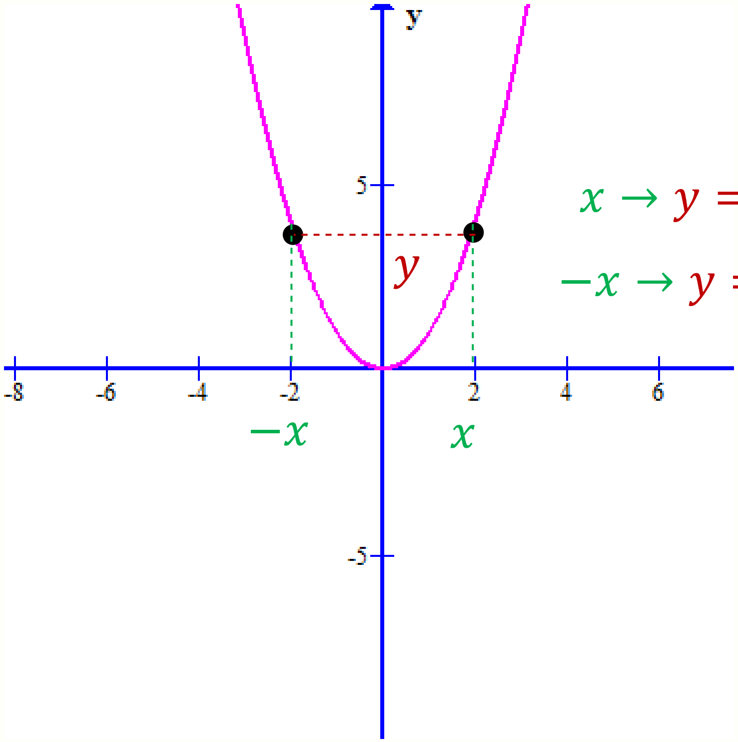
Matematika 1 – 3.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Párnosť a nepárnosť funkcie

Párna funkcia: $x, -x \in D(\mathrm{f}),\ \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(-x)$

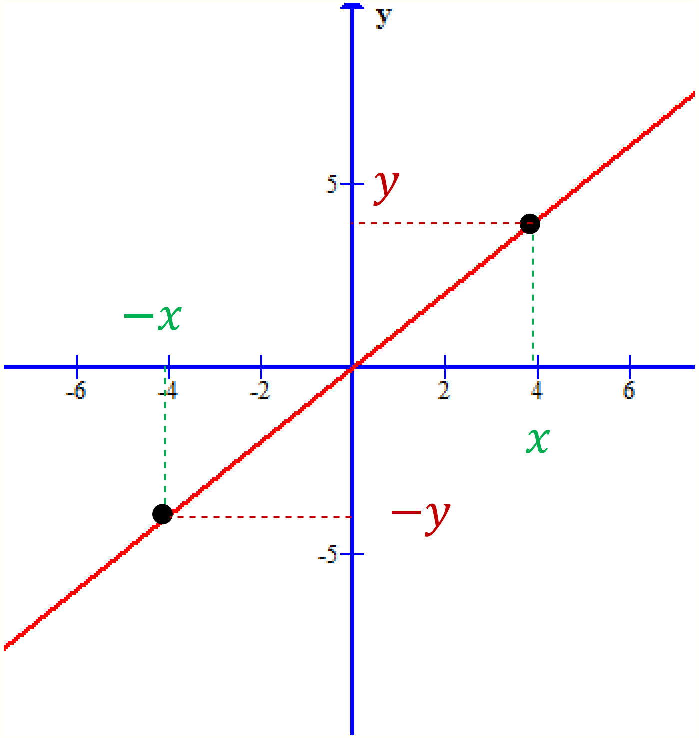


$x \rightarrow y = \mathrm{f}(x)$

$-x \rightarrow y = \mathrm{f}(-x) = \mathrm{f}(x)$

Graf je súmerný podľa osi y.

nepárna funkcia: $x, -x \in D(\mathrm{f}),\ \mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$



$x \rightarrow y = \mathrm{f}(x)$

$-x \rightarrow -y = \mathrm{f}(-x) \neq \mathrm{f}(x)$

$y = \mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$

Graf je stredovo súmerný podľa bodu (0, 0)

Ani párna ani nepárna funkcia: nespĺňa predchádzajúce podmienky pre párnu a nepárnu funkciu

Pr. 1 – 13 / 1 $f: y = x^5 - x$

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x = -(x^5 - x)$$

$\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$ funkcia je nepárna

Pr. 2 – 13 / 3 $f : y = \sin x + \cos x$

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$$

Funkcia kosínus je párna:
$\cos(-x) = \cos x$

$\mathrm{f}(-x) \neq -\mathrm{f}(x)$ funkcia nie je nepárna

$\mathrm{f}(x) \neq \mathrm{f}(-x)$ funkcia nie je párna

Funkcia sínus je nepárna:
$\sin(-x) = -\sin x$

funkcia nie je ani párna ani nepárna

Pr. 3 – 13 / 4

$$f: y = \frac{\cos x}{x}$$ nepárna

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -\frac{\cos x}{x}$$

Funkcia kosínus je párna:
$\cos(-x) = \cos x$

$f(-x) = -f(x)$ funkcia je nepárna

Pr. 4 – 13 / 7

$$f: y = x^2 + \sin x^2$$ párna

$$f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x)^2 = x^2 + \sin x^2$$

Funkcia x^2 je párna:
$(-x)^2 = x^2$

$f(-x) = f(x)$ funkcia je párna

Dú: str.13 / 2, 6, 8,10

Limita funkcie

Zápis limity: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{b}$

Pri výpočte limity:

a) dosadíme za neznáme x číslo *a*, ak **žiadna neurčitosť**, vypočítame limitu

Pr. 1 – 16 / 1

Typy neurčitosti: $\mathbf{\frac{0}{0}}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \mathbf{1}^{\infty}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3} = \frac{2^2 + 5}{2^2 - 3} = \frac{9}{1} = 9$$

Pr. 2

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 4} = \frac{1^3 + 3.1 + 5}{1^2 - 4} = \frac{9}{-3} = -3$$

b) dosadíme za neznáme x číslo *a*, ak **neurčitosť $\frac{0}{0}$,** urobíme rozklad na súčin v čitateli aj v menovateli (ak v čitateli a menovateli polynómy)

Pr. 3 – 16 / 7

$$\lim_{x\to-1}\frac{(-1)^2-1}{(-1)^2+6.(-1)+5}=\frac{0}{0}$$

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+6x+5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+5)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)}{(x+5)}=\frac{-1-1}{-1+5}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

Pr. 4 – 16 / 3

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

4

$$\lim_{x\to-1}\frac{(2)^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to2}x+2=2+2=4$$

Dú : 16 / 4, 8

c) dosadíme za neznáme x číslo *a*, ak **neurčitosť** $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, rozšírime vhodnou jednotkou (ak v čitateli alebo menovateli druhá odmocnina s použitím vzorca $a^2 - b^2$)

Pr. 5 – 17 / 17

$$\lim_{x\to 1}\frac{1^2-\sqrt{1}}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{0}$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.\ \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-\sqrt{x}).(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2\sqrt{x}+x^2-(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2\sqrt{x}+x^2-x-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(x^2-1)+x(x-1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}(x+1)+x)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}(x+1)+x) = 1(1+1)+1 = 3$$

Pr. 6 – 16 / 14

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \qquad\qquad 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+0^2}-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x.(\sqrt{1+x^2}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x.(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{0^2}{0.(\sqrt{1+0^2}+1)}=0$$

Dú : 16 / 11,12

d) goniometrická funkcia, dosadíme, ak **neurčitosť** $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, použijeme vzorec

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{\otimes\to 0}\frac{\sin\otimes}{\otimes}=1$$

Pr. 7 – 17 / 22

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x}{\sin 5x} \qquad \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ 2.0}{\sin 5.0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x}{\sin 5x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x.\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x.\sin 5x}\,\frac{2x}{2x}\frac{5}{5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2\,x}\,\frac{5x}{\sin 5x}\,\frac{2}{5\cos 2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2\,x}.\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\,\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

Pr. 8 – 17 / 19

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\ 5.0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,5x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x.\cos 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x.\cos 5x}\ \frac{5}{5} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5\,x}\ \frac{5}{\cos 5x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5\,x} . \lim_{x\to 0}\ \frac{5}{\cos 5x} = 1 . \frac{5}{\cos 0} = 5$$

Dú : 17 / 20, 21

e) dosadím, ak **neurčitosť** $\frac{\infty}{\infty}$, delíme čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou v menovateli (ak v čitateli a menovateli polynómy)

Platí: $\infty.\infty = \infty, \quad -\infty.-\infty = \infty, \quad -\infty.\infty = -\infty, \quad c.\infty = \infty$

$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad \infty + c = \infty, \quad \sqrt{\infty} = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Pr. 9 – 17 / 29

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\infty+\infty}{\infty-\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^4}+\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = \frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

najvyššia mocnina

Pr. 10 – 17 / 30

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4 - 5x}{10x^2 - 3x + 1}$	∞

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - 5x}{10x^2 - 3x + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^4}{x^2} + \frac{5x}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + \frac{5}{x}}{10 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\infty + \frac{1}{\infty}}{10 - \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \infty$$

najvyššia mocnina

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3}$	Dú	2
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x-1}$	Dú	$\dfrac{2}{3}$

g) dosadíme, ak **neurčitosť** $\infty - \infty$, rozšírime vhodnou jednotkou a potom delíme čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou v menovateli

Pr. 11

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-3}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-3}\right)\frac{\sqrt{x^2+5x+6}+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2+5x+6}+\sqrt{x^2-3}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+5x+6}+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x+9}{\sqrt{x^2+5x+6}+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x}+\frac{9}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{5}{2}$$

najvyššia mocnina je $\sqrt{x^2}$

Pr. 12 – 17 / 34

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right) \qquad 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\infty}-\sqrt{\infty}=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)^{\infty-\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1}}=0$$

najvyššia mocnina je $\sqrt{x}$

Dú : 17 / 35, 36

h) dosadíme, ak **neurčitosť 1^{∞}**, použijeme jeden zo vzorcov

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 \pm \frac{1}{x}\right)^{x} = e^{\pm 1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^{k}\ , \quad f(x) \to \infty$$

Pr. 13 – 22 / 21

$$\left(1 + \frac{2}{\infty}\right)^{\infty} = \mathbf{1}^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{x} \overset{\mathbf{1}^{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{x\frac{(x+3)}{x+3}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{x+3}\right]^{\frac{x}{x+3}} =$$

$$e^{2.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}} = e^{2\frac{1}{1+0}} = e^{2}$$

Pr. 14

$$\left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\infty}=\mathbf{1}^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-5}\right)^{2x}\overset{\mathbf{1}^{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-5}\right)^{2x\frac{(x-5)}{x-5}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-5}\right)^{x-5}\right]^{\frac{2x}{x-5}}=$$

$$e^{3.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-5}}=e^{3.\frac{2}{1-0}}=e^{6}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{x-1}$$ Dú e^{3}

2. Malá písomka

Skupina A: Určte definičný obor funkcie f: $y = \frac{5x+1}{x-3} + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x)$.

Skupina B: Určte definičný obor funkcie f: $y = \frac{1}{x-5} + \sqrt{\log_2(x^2 + 2x + 1)}$

Skupina C: (online) Určte definičný obor funkcie f: $y = \arcsin\frac{3x+1}{2} + \sqrt{\log_5(x + 1)}$

Skupina A

Určte definičný obor funkcie f: $y = \frac{5x+1}{x-3} + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x)$

z podmienky pre logaritmus $x^2 + 2x > 0$

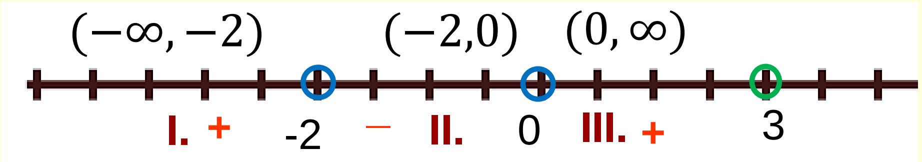
z podmienky pre zlomok $x - 3 \neq 0$

$x^2 + 2x > 0 \;\wedge\; x - 3 \neq 0$

0,3 bodu

$x\,(x+2) > 0 \;\wedge\; x \neq 3$ 0,2 bodu

$x = 0,\; x + 2 = 0$ NB: 0; -2 0,1 bodu



0,2 bodu

$D(f) = (-\infty, 2) \cup (0,3) \cup (3, \infty)$ 0,2 bodu

Skupina B

Určte definičný obor funkcie f: f: $y = \frac{1}{x-5} + \sqrt{\log_2(x^2+2x+1)}$

$z\ podmienky\ pre\ odmocninu\ \ \log_2(x^2+2x+1) \geq 0$

$z\ podmienky\ pre\ logaritmus (a = 2 > 0), x^2+2x+1 \geq 1$

$z\ podmienky\ pre\ zlomok\ x-5 \neq 0$

$x^2+2x+1 \geq 1 \ \wedge\ x \neq 5$

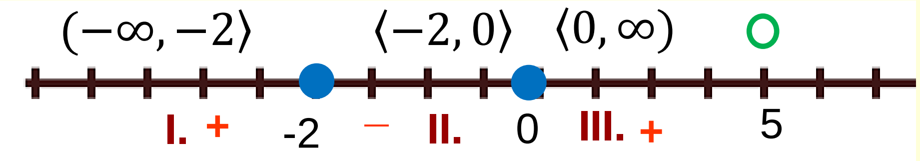
0,3 bodu

$x^2+2x+1-1 \geq 0 \ \wedge\ x \neq 5$ 0,3 bodu

$x^2+2x \geq 0 \ \wedge\ x \neq 5$

$x(x+2) \geq 0 \ \wedge\ x \neq 5$

$x = 0,\ x+2 = 0$ NB: -2; 0 0,1 bodu



0,2 bodu

$D(f) = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 0, \infty) - \{5\}$ 0,1 bodu

Skupina C - online Určte definičný obor funkcie f: $y = \arcsin\dfrac{3x+1}{2} + \sqrt{\log_5(x+1)}$

$z\ podmienky\ pre\ odmocninu\ \ \log_5(x+1) \geq 0$

$z\ podmienky\ pre\ logaritmus (a = 5 > 0),^{2}\ x + 1 \geq 1$

$z\ podmienky\ pre\ arcsin\ \ -1 \leq \dfrac{3x+1}{2} \leq 1$

$-1 \leq \dfrac{3x+1}{2} \leq 1\ \wedge\ \ x + 1 \geq 1$

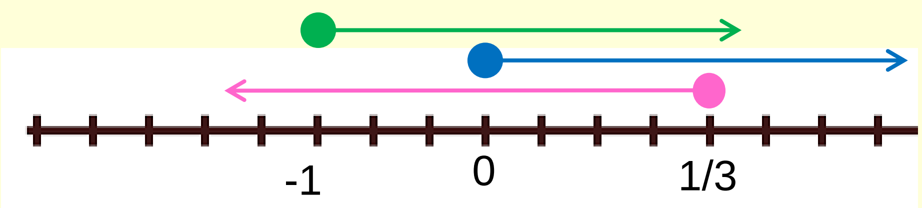
0,1 bodu

$-1 \leq \frac{3x+1}{2} \wedge \frac{3x+1}{2} \leq 1 \wedge \quad x \geq 0$

$-2 \leq 3x + 1 \wedge 3x + 1 \leq 2\ \wedge x \geq 0$

0,2 bodu

$-1 \leq x \wedge x \leq \frac{1}{3} \wedge x \geq 0$



0,1 bodu

$D(f) = \langle 0, 1/3 \rangle$

0,1 bodu