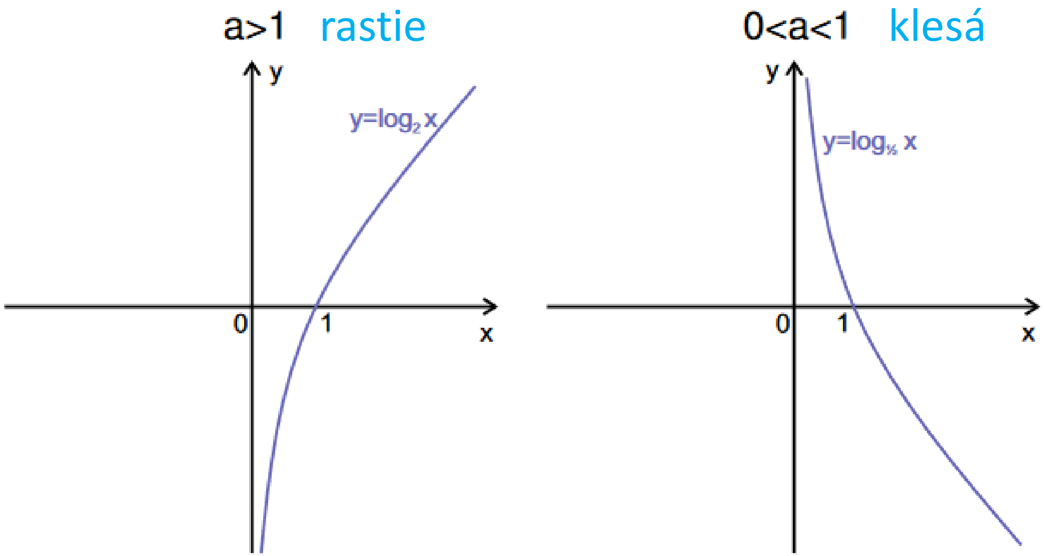
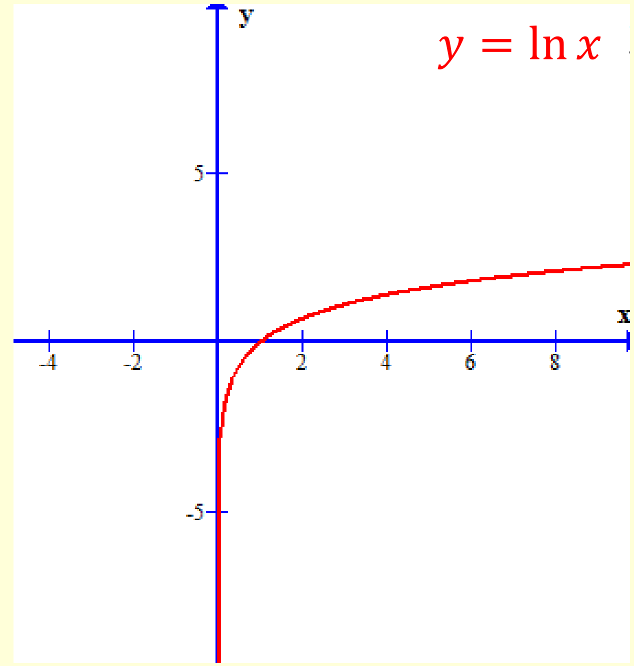
Matematika 1 – 4.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Elementárne funkcie

Logaritmická funkcia $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$





Číslo ***a*** nazývame základ funkcie.

D(f) = $(\mathbf{0}, \infty)$

4. Načrtnite grafy funkcií:

a) $\mathrm{y} = \log_2(x + 4)$

b) $\mathrm{y} = \log_{0,5}(x + 2)$

c) $\mathrm{y} = \log_3 x$

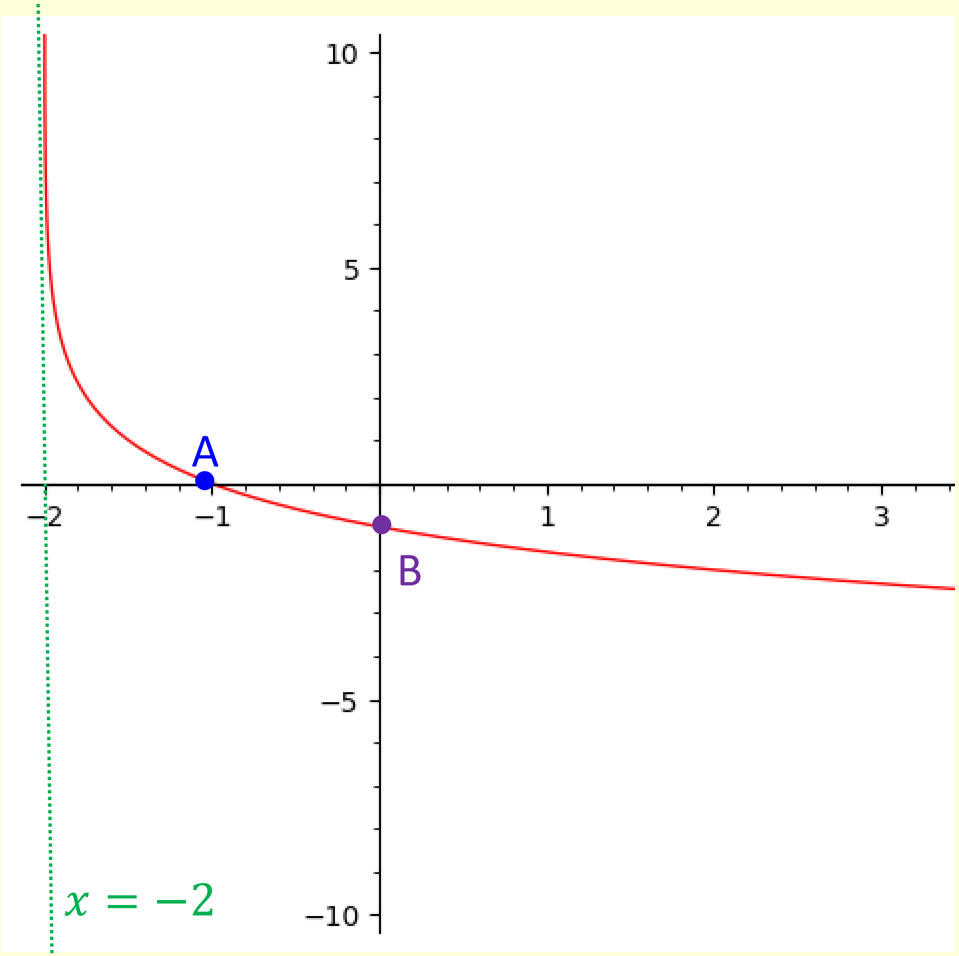
d) $\mathrm{y} = \log_{0,5}(x - 1)$

sami, dú

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť D(f) a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty *x* z definičného odboru vypočítať *y* alebo určiť priesečníky s osou X a Y.
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

b) $y = \log_{0,5}(x+2)$



$x + 2 > 0$
$x > -2$

D(f) = (-2,∞) a = 0,5, klesá

asymptota: $x + 2 = 0$
$x = -2$

priesečník s osou x: $y = 0$

$0 = \log_{0,5}(x+2)$
$0{,}5^0 = x + 2$
$1 = x + 2$
$A\colon\ x = -1, y = 0$

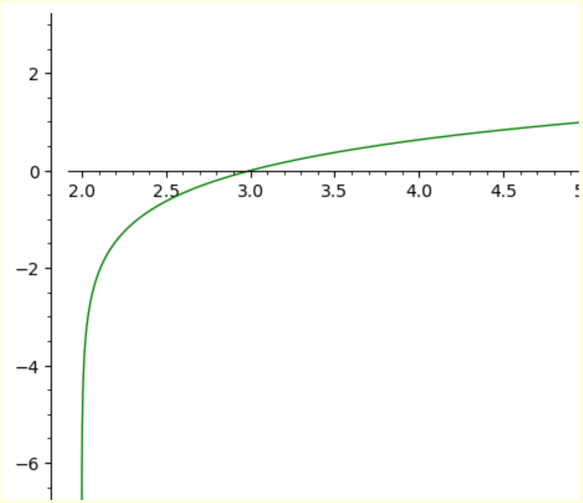
priesečník s osou y: $x = 0$

$y = \log_{0,5}(0+2)$
$y = \log_{0,5}(2)$
$0{,}5^y = 2$
$$\frac{1^y}{2} = \frac{1^{-1}}{2}$$
$B\colon\ y = -1, x = 0$

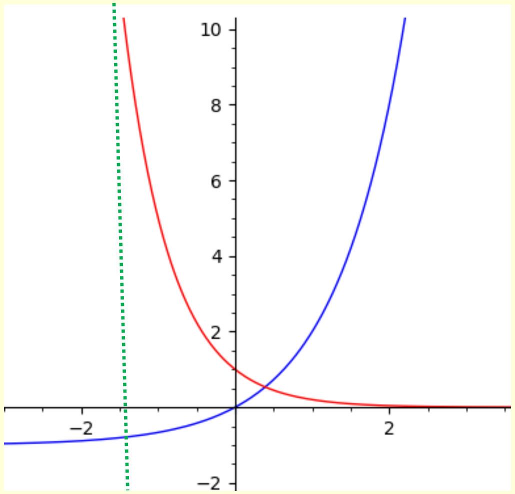
Kontrolka:

1. Vyberte, ktorý zápis funkcie zodpovedá grafu na obrázku 1.

a) $y = \log_{0,1}(x-2)$, b) $y = \log_{6}(x+1)$, c) $y = \log_{3}(x+2)$, d) $y = \log_{3}(x-2)$.



obr. 1



obr. 2

2. Vyberte správne tvrdenia, ktoré platia pre funkcie na obrázku 2:

a) pre červenú je $0 < a < 1$,

b) pre modrú je asymptota $y = 1$,

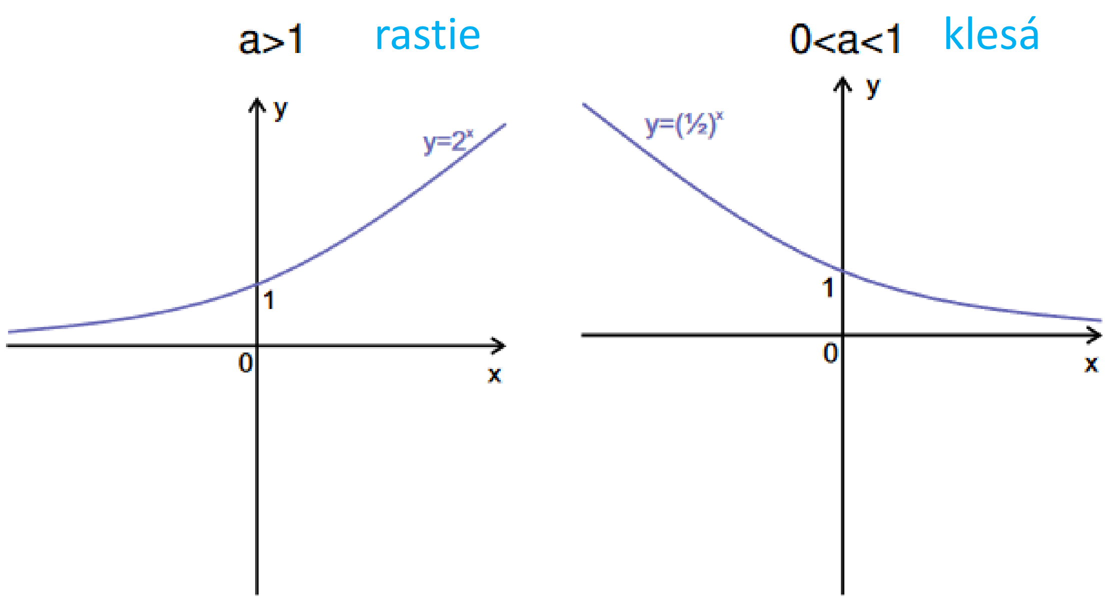
c) D(f) červenej je R,

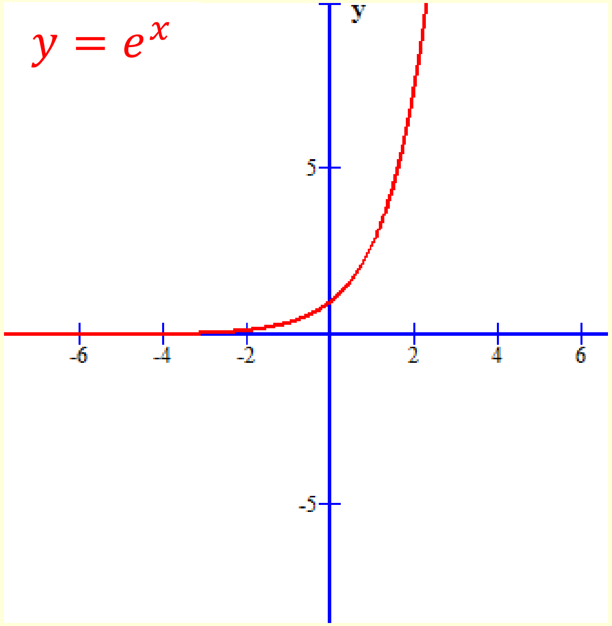
d) červená má prienik s osou x v bode (0, 0),

e) vzhľadom na červenú funkciu je modrá funkcia posunutá v smere osi x.

Elementárne funkcie

Exponenciálna funkcia $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$





Číslo ***a*** nazývame základ funkcie.

D(f) = R

5. Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = 0{,}2^x$ - 5

b) $y = 4^x + 2$

c) $y = 2^x$ - 1

d) $y = 0{,}5^x$

sami, dú

Postup pri zostrojovaní grafu:

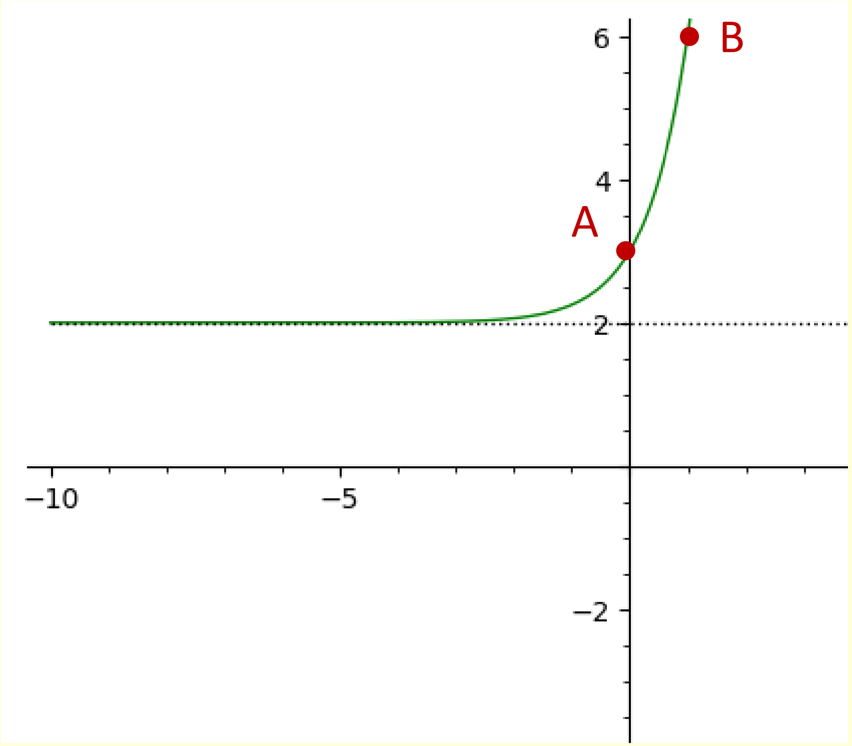
1. Určiť D(f) a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty *x* z definičného odboru vypočítať *y* alebo určiť priesečníky s osou X a Y.
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

b) $y = 4^x + 2$

D(f) = R   a = 4, rastie

asymptota: $y - 2 = 0$

$y = 2$



priesečník s osou y: $x = 0$

$y = 4^0 + 2$

$y = 1 + 2$

A: $y = 3, x = 0$

priesečník s osou x: nemá

ak $y = 0$, potom rovnica

$0 = 4^x + 2$ nemá riešenie

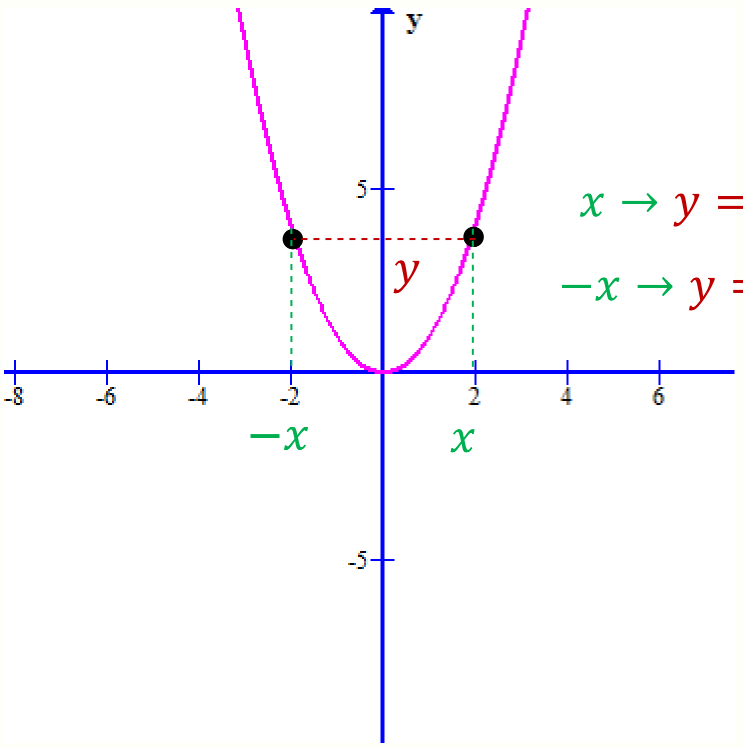
zvolíme $\boldsymbol{x = 1}$

$y = 4^1 + 2 = 6$

B: $x = 1, y = 6$

Párnosť a nepárnosť funkcie

Párna funkcia: $x, -x \in D(\mathrm{f}),\ \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(-x)$

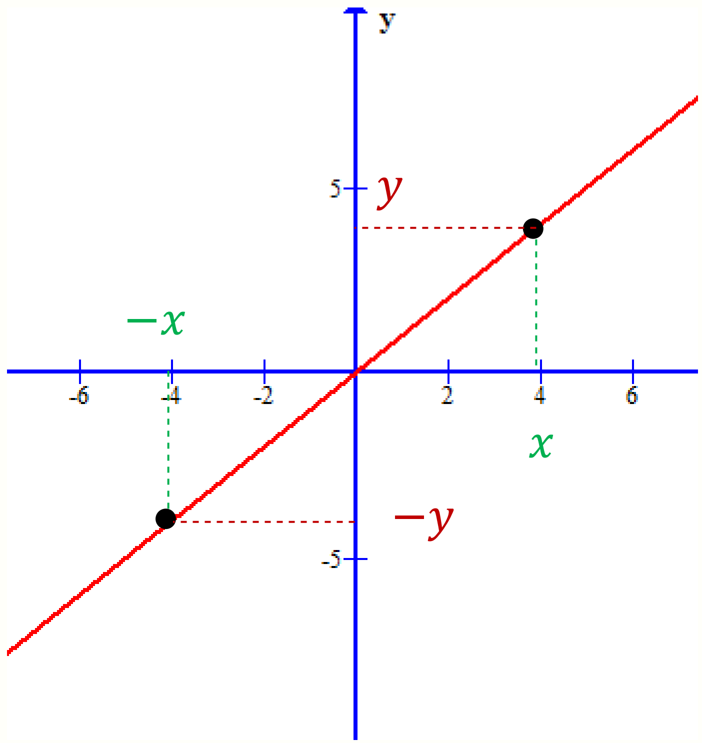


$x \rightarrow y = \mathrm{f}(x)$

$-x \rightarrow y = \mathrm{f}(-x) = \mathrm{f}(x)$

Graf je súmerný podľa osi y.

nepárna funkcia: $x, -x \in D(\mathrm{f}),\ \mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$



$x \rightarrow y = \mathrm{f}(x)$

$-x \rightarrow -y = \mathrm{f}(-x) \neq \mathrm{f}(x)$

$-y = \mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$

Graf je stredovo súmerný podľa bodu (0, 0)

Ani párna ani nepárna funkcia: nespĺňa predchádzajúce podmienky pre párnu a nepárnu funkciu

Pr. 1 – 13 / 1 $f: y = x^5 - x$

Pr. 2 – 13 / 3 $f: y = \sin x + \cos x$

Pr. 3 – 13 / 4 $f: y = \dfrac{\cos x}{x}$ nepárna

Pr. 4 – 13 / 7 $f: y = x^2 + \sin x^2$ párna

Pr. 3 – 13 / 4

$f : y = \dfrac{\cos x}{x}$ nepárna

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -\frac{\cos x}{x}$$

Funkcia kosínus je párna:
$\cos(-x) = \cos x$

$\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$ funkcia je nepárna

Pr. 4 – 13 / 7

$f : y = x^2 + \sin x^2$ párna

$$f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x)^2 = x^2 + \sin x^2$$

Funkcia x^2 je párna:
$(-x)^2 = x^2$

$\mathrm{f}(-x) = \mathrm{f}(x)$ funkcia je párna

Dú: str.13 / 2, 6, 8,10

Limita funkcie

Zápis limity: $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{b}$

Pri výpočte limity:

a) dosadíme za neznáme x číslo *a*, ak **žiadna neurčitosť**, vypočítame limitu

Typy neurčitosti: $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \mathbf{1}^{\infty}$

Pr. 1 – 16 / 1

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$$

Pr. 2

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 4} = \frac{1^3 + 3.1 + 5}{1^2 - 4} = \frac{9}{-3} = -3$$

b) dosadíme za neznáme x číslo *a*, ak **neurčitosť $\frac{0}{0}$,** urobíme rozklad na súčin v čitateli aj v menovateli (ak v čitateli a menovateli polynómy)

Pr. 3 – 16 / 7

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 5}$$

Pr. 4 – 16 / 3

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \qquad 4$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Dú : 16 / 4, 8

c) dosadíme za neznáme x číslo *a*, ak **neurčitosť** $\mathbf{\frac{0}{0}}$, rozšírime vhodnou jednotkou (ak v čitateli alebo menovateli druhá odmocnina s použitím vzorca $a^2 - b^2$)

Pr. 5 – 17 / 17

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\boldsymbol{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$$

Pr. 6 – 16 / 14

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \qquad\qquad 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+0^2}-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}}^{a}-\overbrace{1}^{b}}{x}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}}_{=1} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1+x^2}^{a^2}-\overbrace{1}^{b^2}}{x.\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{0}{\left(\sqrt{1+0^2}+1\right)} = 0$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$$

Dú : 16 / 11,12