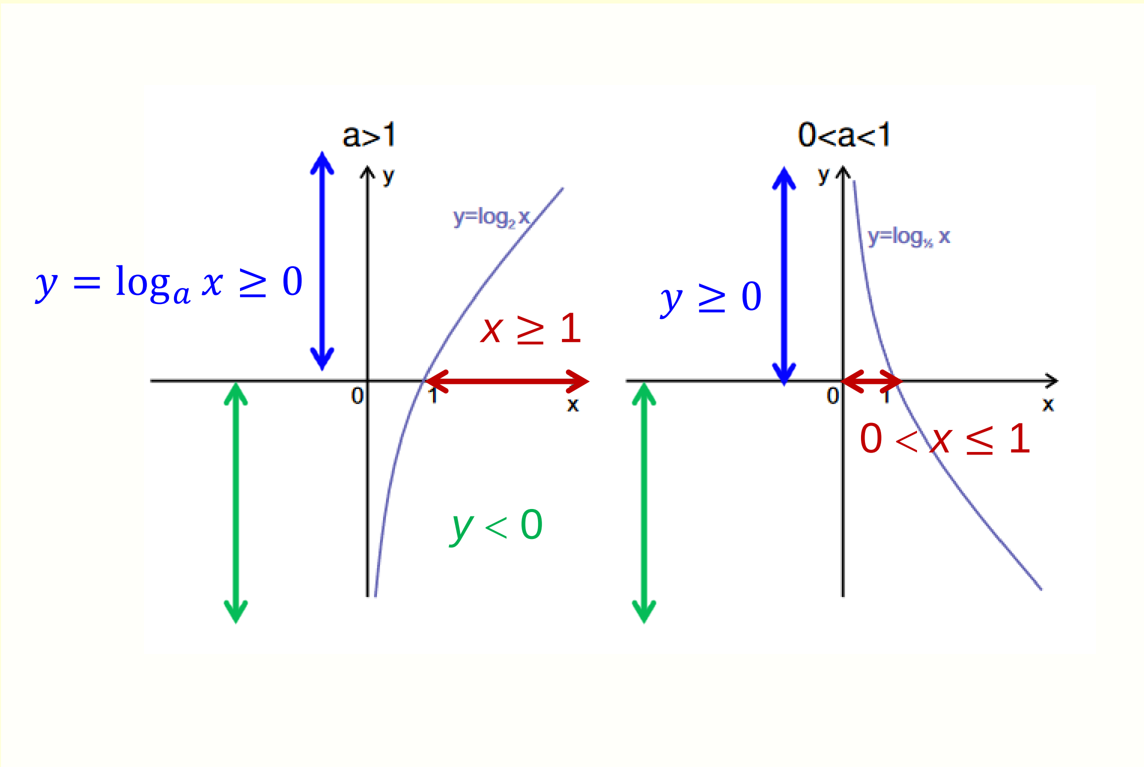


- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument

$$\log_a x \rightarrow x > 0$$
$$\ln x \rightarrow x > 0$$



ak $a > 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $x \geq 1$
ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $0 < x \leq 1$



Pr. 1 – 7 / 13 $f: y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}}$

z podmienky pre odmocninu $\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geq 0$

z podmienky pre zlomok $x^2-5x+6 \neq 0$

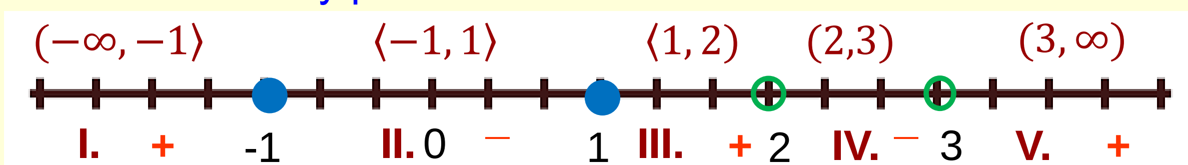
$$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geq 0 \wedge x^2-5x+6 \neq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-2)} \geq 0$$

Intervalová metóda : 1. určíme nulové body (NB)

$x-3=0,\ x-2=0,\ x-1=0,\ x+1=0$ NB: -1;1;2;3

2. Rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. Na každom intervale určíme znamienko výrazu – zvolíme ľubovoľné číslo z daného intervalu, dosadíme do zátvoriek za *x* a zistíme výsledné znamienko na danom intervale, ktoré zapíšeme pod interval

I. interval, x = - 2, $\dfrac{-.-}{-.-}, = +$ **II. interval, x = 0,** $\dfrac{-.+}{-.-}, = -$ **III. interval, x = 1,5,** $\dfrac{+.+}{-.-}, = +$

IV. interval, x = 2,5, $\dfrac{+.+}{-.+}, = -$ **V. interval, x = 4,** $\dfrac{+.+}{+.+}, = +$

Výsledkom sú intervaly, kde bude súčin zátvoriek ≥ 0, teda kde je výsledné znamienko +

$$D(f) = (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,2) \cup (3,\infty)$$

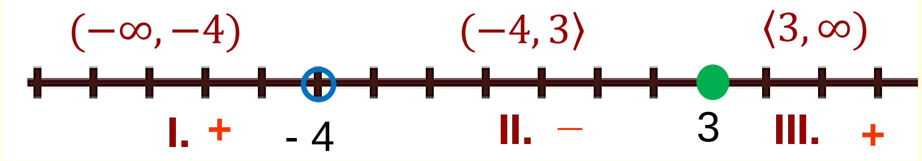
Pr. 2 – 7 / 11 sami $f : y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}}$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{z podmienky pre odmocninu} \quad \dfrac{x-3}{x+4} \geq 0 \\ \\ \textit{z podmienky pre zlomok} \quad x+4 \neq 0 \end{array}\right\} \quad \frac{x-3}{x+4} \geq 0 \wedge \quad x+4 \neq 0$$

1. určíme nulové body (NB)

$x \ - 3 = 0, \ \ x + 4 = 0$ NB: - 4; 3

2. Rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. Na každom intervale určíme znamienko výrazu

I. interval, x = - 5, $\frac{-}{-} = +$ **II. interval, x = 0,** $\frac{-}{+} = -$ **III. interval, x = 4,** $\frac{+}{+} = +$

Výsledkom sú intervaly, kde bude súčin zátvoriek ≥ 0, teda kde je výsledné znamienko +

$$D(f) = (-\infty, -4) \cup \langle 3, \infty)$$

Pr. 3 – 7 / 16 $f : y = \ln(x^2 + 4x)$

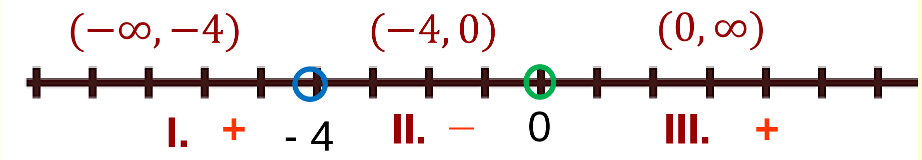
z podmienky pre logaritmus $x^2 + 4x > 0$

$$x(x+4) > 0$$

1. určíme nulové body (NB)

$x \ = 0, \ x + 4 = 0$ NB: - 4; 0

2. Rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. Na každom intervale určíme znamienko výrazu – zvolíme ľubovoľné číslo z daného intervalu, dosadíme do zátvoriek za *x* a zistíme výsledné znamienko na danom intervale, ktoré zapíšeme pod interval

I. interval, x = - 5, $-.- = +$ **II. interval, x = - 1**, $-.+ = -$ **III. interval, x = 1**, $+.+ = +$

Výsledkom sú intervaly, kde bude súčin zátvoriek > 0, teda kde je výsledné znamienko +

$$D(f) = (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$$

Pr. 4 – 7 / 17

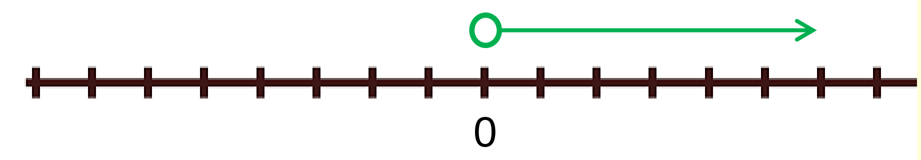
$$f : y = \log \frac{1}{x-1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{z podmienky pre logaritmus} & \dfrac{1}{x-1} > 0 \\ \textit{z podmienky pre zlomok} & x - 1 \neq 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{x-1} > 0$$

$$1 > 0 \qquad x - 1 > 0$$

$$x > 1$$



$$D(f) = (1, \infty)$$

Pr. 5 – 7 / 21 $f: y = \log_4 \sqrt{x^2 - x - 2}$

z podmienky pre logaritmus $\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$

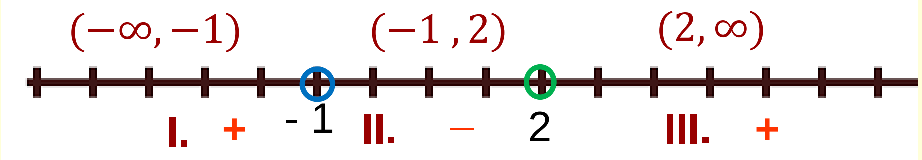
z podmienky pre odmocninu $x^2 - x - 2 \geq 0$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$(x - 2)(x + 1) > 0$$

1. určíme nulové body (NB) $x - 2 = 0,\ x + 1 = 0$ NB: - 1; 2

2. Rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. Na každom intervale určíme znamienko výrazu

I. interval, x = - 2, $-.- = +$ **II. interval, x = 0**, $-.+ = -$ **III. interval, x = 3**, $+.+ = +$

Výsledkom sú intervaly, kde bude súčin zátvoriek > 0, teda kde je výsledné znamienko +

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$$

Pr. 6 – 7 / 24 $f: y=\sqrt{\log_2 \frac{3x}{x-3}}$

$z\ podmienky\ pre\ odmocninu \quad \log_2 \frac{3x}{x-3} \geq 0$

$z\ podmienky\ pre\ logaritmus \ \ (a>0), \frac{3x}{x-3} \geq 1$

$z\ podmienky\ pre\ zlomok \quad x-3 \neq 0$

$\frac{3x}{x-3} \geq 1 \quad \wedge \ x-3 \neq 0$

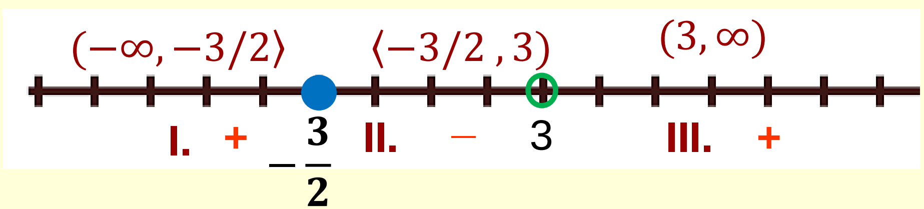
$\frac{3x}{x-3} - 1 \geq 0 \quad \wedge \ x \neq 3$

$\frac{3x-x+3}{x-3} \geq 0$

$\frac{2x+3}{x-3} \geq 0$

1. určíme nulové body (NB) $2x+3=0, \ x-3=0$ NB: $-\frac{3}{2}$; 3

2. Rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. Na každom intervale určíme znamienko výrazu

I. interval, x = - 2, $\frac{-}{-} = +$ **II. interval, x = 0,** $\frac{+}{-} = -$ **III. interval, x = 4,** $\frac{+}{+} = +$

Výsledkom sú intervaly, kde bude súčin zátvoriek ≥ 0, teda kde je výsledné znamienko +

$D(f) = (-\infty, -3/2\rangle \cup (3, \infty)$

Pr. 7 – 6 / riešený 6 - sami $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)}$

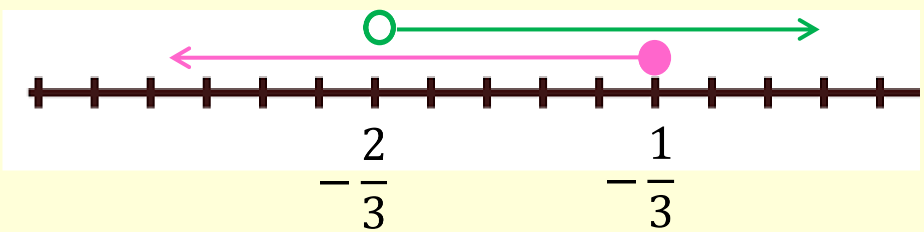
z podmienky pre odmocninu $\log_{\frac{1}{2}}(3x+2) \geq 0$

z podmienky pre logaritmus $(0 < a < 1), 0 < 3x + 2 \leq 1$

$$0 < 3x + 2 \leq 1$$

$$0 < 3x + 2 \wedge 3x + 2 \leq 1$$

$$\frac{-2}{3} < x \wedge x \leq \frac{-1}{3}$$



$$D(f) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\rangle$$

Kontrolka: Vyberte, ktorá z daných funkcií má definičný obor $\mathrm{D(f)} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

a) $y = \sqrt[4]{x+2}$, b) $y = \log_{0,5} x$, c) $y = \sqrt[5]{\frac{1}{x}}$.

Pr. 8 – $f: \; y = \arcsin \frac{1-2x}{4x}$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{z podmienky pre arcsinus} \quad -1 \leq \dfrac{1-2x}{4x} \leq 1 \\ \\ \textit{z podmienky pre zlomok} \quad 4x \neq 0 \end{array}\right\} \quad -1 \leq \frac{1-2x}{4x} \leq 1 \quad \wedge \; 4x \neq 0$$

$$-1 \leq \frac{1-2x}{4x} \quad \wedge \quad \frac{1-2x}{4x} \leq 1 \quad \wedge \; x \neq 0$$

$$0 \leq \frac{1-2x}{4x} + 1 \quad \wedge \quad \frac{1-2x}{4x} - 1 \leq 0$$

$$0 \leq \frac{1-2x+4x}{4x} \quad \wedge \quad \frac{1-2x-4x}{4x} \leq 0$$

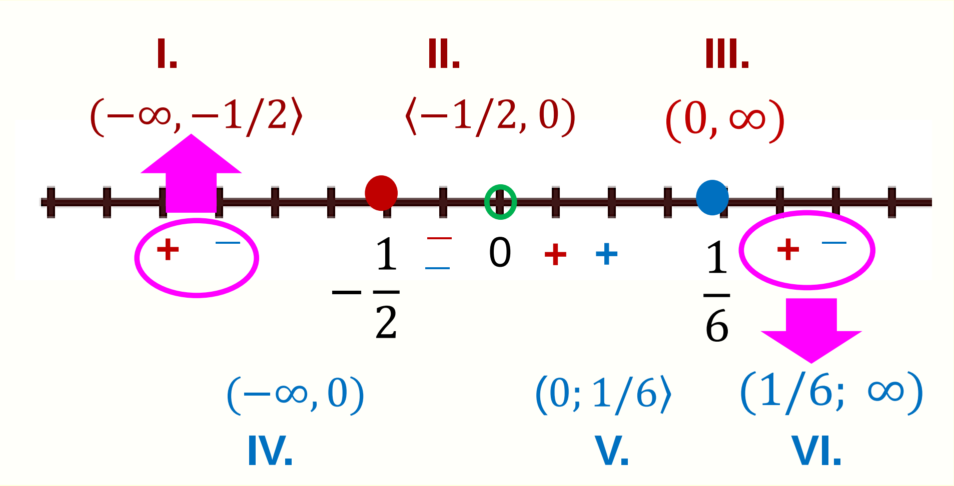
$$0 \leq \frac{1+2x}{4x} \quad \wedge \quad \frac{1-6x}{4x} \leq 0 \quad \wedge \; x \neq 0$$

$2x + 1 = 0, \;\; 4x = 0$ NB: $-\frac{1}{2}; \, 0$

$1 - 6x = 0, \;\; 4x = 0$ NB: $\frac{1}{6}; \, 0$

$$pre \;\; 0 \leq \frac{1+2x}{4x}$$

I. interval, x = - 1, $\frac{-}{-} = +$ **II. interval, x =** $\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}$, $\frac{+}{-} = -$ **III. interval, x = 4**, $\frac{+}{+} = +$



$$pre \; \frac{1-2x}{4x} \leq 1$$

IV. interval, x = - 1, $\frac{+}{-} = -$ **V. interval, x =** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$, $\frac{+}{+} = +$ **VI. interval, x = 1**, $\frac{-}{+} = -$

Musia platiť súčasne podmienky: $0 \leq \frac{1+2x}{4x} \wedge \frac{1-6x}{4x} \leq 0 \wedge x \neq 0$ vyberáme intervaly ,
na ktorých je súčasne + a - , teda I. a VI. interval

$$D(f) = (-\infty, -1/2\rangle \cup \langle 1/6, \infty)$$

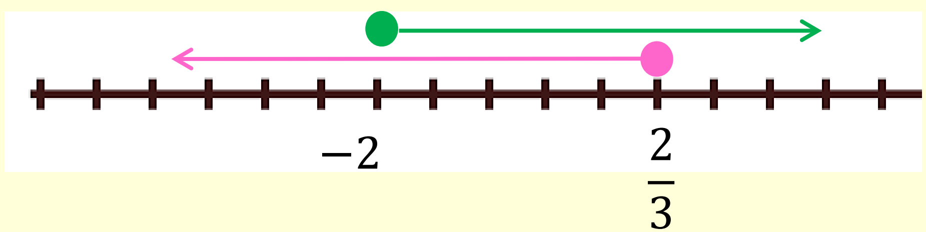
Pr. 9 - 38 - sami

$$f : y = \arccos\frac{3x+2}{4}$$

z podmienky pre arccosinus $-1 \leq \dfrac{3x+2}{4} \leq 1 \quad \rightarrow \quad -4 \leq 3x+2 \leq 4$

$$-4 \leq 3x+2 \wedge \; 3x+2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \quad \wedge \quad x \leq \frac{2}{3}$$



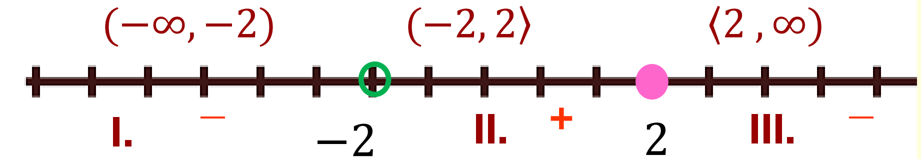
$$D(f) = \left\langle -2, \frac{2}{3} \right\rangle$$

Pr. 10 – 47 $f: y = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+2}} + \sqrt{4-x^2}$

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{z podmienky pre zlomok} & x+2 \neq 0 \\ \textit{z podmienky pre odmocninu} & 4-x^2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 4-x^2 \geq 0 \ \wedge \ \ x+2 \neq 0 \\ (2-x)(2+x) \geq 0 \ \wedge \ \ x \neq -2 \end{array}$$

1. určíme nulové body (NB) $2-x=0, \ 2+x=0$ NB: -2; 2

2. Rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. Na každom intervale určíme znamienko výrazu

I. interval, x = - 3, $-.+=-$ **II. interval, x = 0**, $+.+=+$ **III. interval, x = 3**, $-.+=-$

$$D(f) = (-2, 2\rangle$$

Pr. 10 – 47

$$f: y=\sqrt[3]{\frac{x-3}{x+2}}+\sqrt{4-x^2}$$

Pr. 11 - 44 - sami

$$f: y=\sqrt{x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2x-5}}+\ln(2x-3)$$

$$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)$$

Pr. 11 - 44 - sami $f: y = \sqrt{x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2x-5}} + \ln(2x-3)$

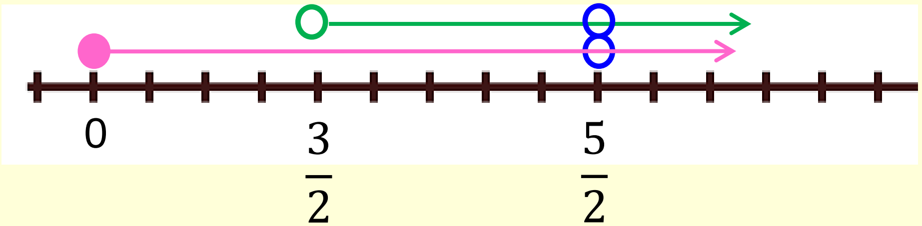
$z\ podmienky\ pre\ odmocninu\ \ x \geq 0$

$z\ podmienky\ pre\ zlomok\ \ 2x - 5 \neq 0$

$z\ podmienky\ pre\ logaritmus\ \ 2x - 3 > 0$

$x \geq 0 \ \wedge\ 2x - 3 > 0 \ \wedge 2x - 5 \neq 0$

$x \geq 0 \ \wedge\ x > \frac{3}{2} \ \ \wedge x \neq \frac{5}{2}$



$D(f) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$

Testík: Vyberte správne tvrdenia o definičnom obore funkcie.

1. Funkcia $y = \frac{2}{x}$ nie je definovaná pre
   a) $x = 0$,
   b) $x = 2$,
   c) $x = 4$.

2. Funkcia y = ln(x + 2) je definovaná, ak výraz
   a) $x + 2 = 0$,
   b) $x + 2 < 0$,
   c) $x + 2 > 0$.

3. Funkcia $\mathrm{y} = \sqrt[3]{x+1}$ nie je definovaná, ak výraz
   a) $x + 1 \geq 0$,
   b) $x + 1 < 0$,
   c) ani jedna z možnosti nie je správna.

4. Podmienky pre určenie definičného oboru funkcie $-1 \ll \frac{4x}{x+1} \leq 1 \ \wedge \quad x + 1 \neq 0$
   platia pre funkciu
   a) $y = \log_2 \frac{4x}{x+1}$, b) $y = \ln(x+1)$, c) $y = \text{arcos}\ \frac{4}{x+1}$, d) $y = \text{arsin}\ \frac{4x}{x+1}$.

Dú: str. 6 - 9 / 12, 14, 19, 20, 22, 25, 26, 37, 39, 45, 46, 48, 49, 54, 55, 56, 58

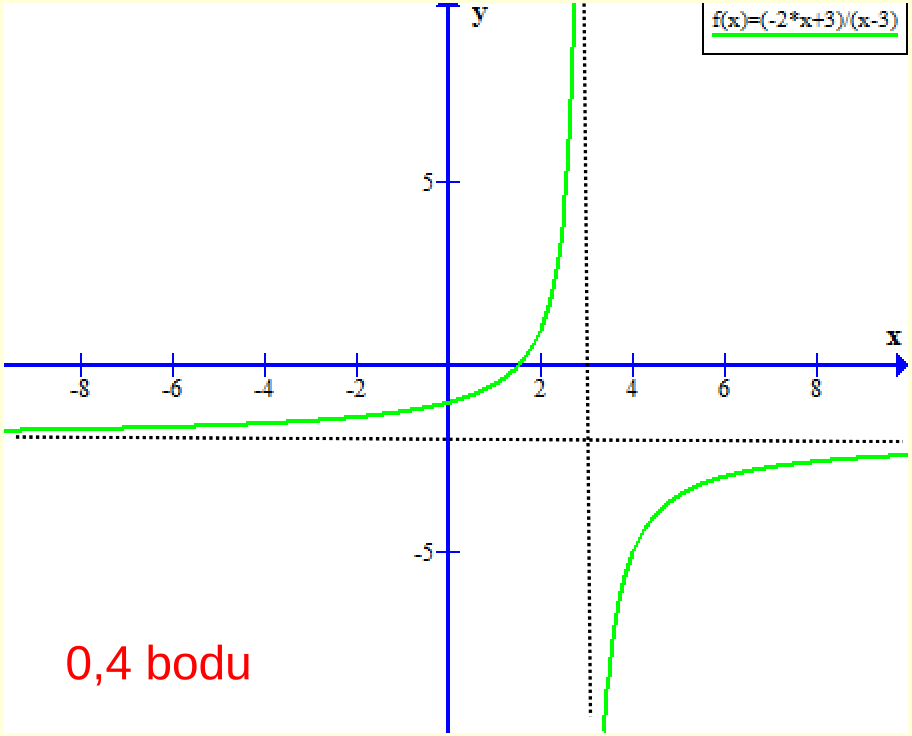
1. Malá písomka

Skupina A: načrtnite graf funkcie $y = \frac{-2x+3}{x-3}$.

Skupina B: načrtnite graf funkcie $y = x^2 - 2x - 3$.

Skupina C: (online)

Skupina A



0,4 bodu

$$y = \frac{-2x+3}{x-3}$$

$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

D(f) = R -{3} 0,2 bodu

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad a = -2, b = 3, c = 1, d = -3$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{3}{1} = 3$$

0,3 bodu

$$y = \frac{a}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

A: $x = 0, y = \frac{0+3}{0-3} = -1$ 0,1 bodu

Skupina B

$y = x^2 - 2x - 3$

D(f) = R

0,1 bodu

vrchol:

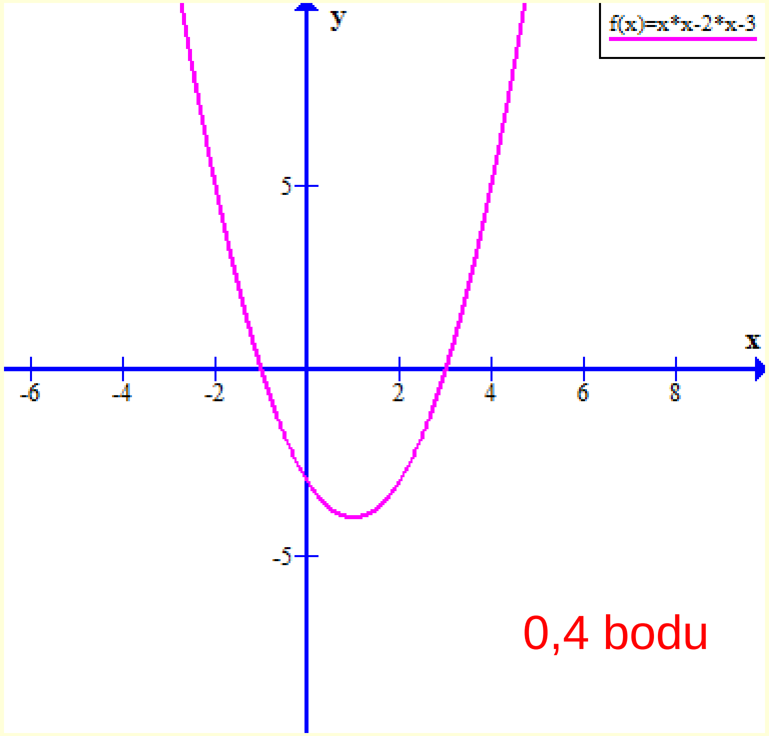
$y = x^2 - 2x - 3$

$y = (x-1)^2 - 3 - 1$

$y = (x-1)^2 - 4$

V (1,- 4)

0,2 bodu



priesečník s osou y:

$x = 0$

$y = 0^2 - 2.0 - 3$

$y = -3$

0,1 bodu

x = 0, y = -3

0,4 bodu

priesečníky s osou x:

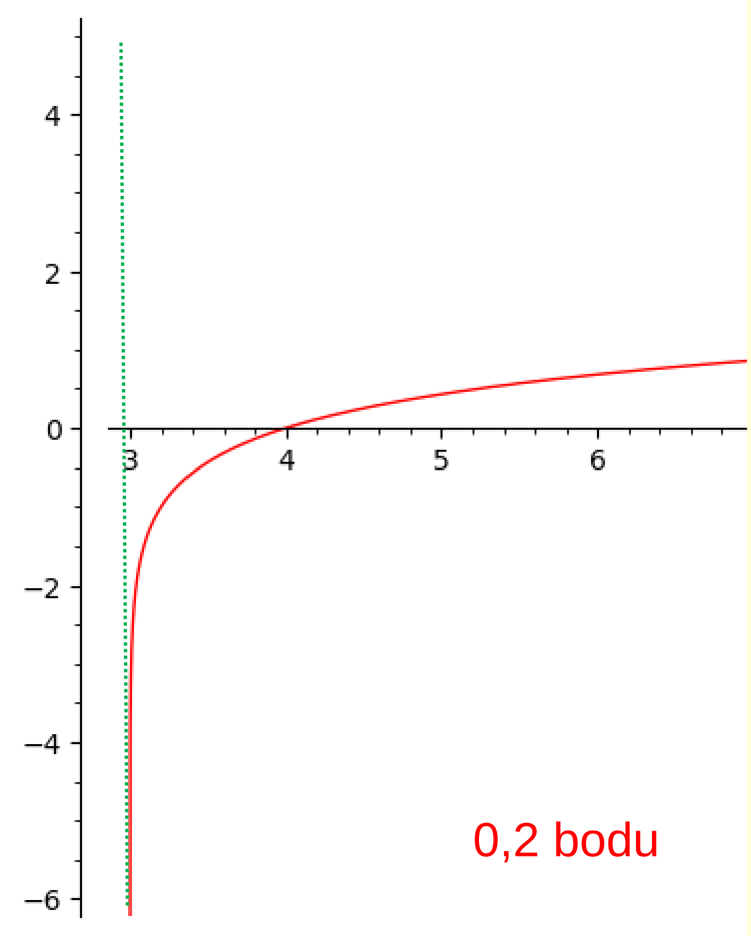
$y = 0$

$D = 4 - 4.1.(-3) = 16$

$x_1 = \frac{2+4}{2.1} = 3 \quad x_2 = \frac{2-4}{2.1} = -1$

0,2 bodu

Skupina C - online



$y = \log_5(x-3)$

$x - 3 > 0$

$x > 3$

D(f) = (3,∞)   a = 5, rastie

asymptota: $x - 3 = 0$ 0,1 bodu

$x = 3$

priesečník s osou x: $y = 0$

$0 = \log_5(x-3)$

$5^0 = x - 3$

$1 = x - 3$

A: $x = 4$, $y = 0$ 0,1 bodu

priesečník s osou y: $x = 0$

$y = \log_5(0-3)$

nemá, nedefinované   0,1 bodu

pre záporné x