Riešenie: Platí, že výberový priemer $\overline{x}$ je nevychýleným bodovým odhadom strednej hodnoty λ základného súboru s exponenciálnym rozdelením. Pomocou kalkulačky ho vypočítame dosadením dát do vzorca $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} z_i \cdot n_i$. Dostaneme $\lambda \approx \overline{x} = 6,25$.

Pri hľadaní 95 %-ného obojstranného intervalu spoľahlivosti pre parameter λ použijeme vzorec $\lambda \in \left\langle \frac{2n\cdot\overline{x}}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,2n}}, \frac{2n\cdot\overline{x}}{\chi^2_{\alpha/2,\,2n}} \right\rangle$, kde dosadíme potrebné hodnoty $n = 200$, $\overline{x} = 6,25$; $\alpha = 0,05$; $\chi^2_{1-\alpha/2,\,2n} = \chi^2_{0,975;\,400} = 457,3055$; $\chi^2_{\alpha/2,\,2n} = \chi^2_{0,025;\,400} = 346,4818$ a vyčíslime pomocou kalkulačky.

Poznámka: Pre $n > 30$ sú kvantily uvedené len v rozsiahlejších štatistických tabuľkách.

Pre hľadaný obojstranný interval spoľahlivosti bude platiť: ⟨5,4668 ; 7,2154⟩.

Výpočet urobíme aj v prostredí MATLABu, a to viacerými spôsobmi.

```
n=200;z=[2.5*ones(1,120),7.5*ones(1,39),12.5*ones(1,21),...
17.5*ones(1,11),22.5*ones(1,9)];m=mean(z),
qd=chi2inv(.975,2*n),qh=chi2inv(.025,2*n),d=2*n*m/qd,h=2*n*m/qh
```

Riešenie tohto príkladu pomocou príkazu `[parmhat,parmci]=expfit(x,alpha)` (fungovanie príkazu si pozrieme prostredníctvom `help expfit`):

```
[parmhat,parmci]=expfit(z,0.05)
```

Výstup z MATLABu:
parmhat = 6.2500 parmci = 5.4668 7.2154

Ďalšou možnosťou je príkaz `[phat,pci]=mle(data,'distribution',dist)`, ktorého aplikáciou dostaneme bodové odhady parametrov príslušného rozdelenia a 95 %-ný interval spoľahlivosti pre jeho parametre:

```
[phat,pci]=mle(z,'distribution','exponential')
```

Získame rovnaký výsledok.

Úlohy:

Poznámka: V úlohách 4.1. – 4.5. budeme predpokladať, že náhodná premenná X základného súboru má normálne rozdelenie pravdepodobnosti.

4.1. Preverovala sa zdatnosť študentov v skoku do výšky. Výsledky dosiahnutej výšky skokov [cm] sú zhrnuté v tabuľke:

z_i	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210
n_i	3	5	7	11	12	6	2	2	1	1

Je známa smerodajná odchýlka $\sigma = 20$. Určte:

a) 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ,
b) 95 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre μ,
c) 95 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre μ.

Výsledok: a) ⟨149,0564 ; 160,1436⟩, b) ⟨149,9477 ; ∞), c) (−∞ ; 159,2523⟩.

4.2. Pre účely spojovacej služby máme odhadnúť priemernú dĺžku telefonického rozhovoru. Požaduje sa, aby spoľahlivosť odhadu bola 0,99, pričom však chyba odhadu nemá prekročiť ± 10 sekúnd. Ďalej vieme, že smerodajná odchýlka telefonických rozhovorov je 2,5 minúty. Vypočítajte, pri akom počte náhodne vybraných telefonických rozhovorov treba zistiť ich dĺžku, aby bolo možné získať odhad s uvedenou presnosťou a spoľahlivosťou.

Výsledok: $n = 1493$.

4.3. Zisťovala sa pevnosť vlákna [kg/mm^2]. Merania sa vykonali na desiatich vzorkách s týmito výsledkami: 10,3; 8,8; 9,7; 9,6; 11,2; 10,7; 9,1; 9,5; 10,3; 9,3. Určte:

a) bodové odhady parametrov μ a σ,
b) 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ,
c) 99 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ,
d) 90 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ.

Výsledok: a) $\mu \approx \bar{x} = 9{,}8500$; $\sigma \approx s = 0{,}7546$; b) $\langle 9{,}3102 ; 10{,}3898 \rangle$, c) $\langle 9{,}1767 ; \infty)$, d) $(-\infty ; 10{,}1800\rangle$.

4.4. V zimnom období zisťovali stav hladiny spodnej vody v zosuvovej oblasti. Namerali takéto stavy v cm: 159,53; 159,49; 159,61; 159,71; 159,88; 161,08; 160,98; 161,09; 160,91; 160,79; 161,02; 160,96; 160,80. Určte:

a) bodové odhady parametrov μ a σ,
b) 95 %-né obojstranné intervaly spoľahlivosti pre rozptyl σ^2 a smerodajnú odchýlku σ,
c) 99 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre rozptyl σ^2,
d) 90 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre smerodajnú odchýlku σ.

Výsledok: a) $\mu \approx \bar{x} = 160{,}4500$; $\sigma \approx s = 0{,}6750$; b) $\langle 0{,}2343 ; 1{,}2417\rangle$, $\langle 0{,}4841 ; 1{,}1143\rangle$; c) $\langle 0{,}2086 ; \infty)$, d) $(-\infty ; 0{,}9314\rangle$.

4.5. Zo základného súboru sme urobili náhodný výber daný tabuľkou:

I_i	15 – 17	17 – 19	19 – 21	21 – 23	23 – 25	25 – 27
n_i	10	30	50	70	60	30

Určte:

a) hranice, v ktorých sa bude nachádzať stredná hodnota s pravdepodobnosťou 0,95;
b) hodnotu, pod ktorú sa s pravdepodobnosťou 0,95 stredná hodnota nedostane;
c) hranice, v ktorých sa bude nachádzať smerodajná odchýlka s pravdepodobnosťou 0,95;
d) hodnotu, ktorú s pravdepodobnosťou 0,95 rozptyl neprekročí.

Výsledok: $\langle 21{,}5094 ; 22{,}1706\rangle$, b) 21,5629, c) $\langle 2{,}4398 ; 2{,}9093\rangle$, d) 8,2149.

4.6. Pri sledovaní doby bezporuchového chodu určitého výrobného zariadenia [hod.] boli namerané tieto výsledky: 412, 482, 134, 115, 839, 357, 405, 219, 172, 141, 644, 194, 212, 909, 1065, 349, 21, 539, 268, 749, 143, 684. Predpokladáme, že doba bezporuchového chodu zariadenia má exponenciálne rozdelenie. Riešte nasledujúce úlohy: a) vypočítajte bodový odhad parametra λ, b) určte 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre parameter λ.

Výsledok: a) $\lambda \approx \bar{x} = 411{,}5$; b) $\langle 282{,}0185 ; 656{,}6196\rangle$.