Kapitola 1

Funkcia jednej premennej

1.1 Pojem funkcie

Definícia 1. *Nech M a P sú neprázdne podmnožiny množiny reálnych čísel $\mathbb{R}$. Hovoríme, že na množine M je definovaná* **funkcia** *f, ak je daný predpis, podľa ktorého je každému prvku z množiny M priradený jeden prvok z množiny P.*

Množinu M nazývame **definičným oborom** funkcie f a budeme ju označovať D_f. Množinu všetkých tých prvkov z P, ktoré sú funkciou f priradené nejakému prvku z M, nazývame **oborom hodnôt** funkcie f a budeme ju označovať H_f. Ak funkcia f priradzuje prvku $x \in D_f$ prvok y, zapisujeme to

$$y = f(x), \tag{1.1}$$

pričom číslo y resp. $f(x)$ nazývame hodnotou funkcie f v bode (čísle) x. Vo vzťahu (1.1) znak x nazývame **argumentom funkcie** alebo **nezávislou premennou**, znak y nazývame **závislou premennou**.

Funkcia f môže byť daná niekoľkými spôsobmi:

a) pomocou formálneho matematického zápisu rovnicou $y = f(x)$[1],

b) tabuľkou,

c) slovným vyjadrením,

d) graficky.

Grafom funkcie $f(x)$ je množina všetkých bodov $[x, y]$ v rovine, ktoré majú nasledujúce vlastnosti:

1. x je z definičného oboru funkcie $f(x)$, t. j. $x \in D_f$,
2. y je hodnota funkcie $f(x)$ v bode x, t. j. $y = f(x)$.

Niekedy uvažujeme funkciu len na časti jej definičného oboru[2]. Vtedy hovoríme o tzv. parciálnej funkcii. Rozumieme tým nasledovné: Nech f je funkcia s definičným oborom D_f a $M_1 \subset D_f$. Hovoríme, že funkcia g je **parciálna funkcia** z f na M_1, ak $D_g = M_1$ a pre každé $x \in D_g$ platí $g(x) = f(x)$. Napríklad funkcia definovaná na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rovnicou $y = \sin x$ je parciálnou funkciou

[1] Kvôli stručnosti budeme namiesto „funkcia f s nezávislou premennou x“ hovoriť iba „funkcia $f(x)$“.

[2] Napríklad vtedy, ak funkcia nemá požadovanú vlastnosť na celom definičnom obore, ale na nejakej jeho časti ju má.

z funkcie danej rovnicou $y = \sin x$ (ktorej definičný obor je $\mathbb{R}$).

Postup pri určovaní definičného oboru:

Na určenie definičného oboru funkcie $f(x)$ je potrebné poznať definičné obory a vlastnosti elementárnych funkcií. Najčastejšie je potrebné vedieť, že:

- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule,
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný,
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument,
- ak $a > 1$, potom $\log_a x > 0$ práve vtedy, ak $x > 1$,
- ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x > 0$ práve vtedy, ak $0 < x < 1$,
- funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ sú definované pre $-1 \le x \le 1$.

Zapamätajme si:

$$\boxed{\begin{array}{c}
\frac{1}{\heartsuit} \quad \Rightarrow \quad \heartsuit \neq 0 \\[2ex]
\sqrt[2n]{\heartsuit} \quad \Rightarrow \quad \heartsuit \ge 0,\ n \in N \\[2ex]
\log_a \heartsuit \quad \Rightarrow \quad \heartsuit > 0,\ a > 0,\ a \neq 1 \\[2ex]
a > 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a \heartsuit > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \heartsuit > 1 \\[2ex]
0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a \heartsuit > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \heartsuit < 1 \\[2ex]
y = \arcsin \heartsuit \quad \Rightarrow \quad -1 \le \heartsuit \le 1 \\[2ex]
y = \arccos \heartsuit \quad \Rightarrow \quad -1 \le \heartsuit \le 1
\end{array}}$$

Príklad 1. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{x+3} + \ln(3-2x) + \dfrac{1}{x^2 - x}$.

Riešenie.

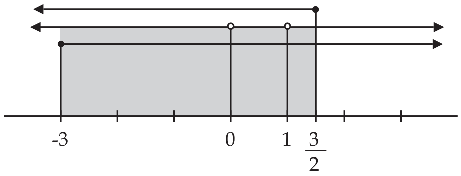
Vzhľadom na uvedené podmienky musí platiť

$$x + 3 \ge 0 \quad \wedge \quad 3 - 2x > 0 \quad \wedge \quad x^2 - x \neq 0.$$

Riešime sústavu nerovníc:

$$\begin{aligned}
x + 3 \ge 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \ge -3 \\
3 - 2x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x < \tfrac{3}{2} \\
x^2 - x \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že definičný obor funkcie $f(x)$ je $D_f = \langle -3, 0) \cup (0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$.



Definičný obor funkcie

Príklad 2. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

Riešenie.

Pod párnou odmocninou musí byť výraz nezáporný a menovateľ zlomku má byť rôzny od nuly, t. j. $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Teda

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) > 0.$$

Nerovnicu môžeme riešiť pomocou nulových bodov. Výraz $x^2 - 5x + 6$ nadobúda hodnotu 0 pre $x = 2, x = 3$. Tieto dva body rozdelia množinu $\mathbb{R}$ na tri intervaly, ktoré zapíšeme do tabuľky:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, \infty)$
$x^2 - 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

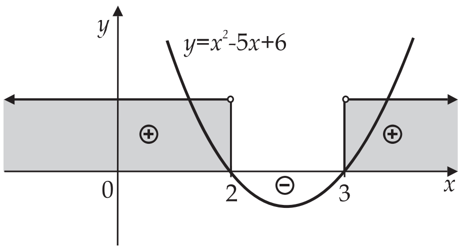
Dosadením ľubovoľných čísel z jednotlivých intervalov zistíme, kedy výraz x^2-5x+6 nadobúda kladné a kedy záporné hodnoty:

$(-\infty, 2)$: $\quad x = -3 \Rightarrow f(-3) = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 30 > 0,$
$(2, 3)$: $\quad x = 2{,}5 \Rightarrow f(2{,}5) = (2{,}5)^2 - 5(2{,}5) + 6 = -0{,}25 < 0,$
$(3, \infty)$: $\quad x = 4 \Rightarrow f(4) = (4)^2 - 5(4) + 6 = 2 > 0.$

Z tabuľky vyplýva, že definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)\,.$$

Nerovnicu môžeme riešiť aj graficky. Grafom funkcie $y = x^2 - 5x + 6$ je parabola, ktorá pretína x-ovú os v bodoch $x = 2$, $x = 3$. Riešením nerovnice sú tie čísla, pre ktoré je graf funkcie nad osou o_x.



Definičný obor funkcie

Príklad 3. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\frac{7-x}{x+2} - 2}$.

Riešenie.

Pre výraz pod párnou odmocninou musí platiť $\frac{7-x}{x+2} - 2 \geq 0$ a menovateľ zlomku má byť rôzny od nuly, t. j. $x \neq -2$. Riešime nerovnicu s neznámou v menovateli:

$$\frac{7-x}{x+2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+3}{x+2} \geq 0.$$

Nulové body sú $x = -2$, $x = 1$.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, \infty)$
$\frac{-3x+3}{x+2}$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$

Definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = (-2, 1\rangle\,.$$

Príklad 4. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\log_{0,1}(2x+1)}$.

Riešenie.

Z podmienok pre výraz pod párnou odmocninou a pre argument logaritmu pri základe $a = 0{,}1$ vyplýva

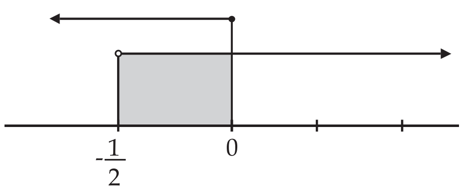
$$\log_{0,1}(2x+1) \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+1 > 0.$$

Platí

$$\begin{aligned} \log_{0,1}(2x+1) &\geq 0 \\ \log_{0,1}(2x+1) &\geq \log_{0,1} 1 \\ 2x+1 &\leq 1. \end{aligned}$$

Riešime sústavu nerovníc:

$$\begin{aligned} 2x+1 > 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x > -\tfrac{1}{2} \\ 2x+1 \leq 1 &\quad\Leftrightarrow\quad x \leq 0. \end{aligned}$$



Definičný obor funkcie

Definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = \left(-\frac{1}{2}, 0\right\rangle.$$

Príklad 5. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \arcsin \dfrac{2-3x}{4}$.

Riešenie.

Funkcia $y = \arcsin x$ je definovaná pre $-1 \leq x \leq 1$. Platí

$$-1 \leq \frac{2-3x}{4} \leq 1 \quad / \cdot 4$$

$$-4 \leq 2 - 3x \leq 4 \quad / - 2$$

$$-6 \leq -3x \leq 2 \quad / : (-3)$$

$$2 \geq x \geq -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

Definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = \left\langle -\frac{2}{3}, 2 \right\rangle.$$

Príklad 6. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{25 - x^2}$.

Riešenie.

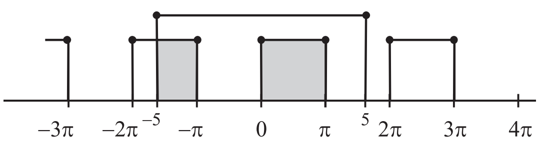
Z podmienok vyplýva

$$\sin x \geq 0 \quad \wedge \quad 25 - x^2 \geq 0.$$

Riešime podmienky:

$$\sin x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle \,,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$25 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 25 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -5, 5 \rangle \,.$$



Definičný obor funkcie

Ak zoberieme do úvahy to, že $\pi = 3{,}1415926\ldots$, potom definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = \langle -5, -\pi \rangle \cup \langle 0, \pi \rangle \,.$$

Úlohy

V úlohách 1.1 – 1.90 nájdite definičný obor.

1.1 $f(x) = \dfrac{3x+5}{7} + x^2$

1.2 $f(x) = \dfrac{1}{3x+5} + \dfrac{1}{1-2x}$

1.3 $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-1}$

1.4 $f(x) = \dfrac{x^3-1}{2x^2+3x-9}$

1.5 $f(x) = \dfrac{1}{x+2} + \sqrt{3-x}$

1.6 $f(x) = \log_3(2x-1)$

1.7 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} + \ln x$

1.8 $f(x) = \sqrt{1-|x|}$

1.9 $f(x) = \sqrt{x} - \ln(2x-3) + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

1.10 $f(x) = \sqrt{1-x} + \log_3(x+1)$

1.11 $f(x) = \dfrac{2x}{\log(x+5)} - \dfrac{4}{x} + e^x$

1.12 $f(x) = \dfrac{5x-1}{\log_{0,5}(2x+1)} + \sqrt{3-x}$

1.13 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\ln(9-x)}$

1.14 $f(x) = \dfrac{\ln(3-2x)}{\sqrt{x}}$

1.15 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{12-x-x^2}$

1.16 $f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{1+2x}}$

1.17 $f(x) = \dfrac{2x}{x^3+8x^2+15x} + \sqrt{-x-4}$

1.18 $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{5+x}$

1.19 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-4x}} + \sqrt{4x+9}$

1.20 $f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$

1.21 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x^2-4}$

1.22 $f(x) = \dfrac{3-x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

1.23 $f(x) = \sqrt{-2x^2+3x+2} + \sqrt[3]{x}$

1.24 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-21}} + \dfrac{3}{x-8}$

1.25 $f(x) = \sqrt{-x^2+5x+14} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

1.26 $f(x) = \log_2(x^2-4x+4)$

1.27 $f(x) = \log(x^2-1) + \dfrac{3x}{x^2-4}$

1.28 $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-3x)}{x+5}$

1.29 $f(x) = \dfrac{3}{16-x^2} + \log(x^3-x)$

1.30 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-4x+1}}$

1.31 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2x^2-5x-3}}$

1.32 $f(x) = \sqrt{x^2+4x-5} \cdot \ln(x+5)$

1.33 $f(x) = \log_4(2x+7) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

1.34 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}} + \log(x^2-4x-5)$

1.35 $f(x) = \dfrac{2-3\log_5(2x-3)}{\sqrt{1-x}}$

1.36 $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2-6x+9}\right)$

1.37 $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1-4x^2)}$

1.38 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln(2x-4)}$

1.39 $f(x) = \dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2+x+6}}$

1.40 $f(x) = \dfrac{\log_3(3-2x-x^2)}{\sqrt{x}-1}$

1.41 $f(x) = \log(x^2-4) + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

1.42 $f(x) = \dfrac{\log(x^2+5x+6)}{\sqrt{x}}$

1.43 $f(x) = \dfrac{x+1}{\log_2(3x-5)} + \sqrt{1-x^2}$

1.44 $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+9x+10}}{1-\log x}$

1.45 $f(x) = \sqrt{4x-x^3}$

1.46 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8-x^3}}$

1.47 $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+2}{x-3}}$

1.48 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-16}{x+2}}$

1.49 $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

1.50 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

1.51 $f(x) = \dfrac{1}{2^x-8} + \sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$

1.52 $f(x) = \sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$

1.53 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{2+x-x^2}}$

1.54 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x+1}}$

1.55 $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x-4}\right)$

1.56 $f(x) = \log_3\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)$

1.57 $f(x) = \log\left(\dfrac{2}{5+x}-1\right)$

1.58 $f(x) = \log\dfrac{x^2+6}{x^2+3}$

1.59 $f(x) = \log_2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$

1.60 $f(x) = \log(\log x) + \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

1.61 $f(x) = \sqrt{1-\log x}$

1.62 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{1-\log_2 x}}$

1.63 $f(x) = \ln\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$

1.64 $f(x) = \log_3(\ln x - 1)$

1.65 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-x}}{e^x-1}$

1.66 $f(x) = \sqrt{3^x-9}$

1.67 $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{x-1}$

1.68 $f(x) = \log(3^x-27)$

1.69 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-2}$

1.70 $f(x) = \sqrt{\log_4(1+5x)}$

1.71 $f(x) = \sqrt{\log_{0,3}(4-2x)}$

1.72 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\log_{0,1}(2x+4)}}$

1.73 $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\ln(3+5x)}}$

1.74 $f(x) = \sqrt{1-\log(x-1)} + \sqrt{\dfrac{4-x}{x+2}}$

1.75 $f(x) = \sqrt{\log\left(\dfrac{x^2 - 2x}{3}\right)}$

1.76 $f(x) = \sqrt{\log_3\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}$

1.77 $f(x) = \sqrt{\log_{0,4}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)}$

1.78 $f(x) = \sqrt{\log(\cos x)}$

1.79 $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{4 - x^2}$

1.80 $f(x) = \arccos(x+1)$

1.81 $f(x) = 3\arcsin(1 - 2x)$

1.82 $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x+1}{2}\right) + \dfrac{1+x}{\sqrt{1-3x}}$

1.83 $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x-3}{2}\right) + \ln(3 - x)$

1.84 $f(x) = \arccos\left(\dfrac{3-2x}{15}\right) + \sqrt{x^2 - 2x - 35}$

1.85 $f(x) = \sqrt{4 - x^2} - 2\arccos\left(\dfrac{2x+5}{3}\right)$

1.86 $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-2x}{4}\right) + \dfrac{1}{\ln x}$

1.87 $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{3+2x}{2}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

1.88 $f(x) = \log(2x^2 + 4x - 6) + \arcsin\dfrac{x}{2}$

1.89 $f(x) = \arccos(x-1) + \dfrac{3x}{\ln(x-1)}$

1.90 $f(x) = \arcsin\dfrac{4}{x}$

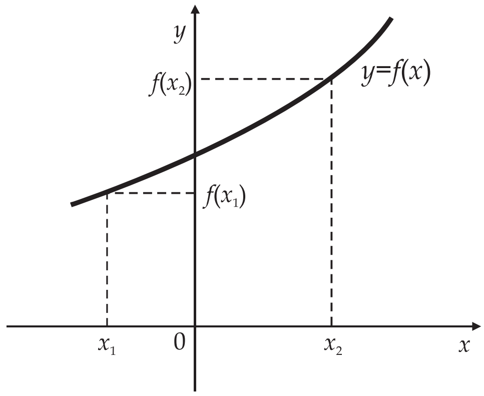
1.2 Základné vlastnosti funkcie

1.2.1 Monotónnosť funkcie

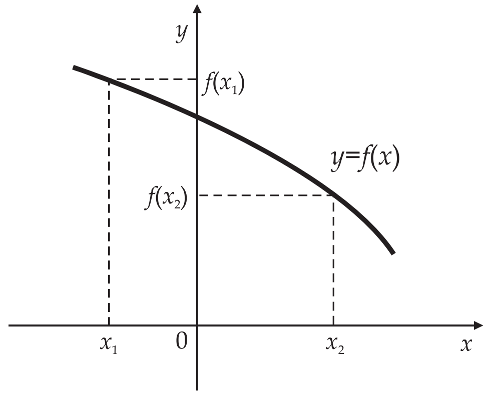
Funkcia $f(x)$ sa nazýva **rastúca (klesajúca)** na množine M_1, $M_1 \subset D_f$, ak pre každé $x_1, x_2 \in M_1$ také, že $x_1 < x_2$, platí

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \Big(f(x_1) > f(x_2)\Big).$$

Ak $M_1 = D_f$ hovoríme, že funkcia $f(x)$ je **rastúca (klesajúca)**.



Rastúca funkcia



Klesajúca funkcia