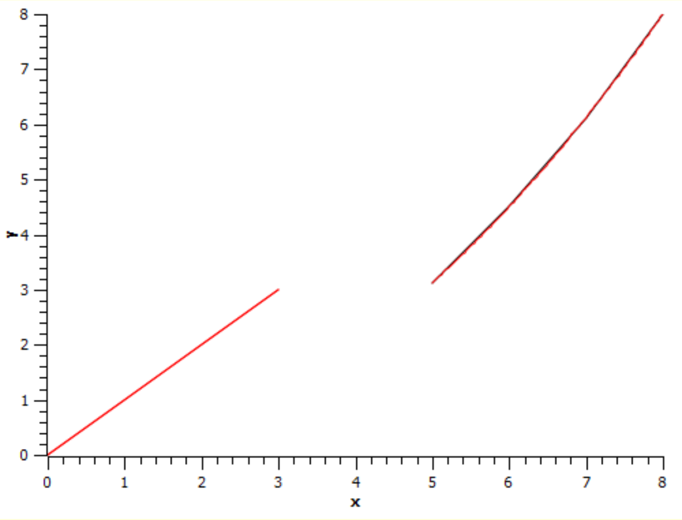
Matematika I – 2.cvičenie

Funkcia
Definičný obor funkcie

Definícia: Nech $A, B \subset R$ sú dve neprázdne množiny a f je pravidlo (predpis), ktoré každému $x \in A$ priraďuje práve jeden prvok $f(x) \in B$. Potom hovoríme, že f je funkcia, ktorá zobrazuje množinu A do množiny B.
Píšeme $f : A \to B$

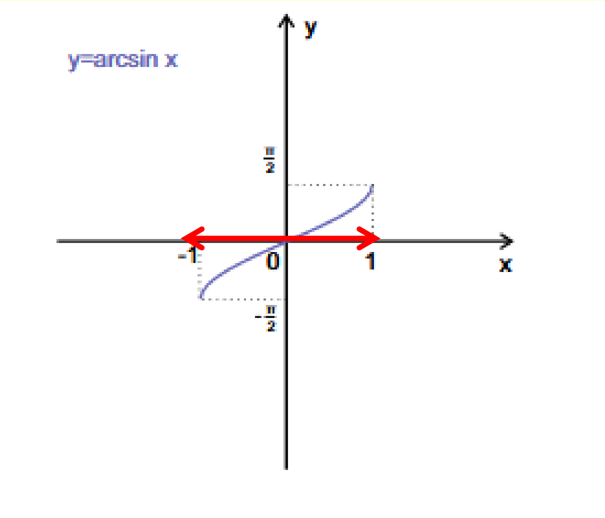
definičný obor funkcie f : $D(f) = A$
obor hodnôt funkcie f : $H(f) = \{f(x) : x \in A\}$

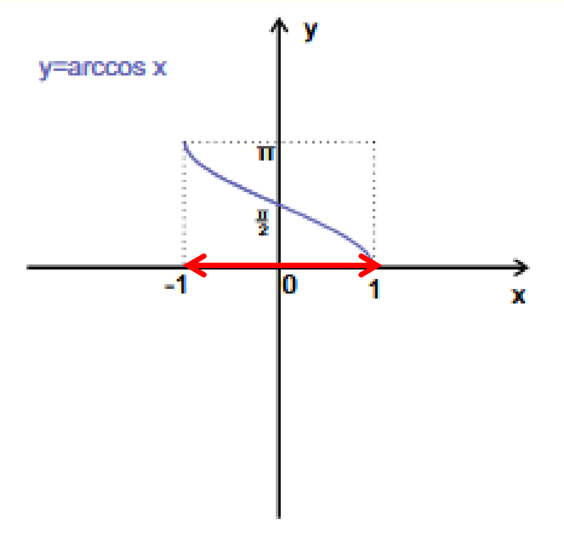


funkcia nie je definovaná na intervale $(3,5)$
$D(f) = \langle 0, 3\rangle \cup \langle 5, \infty)$

Podmienky určovania D(f)

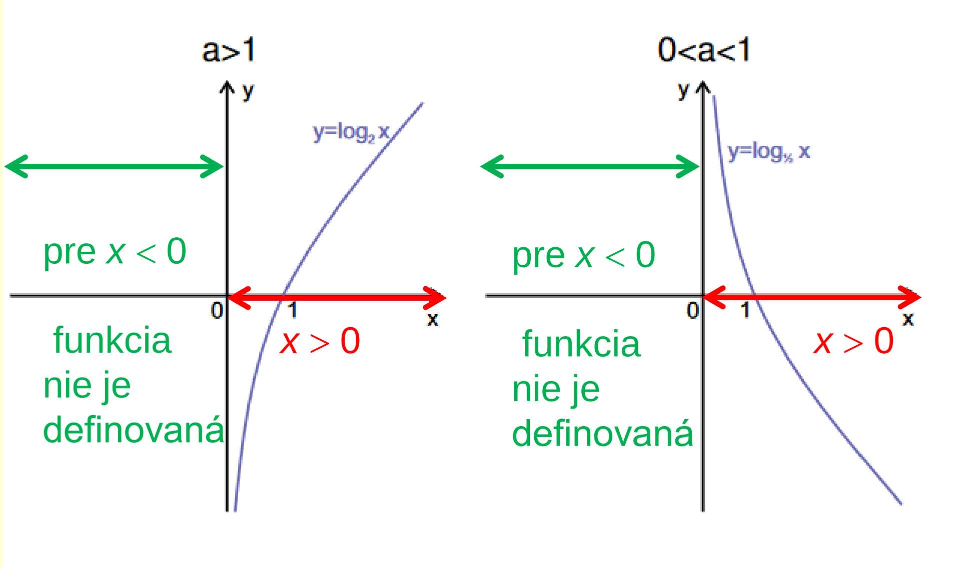
- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule $\frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný $\sqrt[2n]{x} \rightarrow x \geq 0$
- funkcie $y = \arcsin x, y = \arccos x$ sú definované pre $\mathbf{-1 \leq x \leq 1}$



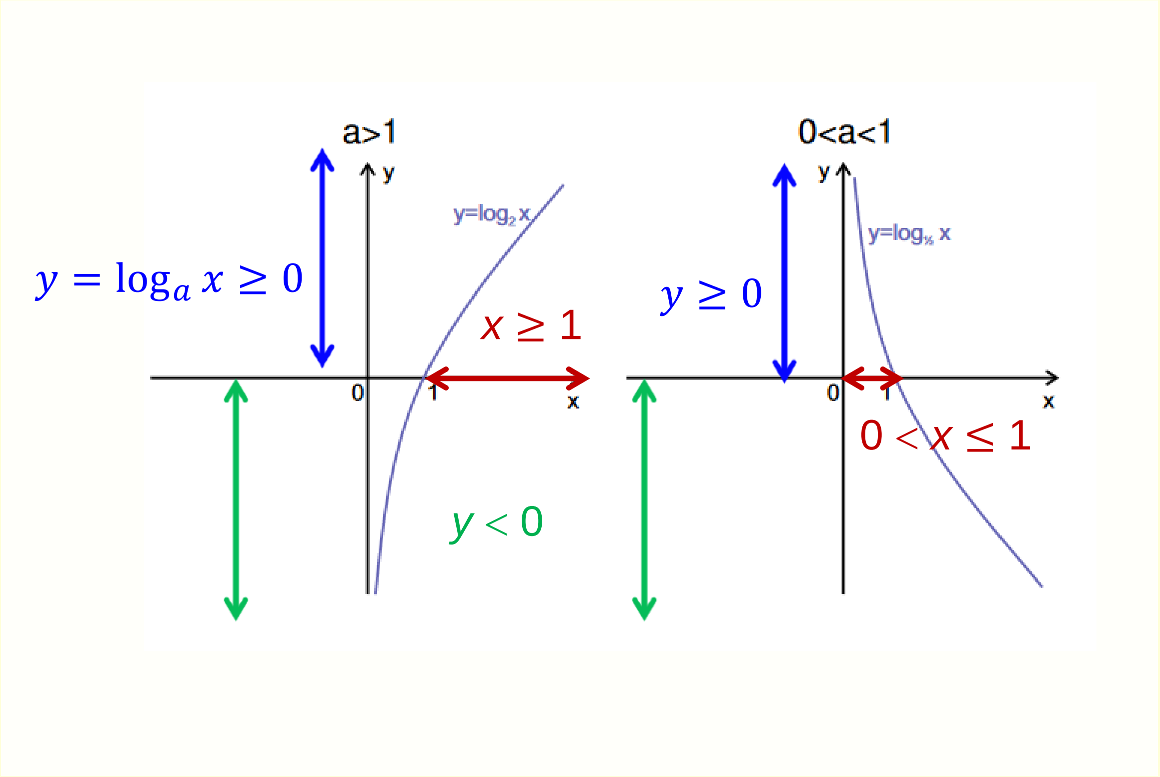


- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument $\log_a x \to x > 0$

$\ln x \to x > 0$



ak $a > 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $x \geq 1$
ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $0 < x \leq 1$



Pr. 1 – 7 / 13

$$f : y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}}$$

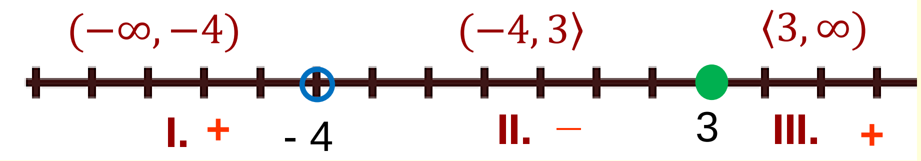
Pr. 2 – 7 / 11 sami $f: y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}}$

$$\left.\begin{array}{l} \color{red}{z\ podmienky\ pre\ odmocninu\quad \dfrac{x-3}{x+4}\geq 0} \\ \\ \color{green}{z\ podmienky\ pre\ zlomok\quad x+4\neq 0} \end{array}\right\}\quad \frac{x-3}{x+4}\geq 0 \wedge \quad x+4\neq 0$$

1. určíme nulové body (NB)

$x\ -3=0,\ x+4=0$ NB: - 4; 3

2. Rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. Na každom intervale určíme znamienko výrazu

I. interval, x = - 5, $\frac{-}{-}=+$ **II. interval, x = 0,** $\frac{-}{+}=-$ **III. interval, x = 4,** $\frac{+}{+}=+$

Výsledkom sú intervaly, kde bude súčin zátvoriek ≥ 0, teda kde je výsledné znamienko +

$$D(f)=(-\infty,-4)\cup\langle 3,\infty)$$

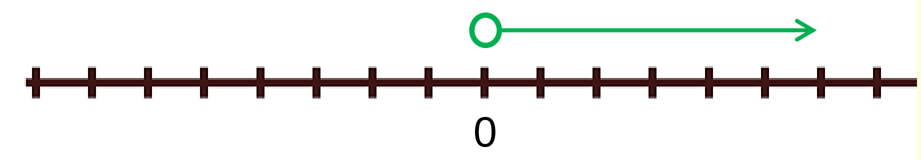
Pr. 3 – 7 / 16 $f : y = \ln(x^2 + 4x)$

Pr. 4 – 7 / 17 $\quad f : y = \log \dfrac{1}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{z podmienky pre logaritmus} & \dfrac{1}{x-1} > 0 \\ \textit{z podmienky pre zlomok} & x - 1 \neq 0 \end{array}\right\} \qquad \frac{1}{x-1} > 0$$

$$1 > 0 \qquad x - 1 > 0$$

$$x > 1$$



$$D(f) = (1, \infty)$$

Pr. 5 – 7 / 21 $f : y = \log_4 \sqrt{x^2 - x - 2}$

Pr. 6 – 7 / 24 $f: y = \sqrt{\log_2 \frac{3x}{x-3}}$

Pr. 7 – 6 / riešený 6 - sami

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)}$$

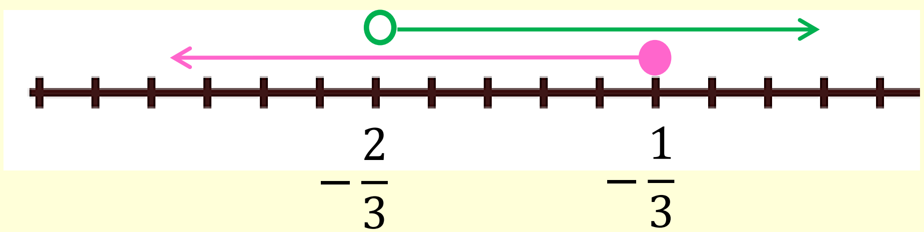
$z\ podmienky\ pre\ odmocninu\ \ \log_{\frac{1}{2}}(3x+2) \geq 0$

$z\ podmienky\ pre\ logaritmus\ \ (0 < a < 1), 0 < 3x + 2 \leq 1$

$$0 < 3x + 2 \leq 1$$

$$0 < 3x + 2 \wedge 3x + 2 \leq 1$$

$$\frac{-2}{3} < x \ \wedge \ x \leq \frac{-1}{3}$$



$$D(f) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\rangle$$

Kontrolka: Vyberte, ktorá z daných funkcií má definičný obor $\mathrm{D(f)} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

a) $y = \sqrt[4]{x+2}$, b) $y = \log_{0,5} x$, c) $y = \sqrt[5]{\frac{1}{x}}$.

Pr. 8 – $f:\ y=\arcsin\frac{1-2x}{4x}$

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{z podmienky pre arcsinus} & -1\leq\dfrac{1-2x}{4x}\leq 1 \\ \textit{z podmienky pre zlomok} & 4x\neq 0 \end{array}\right\}\quad -1\leq\frac{1-2x}{4x}\leq 1\quad\wedge\ 4x\neq 0$$

$$-1\leq\frac{1-2x}{4x}\quad\wedge\quad\frac{1-2x}{4x}\leq 1\quad\wedge\ x\neq 0$$

$$0\leq\frac{1-2x}{4x}+1\quad\wedge\quad\frac{1-2x}{4x}-1\leq 0$$

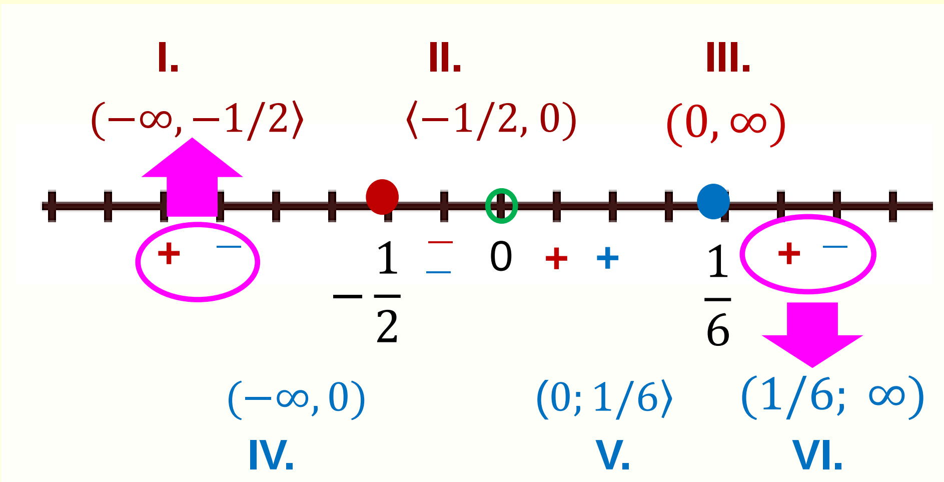
$$0\leq\frac{1-2x+4x}{4x}\quad\wedge\quad\frac{1-2x-4x}{4x}\leq 0$$

$$0\leq\frac{1+2x}{4x}\quad\wedge\quad\frac{1-6x}{4x}\leq 0\quad\wedge\ x\neq 0$$

$2x+1=0,\ \ 4x=0$ NB: $-\frac{1}{2}$; 0 $\qquad$ $1-6x=0,\ \ 4x=0$ NB: $\frac{1}{6}$; 0

$$pre\ \ 0 \le \frac{1+2x}{4x}$$

I. interval, x = - 1, $\frac{-}{-} = +$ **II. interval, x =** $\frac{-1}{3}$, $\frac{+}{-} = -$ **III. interval, x = 4**, $\frac{+}{+} = +$



$$pre\ \frac{1-2x}{4x} \le 1$$

IV. interval, x = - 1, $\frac{+}{-} = -$ **V. interval, x =** $\frac{1}{8}$, $\frac{+}{+} = +$ **VI. interval, x = 1**, $\frac{-}{+} = -$

Musia platiť súčasne podmienky: $0 \le \frac{1+2x}{4x} \wedge \frac{1-6x}{4x} \le 0 \wedge x \neq 0$ vyberáme intervaly
,
na ktorých je súčasne + a - , teda I. a VI. interval

$$D(f) = (-\infty, -1/2\rangle \cup \langle 1/6, \infty)$$

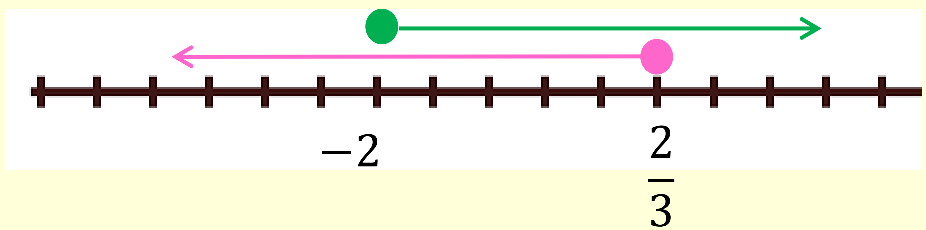
Pr. 9 - 38 - sami

$$f : y = \arccos\frac{3x+2}{4}$$

z podmienky pre arccosinus $\quad -1 \leq \dfrac{3x+2}{4} \leq 1 \quad \rightarrow \quad -4 \leq 3x+2 \leq 4$

$$-4 \leq 3x+2 \wedge \ 3x+2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \quad \wedge \quad x \leq \frac{2}{3}$$



$$D(f) = \left\langle -2, \frac{2}{3} \right\rangle$$

Pr. 10 – 47 $f: y = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+2}} + \sqrt{4-x^2}$

z podmienky pre zlomok $x + 2 \neq 0$

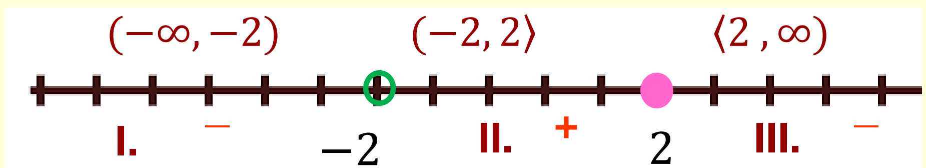
z podmienky pre odmocninu $4 - x^2 \geq 0$

$$4 - x^2 \geq 0 \wedge \ x + 2 \neq 0$$

$$(2 - x)(2 + x) \geq 0 \wedge \ x \neq -2$$

1. určíme nulové body (NB) $2 - x = 0, \ 2 + x = 0$ NB: -2; 2

2. Rozdelíme číselnú os na intervaly pomocou NB



3. Na každom intervale určíme znamienko výrazu

I. interval, x = - 3, $-.+=-$ **II. interval, x = 0**, $+.+=+$ **III. interval, x = 3**, $-.+=-$

$$D(f) = (-2, 2\rangle$$

Pr. 10 – 47

$$f : y = \sqrt[3]{\frac{x-3}{x+2}} + \sqrt{4-x^2}$$

Pr. 11 - 44 - sami

$$f : y = \sqrt{x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2x-5}} + \ln(2x-3)$$

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

Pr. 11 - 44 - sami $f: y = \sqrt{x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2x-5}} + \ln(2x-3)$

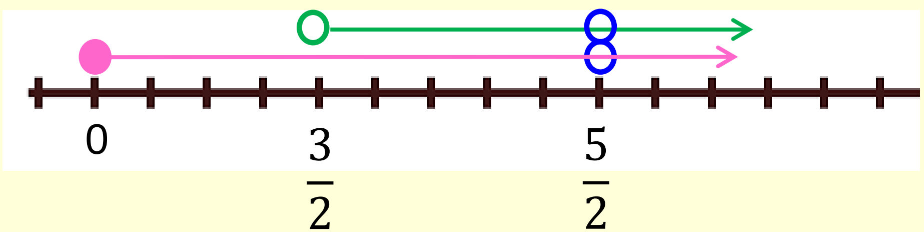
$z\ podmienky\ pre\ odmocninu\ \ x \geq 0$

$z\ podmienky\ pre\ zlomok\ \ 2x - 5 \neq 0$

$z\ podmienky\ pre\ logaritmus\ \ 2x - 3 > 0$

$x \geq 0 \ \wedge\ 2x - 3 > 0\ \wedge 2x - 5 \neq 0$

$x \geq 0\ \wedge\ x > \frac{3}{2}\ \ \wedge x \neq \frac{5}{2}$



$D(f) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$

Testík: Vyberte správne tvrdenia o definičnom obore funkcie.

1. Funkcia $y = \frac{2}{x}$ nie je definovaná pre
   a) $x = 0$,
   b) $x = 2$,
   c) $x = 4$.

2. Funkcia y = ln(x + 2) je definovaná, ak výraz
   a) $x + 2 = 0$,
   b) $x + 2 < 0$,
   c) $x + 2 > 0$.

3. Funkcia $\mathrm{y} = \sqrt[3]{x+1}$ nie je definovaná, ak výraz
   a) $x + 1 \geq 0$,
   b) $x + 1 < 0$,
   c) ani jedna z možnosti nie je správna.

4. Podmienky pre určenie definičného oboru funkcie $-1 \ll \frac{4x}{x+1} \leq 1 \ \wedge \quad x + 1 \neq 0$ platia pre funkciu
   a) $y = \log_2 \frac{4x}{x+1}$, b) $y = \ln(x+1)$, c) $y = \text{arcos}\ \frac{4}{x+1}$, d) $y = \text{arsin}\ \frac{4x}{x+1}$.

Dú: str. 6 - 9 / 12, 14, 19, 20, 22, 25, 26, 37, 39, 45, 46, 48, 49, 54, 55, 56, 58