FUNKCIE

Funkcia – základné pojmy. Graf funkcie

V praxi sa často stretávame so skúmaním závislosti veľkosti niektorých veličín od veľkosti iných veličín, napríklad

- dĺžka kružnice ℓ závisí od jej priemeru d – väčšina z nás pozná vzťah $\ell = \pi d$. To je príklad závislosti jednej veličiny ℓ na jednej veličine d;

- veľkosť c prepony pravouhlého trojuholníka závisí od veľkostí a a b jeho odvesien – z Pytagorovej vety vieme, že $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. To je ale príklad závislosti jednej veličiny c na dvoch veličinách a a b;

- poznáte Ohmov zákon?

Závislosti, ktoré existujú medzi veličinami, viedli ku vzniku pojmu funkcia. My sa budeme zaoberať len prípadom závislosti jednej veličiny od nejakej inej veličiny (za predpokladu, že tú závislosť poznáme), ktorej budeme hovoriť funkcia jednej reálnej premennej.

Definícia 1 *Nech M je nejaká množina reálnych čísel. Predpokladajme, že je dané isté pravidlo, podľa ktorého je každému prvku x z množiny M priradené* **jediné** *reálne číslo y. Potom hovoríme, že* **na množine M je definovaná funkcia jednej reálnej premennej**.

Označenie x, ktoré môže znamenať ľubovoľný prvok množiny M, nazývame **nezávisle premennou** a y nazývame **závisle premennou**.

Táto definícia nahrádza v podstate pojem funkcia pojmom priradenie, ktorý však nie je definovaný. Intuitívne však vieme o čo ide. Neraz sa používa nasledujúca ekvivalentná modifikácia tejto definície (dúfame, že aspoň jedna z týchto dvoch definícii je vám známa).

Definícia 2 *Nech $\mathbb{R}$ je množina všetkých reálnych čísel a $M \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľná množina.* **Funkciou jednej reálnej premennej definovanou na množine** *M nazývame každú množinu f usporiadaných dvojíc $[x, y] \in M \times \mathbb{R}$,*[1] *pre ktorú platí: ku každému $x \in M$ existuje* **práve jedno** *$y \in \mathbb{R}$ také, že $[x, y] \in f$. Množine M hovoríme* **definičný obor funkcie** *f a označujeme ho $\mathcal{D}(f)$ alebo $\mathcal{D}_f$.*

Často nahrádzame zápis $[x, y] \in f$ zápisom $y = f(x)$, pričom $f(x)$ nazývame **hodnotou funkcie f v čísle (alebo bode)** x – teda $f(x)$ je číslo, ktoré je funkciou f priradené číslu x. Hodnota funkcie f v bode x (t. j. $f(x)$) nám umožňuje aj tento zápis funkcie $x \to f(x)$. Z definície 2 ľahko vidno, že platí:

Veta 1 *Dve funkcie f_1 a f_2 s definičnými obormi M_1 a M_2 sú totožné práve vtedy, ak $M_1 = M_2$ a súčasne pre každé $x \in M_1$ platí $f_1(x) = f_2(x)$, t. j. v každom bode (čísle) definičného oboru obe funkcie nadobúdajú rovnakú hodnotu.*

Príklad 1 *Nech definičný obor funkcie f je množina reálnych čísel a pravidlo priradenie nech je dané rovnicou*

$$y = 2x + 5, \tag{1}$$

t. j. k reálnemu číslu x priradíme číslo y, ktoré dostaneme tak, že číslo x násobíme dvoma a k získanému výsledku pričítame číslo 5. □

[1] Teda $f \subset M \times \mathbb{R}$. Pripomíname, že tzv. karteziánsky súčin dvoch množín A a B (v danom poradí) označujeme zápisom $A \times B$ a je to množina všetkých takých usporiadaných dvojíc $[a, b]$, že $a \in A$ a $b \in B$.

Poznámka 1 Pravidlu priradenia $y = f(x)$, ktoré je typu (1) hovoríme aj **predpis funkcie**. Teda predpis funkcie je „zápis typu y rovná sa výraz $f(x)$“. Ak poznáme predpis funkcie a nie je špecifikovaný jej definičný obor, tak za definičný obor funkcie berieme „najväčšiu“ podmnožinu množiny reálnych čísel, na ktorej existuje výraz $f(x)$.

Základné problémy spojené s definičným oborom

V úlohách na určenie definičného oboru, ktoré sa riešia v základnom kurze vyššej matematiky na stredných a vysokých školách, sa vyskytujú najčastejšie nasledujúce „podmienky“ definičného oboru:

I. Menovateľ výrazu sa nesmie nesmie rovnať nule – „nulou nedelíme“. Stručne to zapíšeme v symbolickom tvare: $\dfrac{1}{\neq 0}$.

II. Pod párnou[2] odmocninou sa nesmie vyskytnúť záporné číslo — stručne: $\sqrt[2n]{\geqq 0}$, $n \in \mathbb{N}$.

III. Vo vnútri logaritmu sa môže vyskytnúť len kladné číslo — stručne: $\log_a(> 0)$.

IV. Argument funkcie[3] arcsin musí byť z intervalu $[-1; 1]$ — $\arcsin(\in [-1; 1])$.

V. Argument funkcie arccos musí byť z intervalu $[-1; 1]$ — $\arccos(\in [-1; 1])$.

Poznámka 2 Symbolický zápis sa používa nasledujúcim spôsobom: výraz, ktorý sa nachádza na mieste argumentu menovateľa, odmocniny, logaritmu, arkussínusu alebo arkuskosínusu sa „odkreslí“ a „pripojí“ sa symbol uvedený vyššie.

Príklad 2 *Určme definičný obor funkcie* $f : y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$.

Riešenie. Na základe poznámky 1 je potrebné určiť všetky tie $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré existuje druhá odmocnina zlomku $(1 - x)/(x + 2)$. Najprv vypíšeme podmienky, môžeme postupovať „systematicky“ v poradí podmienok I–V.

Všimneme si, že v predpise funkcie máme menovateľ, a teda píšeme:

$$1) \quad x + 2 \neq 0.$$

Všimneme si aj druhú (párnu!) odmocninu a vypíšeme druhú podmienku:

$$2) \quad \frac{1-x}{x+2} \geqq 0\,.$$

Keďže logaritmy, arkussínusy ani arkuskosínusy sa v predpise nevyskytujú, podmienky 1) a 2) určujú definičný obor.

Na určenie definičného oboru je teda potrebné v množine reálnych čísel vyriešiť nerovnicu $\dfrac{1-x}{x+2} \geqq 0$, a pri jej riešení bude potrebné uvažovať jej definičný obor $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Overte, že jej riešením je množina $(-2, 1\rangle = \mathcal{D}(f)$.

[2] V časti o výrazoch sme definovali „nepárnu“ n-tú odmocninu pre ľubovoľný reálny argument tak, aby bola inverznou funkciou pre mocninovú funkciu x^n. Zápis n-tej odmocniny v tvare mocniny $1/n$ je korektný pre nezáporné argumenty, pre reálne argumenty môže viesť k chybám, napríklad: $\sqrt[3]{-8} = -2$, ale platí aj $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3} \stackrel{?}{=} (-8)^{2/6} = \left[(-8)^2\right]^{1/6} = \sqrt[6]{64} = 2$?

[3] Funkcie arcsin a arccos budú definované neskôr, teraz nám stačí informácia o definičnom obore týchto funkcii – $\mathcal{D} = [-1; 1]$.

Poznámka 3 Treba si uvedomiť, že podmienky I–V sú „najčastejšie“, ale nie jediné. Napríklad, ak sa premenná x vyskytuje ako základ logaritmu vo funkciách $f(x) = \log_x 5$ alebo $g(x) = \log_x x$, objavuje sa ďalšia podmienka – $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$.

Definícia 3 *Množinu*

$$\mathcal{H}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = f(x) \ \textit{a súčasne} \ x \in \mathcal{D}(f)\}$$

nazývame **oborom hodnôt funkcie** f*.*

Definícia 4 *Funkciu f nazývame* **prostá funkcia** *práve vtedy, ak*

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f))\,(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))\,, \tag{2}$$

t. j., ak funkcia ľubovoľným dvom rôznym číslam z jej definičného oboru priradí rôzne funkčné hodnoty.

Príklad 3 *Daná je funkcia*[4] $g\colon y = \dfrac{3}{t^2 - 4t + 3}$*. Zistime: a) jej definičný obor; b) či $1 \in \mathcal{H}(g)$; c) či je funkcia g prostá.*

Riešenie.

a) Definičným oborom funkcie g je množina všetkých $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré je menovateľ z jej predpisu nenulový. A to je v prípade, keď $t^2 - 4t + 3 \neq 0$, t. j. $(t-1)(t-3) \neq 0$. Odtiaľ $t \notin \{1; 3\}$ a teda definičným oborom danej funkcie je množina

$$\mathcal{D}(g) = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty).$$

b) Máme zistiť, pre ktoré $t \in \mathcal{D}(g)$ platí

$$1 = \frac{3}{t^2 - 4t + 3}.$$

Riešením tejto rovnice je $t = 0$ alebo $t = 4$. Keďže čísla 0 a 4 sú z definičného oboru danej funkcie, tak na základe definície 3 je číslo 1 z jej oboru hodnôt, t. j. $1 \in \mathcal{H}(g)$. Všimnime si, že platí

$$1 = g(0), \quad \text{ale aj} \quad 1 = g(4). \tag{3}$$

c) V časti b) tohto príkladu sme zistili, že $g(0) = g(4)$. Teda neplatí (2), lebo existujú dve rôzne čísla množiny $\mathcal{D}(g)$ – čísla 0 a 4, ktorým naša funkcia priradila rovnaké funkčné hodnoty (číslo 1). Poznamenávame, že takýchto dvojíc čísel je viac. □

Definícia 5 **Grafom funkcie** *f vo zvolenej pravouhlej súradnicovej sústave Oxy v rovine nazývame množinu všetkých bodov $P[x, f(x)]$, kde $x \in \mathcal{D}(f)$. Špeciálne: grafom funkcie f na množine $A \subset \mathcal{D}(f)$ je množina bodov $P[x, f(x)]$, kde $x \in A$.*

Je zrejmé, že množina B bodov v rovine je grafom nejakej funkcie práve vtedy, keď každá priamka rovnobežná s osou y má s množinou B nanajvýš jeden spoločný bod.

Dobre nakreslený graf funkcie je názorný prostriedok na skúmanie jej vlastností. Treba si ale uvedomiť, že obrázok grafu nepostačuje na dôkaz nejakých tvrdení o funkcii. Tento fakt sa neraz porušuje, a to v najmä prípadoch, keď by k exaktnému dôkazu príslušného tvrdenia mohol graf funkcie pomôcť. My v tomto smere nebudeme výnimkou. Uvedieme niektoré takéto tvrdenia. Ak $\mathcal{G}(f)$ je graf danej funkcie f, tak

[4] Tu je funkcia označená písmenom g a nezávisle premenná písmenom t.

- definičný obor $\mathcal{D}(f)$ dostaneme ako kolmý priemet grafu $\mathcal{G}(f)$ na os x;
- obor hodnôt $\mathcal{H}(f)$ dostaneme ako kolmý priemet grafu $\mathcal{G}(f)$ na os y;
- funkcia f je prostá práve vtedy, keď ľubovoľná priamka rovnobežná s osou x má s grafom $\mathcal{G}(f)$ maximálne jeden spoločný bod;
- ak $0 \in \mathcal{D}(f)$, tak graf $\mathcal{G}(f)$ má s osou y práve jeden spoločný bod, ktorého súradnica na osi y je $f(0)$ (teda v súradnicovej sústave Oxy má súradnice $[0; f(0)]$);
- graf $\mathcal{G}(f)$ má s osou x spoločné body, ktorých súradnice na osi x sú koreňmi rovnice $f(x)=0$ (teda ak napr. číslo a je koreňom tejto rovnice, tak v súradnicovej sústave Oxy má graf $\mathcal{G}(f)$ s osou x spoločný bod so súradnicami $[a; 0]$ – v takom prípade hovoríme, že graf pretína os x v bode a).

Počas štúdia na našej fakulte predpokladáme, že máte istú zručnosť v znázorňovaní (kreslení) grafov niektorých funkcií. Je nevyhnutné poznať grafy základných funkcií, s ktorými sa budeme zaoberať v nasledujúcom kapitolách. Sú to:

1. graf konštantnej, lineárnej a kvadratickej funkcie;
2. graf lineárne lomenej funkcie;
3. graf exponenciálnej a logaritmickej funkcie;
4. grafy goniometrických funkcií;
5. a nakoniec grafy funkcií, ktorých prepisy dostaneme z predpisov funkcií 1. až 4. špeciálnymi úpravami (transformáciami), ktoré sú nižšie prezentované. .

Možno ste sa už stretli s pojmami ako súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch funkcií, ale aj s pojmom zložená funkcia (rovnosť dvoch funkcií je v podstate uvedená vo vete 1). Sústredíme pozornosť na také špeciálne transformácie funkcií, ktoré sa dajú jednoducho interpretovať na ich grafoch. Sú to:[5]

1. **„pripočítanie konštanty“**: ak a je ľubovoľné pevné reálne číslo, tak graf funkcie $y = f(x) + \boldsymbol{a}$ môžeme zostrojiť z grafu funkcie $y = f(x)$ jeho posunutím, ktoré je dané vektorom $\boldsymbol{v} = [0; a]$, t. j. posunutím v smere osi y (je zrejmé, že ak $a > 0$, tak posúvame $\mathcal{G}(f)$ o hodnotu a smerom „nahor“ a ak $a < 0$, tak posúvame $\mathcal{G}(f)$ o hodnotu $(-a)$ smerom „nadol“);
2. **„násobenie číslom“ $\boldsymbol{-1}$**: graf funkcie $y = \boldsymbol{-}f(x)$ je osovo súmerný vzhľadom na os x s grafom funkcie $y = f(x)$;
3. ak a je ľubovoľné pevné reálne číslo, tak graf funkcie $y = f(\boldsymbol{x - a})$ získame z grafu funkcie $y = f(\boldsymbol{x})$ jeho posunutím, ktoré je dané vektorom $\boldsymbol{v} = [a; 0]$, t. j. posunutím v smere osi x . Špeciálne: ak $a > 0$, tak posúvame $\mathcal{G}(f)$ o hodnotu a doprava (t. j. v smere osi x) a ak $a < 0$, tak posúvame $\mathcal{G}(f)$ o hodnotu $(-a)$ doľava (t. j. proti smeru osi x);
4. ak $k \neq 1$ je ľubovoľné pevné kladné reálne číslo, tak graf funkcie $y = f(\boldsymbol{k \cdot x})$ získame z grafu funkcie $y = f(\boldsymbol{x})$
    - v prípade $k > 1$ tzv. k-násobným zúžením (kontrakciou);

[5] Pri pojme funkcia sa ďalej obmedzíme len na jej predpis – nebudeme skúmať jej definičný obor.

- v prípade $k < 1$ tzv. $(1/k)$-násobným roztiahnutím (dilatáciou);

5. ak $k \neq 1$ je ľubovoľné pevné kladné reálne číslo, tak graf funkcie $y = \boldsymbol{k} \cdot f(x)$ získame z grafu funkcie $y = f(x)$
   - v prípade $k > 1$ tzv. k-násobným roztiahnutím (dilatáciou);
   - v prípade $k < 1$ tzv. $(1/k)$-násobným zúžením (kontrakciou).

Úlohy

I. Určte definičné obory funkcií:

1. $y = \dfrac{5x+9}{5+3x}$; $[x \neq -5/3,\ x \in \mathbb{R}]$
2. $y = \dfrac{7x^2+9}{\sqrt{2-3x}}$; $[x \in (-\infty, 2/3)]$
3. $y = \sqrt{(x-3)(x+2)}$; $[x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 3, +\infty)]$
4. $y = \dfrac{x^2}{|x|+1} + \sqrt{1-|x|}$; $[x \in \langle -1, 1\rangle]$
5. $y = \sqrt{x-1} + 3\sqrt{1-x} + x\sqrt{x^2+8}$. $[x = 1]$
6. $y = \log(x^2+6x+9) - \sqrt{6-x-x^2}$; $[(-3; 2\rangle]$
7. $y = \log(16x - x^3)$; $[(-\infty; -4) \cup (0; 4)]$
8. $y = \log\sqrt{6-x-x^2}$; $[(-3; 2)]$
9. $y = \sqrt{7+6x-x^2} - 3\log(x^2+2x+4)$; $[\langle -1; 7\rangle]$
10. $y = \log\dfrac{x^2+2x+4}{7+6x-x^2} + \sqrt[5]{1-x^4}$; $[(-1; 7)]$
11. $y = \dfrac{x^2+2x+4}{\log(7+6x-x^2)}$; $[(-1; 7) - \{3 \pm \sqrt{15}\}]$
12. $y = \log(|x-2| - |x-4|)$. $[(3; \infty)]$
13. $y = \dfrac{2+x}{x-2} + \dfrac{x^2+5}{x+3}$; $[\mathbb{R} - \{-3; 2\}]$
14. $y = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$; $[\mathbb{R} - \{1; 3\}]$
15. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$; $[\mathbb{R} - \{1\}]$
16. $y = \dfrac{2-5x}{x^3-4x^2}$; $[\mathbb{R} - \{0; 4\}]$
17. $y = \dfrac{x^2-3x+10}{x^3+2x^2+x+2}$; $[\mathbb{R} - \{-2\}]$
18. $y = \sqrt{x+3} - 3\sqrt{2x-7}$; $[\langle 7/2; \infty)]$
19. $y = \sqrt{10-x} \cdot \sqrt{3x+6}$; $[\langle -2; 10\rangle]$

20. $y=\sqrt{x^2-x-2}\,;$ $[(-\infty;-1\rangle\cup\langle 2;\infty)]$

21. $y=\sqrt{2+x-x^2}\,;$ $[\langle -1;2\rangle]$

22. $y=\sqrt{x^3+2x^2+x+2}\,;$ $[\langle -3;-2\rangle\cup\langle 0;\infty)]$

23. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-7x+12}}\,;$ $[(-\infty;3)\cup(4;\infty)]$

24. $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{6x^2+x-2}}\,;$ $[(-\infty;-2/3)\cup(1/2;\infty)]$

25. $y=\dfrac{7x^2-3x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,;$ $[(-3;3)]$

26. $y=\sqrt{\dfrac{3}{x-4}}\,;$ $[(4;\infty)]$

27. $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}}\,;$ $[(-\infty;-4)\cup\langle 3;\infty)]$

28. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}}\,;$ $[(-\infty;-2)\cup\langle 1;\infty)]$

29. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}}\,;$ $[(-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;2)\cup(3;\infty)]$

30. $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,;$ $[(-1;1\rangle\cup\langle 2;3)]$

31. $y=\ln(x-5)\,;$ $[(5;\infty)]$

32. $y=\ln x-5\,;$ $[(0;\infty)]$

33. $y=\log(x^2+4x)\,;$ $[(-\infty;-4)\cup(0;\infty)]$

34. $y=\log(x^2+x-6)\,;$ $[(-\infty;-3)\cup(2;\infty)]$

35. $y=x\cdot\log_2\dfrac{10+x}{10-x}\,;$ $[(-10;10)]$

36. $y=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}\,;$ $[(-\infty;-2)\cup(1;\infty)]$

37. $y=3x+5-2\log_3(x^3+3x^2+x+3)\,;$ $[(-3;\infty)]$

38. $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\,;$ $[\mathbb{R}-\{-1\}]$

39. $y=2^{\sqrt{x^2+3x-10}}\,;$ $[(-\infty;-5\rangle\cup\langle 2;\infty)]$

40. $y=5^{\log\frac{x-3}{x+4}}\,;$ $[(-\infty;-4)\cup(3;\infty)]$

41. $y=\dfrac{2^{4x+2}}{3^{2x+1}}\,;$ $[\mathbb{R}]$

42. $y=\dfrac{4}{3^{\frac{3x-5}{\sqrt{1-x^2}}}}\,;$ $[(-1;1)]$

43. $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\log(2x-3)\,;$ $[(3/2;2)\cup(2;\infty)]$

44. $y = \sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{2x-5}} + \ln(2x-3)\,;$ $[(3/2;5/2) \cup (5/2;\infty)]$

45. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+2}} + \sqrt{4-x^2}\,;$ $[(-2;2\rangle]$

46. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x-3}{x+2}} - 3\log(x^2+4x+4)\,;$ $[\mathbb{R} - \{-2\}]$

47. $y = \log_{12}(2x+6) + \sqrt{x^2-4x+3}\,;$ $[(-3;1\rangle \cup \langle 3;\infty)]$

48. $y = \dfrac{\ln x}{x-3} + \sqrt{6x-x^2+3}\,;$ $[\emptyset]$

49. $y = \dfrac{\ln(3x+21)}{x^3-3x^2+2x}\,;$ $[(-7;0) \cup (0;1) \cup (1;2) \cup (2;\infty)]$

50. $y = \dfrac{\ln(3-2x)}{\sqrt{x^2+4x-5}}\,;$ $[(-\infty;-5) \cup (1;3/2)]$

51. $y = \dfrac{\ln x - 5}{\sqrt{x^2-6x+8}}\,;$ $[(0;2) \cup (4;\infty)]$

52. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}}{\ln(3-2x)} + (\mathrm{e}^x+2)^3\,;$ $[(-\infty;-5\rangle \cup (1;3/2)]$

Konštantná, lineárna a kvadratická funkcia. Lineárna lomená funkcia a funkcie s absolútnou hodnotou

Definícia 6 **Konštantnou funkciou** *nazývame každú funkciu, ktorá je daná predpisom*

$$y = a, \tag{4}$$

kde a je reálne číslo.

Definičným oborom konštantnej funkcie je množina $\mathbb{R}$ a jej grafom je priamka, ktorá je rovnobežná s osou x v Oxy (t. j. všetky body so súradnicami $P[x; a]$, kde x je ľubovoľné reálne číslo). Špeciálne: grafom funkcie $y = 0$ je os x. Nie je to prostá funkcia a jej oborom hodnôt je jednoprvková množina $\mathcal{H} = \{a\}$.

Definícia 7 **Lineárnou funkciou** *nazývame každú funkciu, ktorá je daná predpisom*

$$y = ax + b, \tag{5}$$

kde a a b sú reálne čísla.

Definičným oborom lineárnej funkcie je množina $\mathbb{R}$. Platí:

- ak $a = 0$, tak je to konštantná funkcia – jej základné vlastnosti sme už uviedli;
- ak v (5) je $a \neq 0$, tak jej grafom je priamka, ktorá nie je rovnobežná s osou y a ani s osou x v súradnicovej sústave Oxy. Jej priesečník s osou x má súradnice $[-b/a; 0]$ a s osou y sú jeho súradnice $[0; b]$ (teda pre $b = 0$ je to spoločný bod súradnicových osí – začiatok súradnicovej sústavy O[0;0]). Je to prostá funkcia a jej oborom hodnôt je množina $\mathbb{R}$.

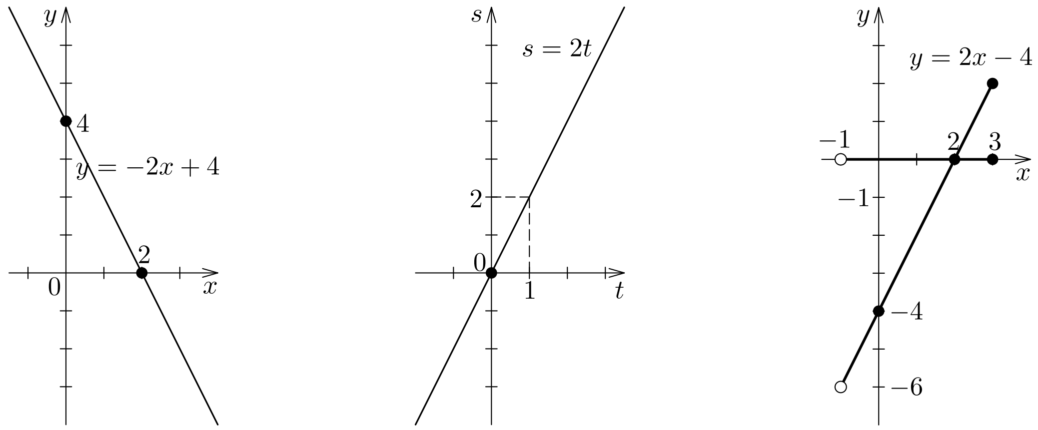
Poznámka 4 *Na znázornenie grafu lineárnej funkcie, t. j. priamky, nám stačí určiť dva body, ktoré na nej ležia – často je výhodné použiť jej priesečník s osou x, resp. s osou y.*

Príklad 4 *Načrtnime grafy funkcií a určme ich obor hodnôt: a) $y = -2x + 4$; b) $s = 2t$; c) $y = 2x - 4$, $x \in (-1; 3\rangle$.*

Riešenie.

a) Je to lineárna funkcia, ktorej definičný obor je množina $\mathbb{R}$. Jej grafom je priamka. Os y pretína v bode, ktorého y-ová súradnica je $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$. Os x pretína v bode, ktorého x-ová súradnica je riešením rovnice $-2x + 4 = 0$, t. j. $x = 2$. Takto stačí v súradnicovej sústave Oxy zakresliť body so súradnicami $[0; 4]$ (priesečník s osou y) a $[2; 0]$ (priesečník s osou x) a týmito bodmi „preložiť priamku" – pozri obr. a). Oborom hodnôt danej funkcie je celá množina reálnych čísel.

b) Aj $s = 2t$ je lineárna funkcia, ktorej definičný obor je množina $\mathbb{R}$ (teraz má nezávisle premenná označenie t a závisle premenná je s). Jej grafom je priamka. Os s pretína v bode, ktorého súradnica s je $s = 2 \cdot 0 = 0$. Dostali sme bod, ktorý v súradnicovej sústave Ots má súradnice $[0; 0]$. Teda je to priesečník aj s druhou osou t. Potrebujeme ešte jeden bod hľadanej priamky. Daná funkcia priradí napr. číslu $t = 1$ číslo $s = 2 \cdot 1 = 2$. To znamená, že bod so súradnicami $[1; 2]$ je tiež bodom grafu danej funkcie, ktorý dostaneme „preložením" priamky bodmi, ktorých súradnice sú $[0; 0]$ a $[1; 2]$ (pozri obr. b)). Aj v tomto prípade je oborom hodnôt danej funkcie množina $\mathbb{R}$.



Obr. 1: Náčrt grafov funkcií príkladu 4

c) Opäť ide o lineárnu funkciu, ale tentoraz jej definičný obor je stanovený: je to množina $\mathcal{D} = (-1; 3\rangle$. Tak ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch nakreslíme najprv graf funkcie $y = 2x - 4$, kde $x \in \mathbb{R}$. Ľahko zistíme, že je to priamka, ktorá v súradnicovej sústave Oxy pretína os y v bode so súradnicami $[0; -4]$ a os x v bode so súradnicami $[2; 0]$. Zostrojíme priamku, ktorá je určená tými dvoma bodmi. A teraz zohľadníme to, že $x \in (-1; 3\rangle$: na to stačí „vykrojiť“ tú časť priamky, ktorá zodpovedá intervalu $(-1; 3\rangle$ – na obr. c) je to „plne nakreslená“ úsečka.

Obor hodnôt danej funkcie môžeme získať kolmým priemetom tejto úsečky na os y (skúste to). Môžeme ho dostať aj takto: definičný obor môžeme zapísať aj takto

$$-1 < \boldsymbol{x} \leqq 3.$$

Túto sústavu, v postate dvoch nerovníc, upravíme ekvivalentnými úpravami tak aby sme na mieste $\boldsymbol{x}$ získali výraz z predpisu funkcie, t. j. $\boldsymbol{2x - 4}$. Zrejme

$$-1 < \boldsymbol{x} \leqq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < \boldsymbol{2x} \leqq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad -6 < \underbrace{\boldsymbol{2x - 4}}_{=y} \leqq 2.$$

Odtiaľ vidno, že oborom hodnôt danej funkcie je množine $\mathcal{H} = (-6; 2\rangle$. □

Poznamenávame, že pri riešení tohto príkladu sme asi robili dosť detailný výklad. Určite to išlo aj rýchlejšie, napríklad stačí spojiť úsečkou krajné body (obr. 1 vpravo).

Príklad 5 *Určme všetky lineárne funkcie, ktoré obsahujú usporiadané dvojice* [1; 8] *a* [−1; 2].

Riešenie. Našou úlohou je určiť všetky také dvojice reálnych čísel a a b, že pre funkčné hodnoty lineárnej funkcie $f(x) = ax + b$ platí $f(1) = 8$ a $f(-1) = 2$. Teda

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b &= 8, \\ a \cdot (-1) + b &= 2; \end{aligned} \tag{6}$$

odkiaľ $a = 3$ a $b = 5$. Riešením danej úlohy je jediná lineárna funkcia $y = 3x + 5$.

Všimnime si koeficient a v zovšeobecnení tohto príkladu: chceme určiť všetky lineárne funkcie, ktoré obsahujú usporiadané dvojice $[x_1;\, f(x_1)]$ a $[x_2;\, f(x_2)]$. V tomto prípade by sústava (6) mala tvar

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 + b &= f(x_1), \\ a \cdot x_2 + b &= f(x_2), \end{aligned}$$

odkiaľ pre $x_1 \neq x_2$ je

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,. \tag{7}$$

Získali sme vyjadrenie smernice priamky, prechádzajúcej bodmi $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.[6] Určenie koeficientu b ponechávame na vás. Zvážte, čo znamená prípad $x_1 = x_2$, pri ktorom sa v menovateli objaví nula!

Definícia 8 Kvadratickou funkciou *nazývame každú funkciu, ktorá je daná predpisom*

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{8}$$

pričom a je reálne číslo rôzne od nuly, b a c sú ľubovoľné reálne čísla.

Definičným oborom kvadratickej funkcie je množina všetkých reálnych čísel. Grafom kvadratickej funkcie v súradnicovej sústave Oxy je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y.[7] Funkcia (8) priradí číslu 0 číslo $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, a preto táto parabola pretína os y v bode $[0; c]$.

S priesečníkmi s osou x je to trochu zložitejšie: x-ová súradnica ľubovoľného priesečníka paraboly musí spĺňať rovnicu

$$0 = ax^2 + bx + c,$$

čo je kvadratická rovnica. Počet reálnych koreňov tejto rovnice závisí od jej diskriminantu $D = b^2 - 4ac$. Potom

- ak $D > 0$, tak parabola pretína os x v dvoch bodoch, ktorých súradnice sú $[x_1; 0]$ a $[x_2; 0]$, kde
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$
- ak $D = 0$, tak parabola pretína os x v jednom bode („dotýka sa v ňom osi“ x), ktorého súradnice sú $[-b/a; 0]$;
- ak $D < 0$, tak parabola nepretína os x.

Poloha paraboly závisí aj od koeficientu a:

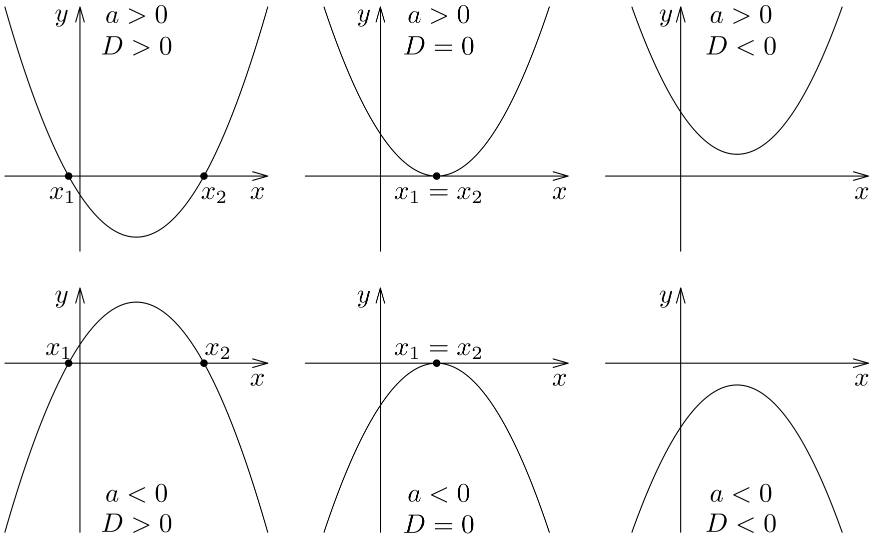
- ak $a > 0$, tak parabola je „obrátená nahor“,
- ak $a < 0$, tak parabola je „obrátená nadol“.

Na obr. 2 je zhrnutie získaných poznatkov o vzájomnej polohe grafu kvadratickej funkcie (paraboly) a osi x. Z neho môžeme konštatovať, že kvadratická funkcia (8) nie je prostá. Jej oborom hodnôt je

- pre $a > 0$ interval typu, $\langle s; \infty)$ (vtedy je parabola „obrátená nahor“),
- ak $a < 0$, interval typu, $(-\infty; s\rangle$ (vtedy je parabola „obrátená nadol“),

[6] Zopakujte si smernicový tvar $y = kx + q$ priamky z analytickej geometrie. Vidíte súvislosti s lineárnou funkciou?

[7] Odporúčame zopakovať si vyjadrenia parabol z analytickej geometrie.



Obr. 2: Vzájomné polohy paraboly a osi x

kde s je reálne číslo (tí, čo sú zbehlejší v analytickej geometrii vedia, že s je druhá súradnica vrcholu paraboly).

Poznámka 5 *Dosiaľ sme si nepovedali, ako nakresliť graf konkrétnej kvadratickej funkcie, teda paraboly. Jeden jej bod rýchlo určíme: je to priesečník s osou y, ktorý má súradnice $[0; c]$. Ak kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$:*

- *má dva rôzne reálne korene x_1 a x_2, tak po označení bodov, ktorých súradnice na osi x sú x_1 a x_2 (sú to body paraboly) stačí si len všimnúť, či je parabola obrátená nahor alebo nadol (to vidíme z toho, či $a > 0$ alebo $a < 0$). Na základe týchto informácií vieme načrtnúť parabolu. Ak by nás zaujímala presná poloha jej vrchola, tak jeho x-ová súradnica m je aritmetickým priemerom čísel x_1 a x_2 (t. j. $m = (x_1 + x_2)/2 = -b/(2a)$ – overte!) a y-ová súradnica je hodnota našej kvadratickej funkcie v bode m;*

- *má jeden dvojnásobný koreň x_1, tak je to jednoduchšie: parabola má vrchol v bode so súradnicami $[x_1; 0]$, v ktorom sa dotýka osi x. Parabolu vieme nakresliť: stačí zvážiť, či je obrátená nahor alebo nadol;*

- *nemá reálny koreň, tak parabola nemá spoločný bod s osou x. Vieme rozhodnúť, či je obrátená nahor alebo nadol a jej priesečník s osou y nám umožní „ju zhruba načrtnúť“. Nezískame tým presné informácie o jej vrchole. Získame ich z nižšie uvedeného postupu.*

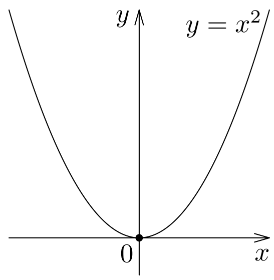
Ak doplníme predpis kvadratickej funkcie $ax^2 + bx + c$ na úplný štvorec, tak môžeme kvadratickú funkciu (8) zapísať v tvare

$$y = a(x - m)^2 + s, \tag{9}$$

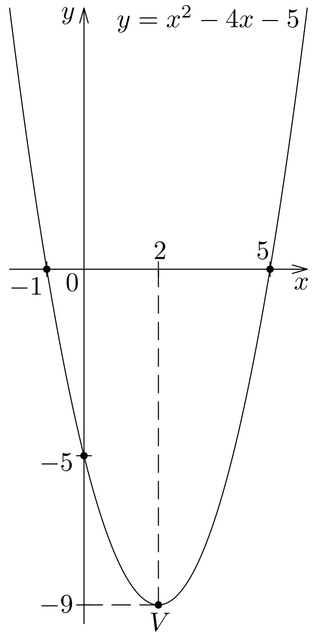
kde m a s sú reálne čísla. Budeme vychádzať z toho, že graf kvadratickej funkcie

$$y = x^2 \tag{10}$$

poznáme – pozri obr. 3. Ukážeme, ako vhodnými transformáciami funkcií získame z grafu funkcie (10) graf funkcie (9):



Obr. 3: Graf kvadratickej funkcie $y = x^2$



Obr. 4: Graf funkcie $y = x^2 - 4x - 5$

1. *ak číslo a je záporné, tak pomocou transformácie „násobenie číslom“* (-1) *dostaneme graf funkcie* $y = -x^2$*, ktorý je osovo súmerný vzhľadom na os* x *s grafom funkcie* $y = x^2$ *(teda pôvodná parabola obrátená nahor sa zmení na parabolu obrátenú nadol);*

2. *graf funkcie* $y = \boldsymbol{a}x^2$ *dostaneme v závislosti od toho, či číslo* a *je kladné, resp. záporné, roztiahnutím alebo zúžením grafu funkcie* $y = x^2$*, resp.* $y = -x^2$*;*

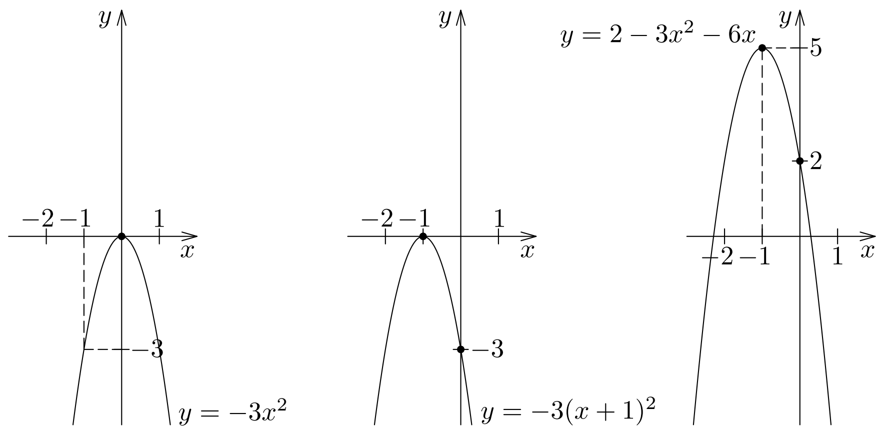
3. *graf funkcie* $y = a(\boldsymbol{x - m})^2$ *dostaneme z grafu funkcie* $y = ax^2$ *posunutím, ktoré je dané vektorom* $\boldsymbol{v} = [m; 0]$ *(t. j. posúvame graf funkcie* $y = ax^2$ *v smere osi* x *alebo proti jej smeru o hodnotu* $|m|$*);*

4. *graf funkcie* $y = a(x - m)^2 \boldsymbol{+ s}$ *dostaneme z grafu funkcie* $y = a(x - m)^2$ *posunutím, ktoré je dané vektorom* $\boldsymbol{v} = [0; s]$*.*

   Tým sme dostali hľadaný graf kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$*.*

Poznámka 6 *V predchádzajúcich úvahách môžeme body 1. a 2. „preskočiť“ za predpokladu, že si zapamätáme graf funkcie* $y = ax^2$*: je to parabola, ktorej osou je os* y *a vrchol má súradnice* $[0; 0]$*. Je obrátená nahor v prípade* $a > 0$ *a obrátená nadol v prípade* $a < 0$*.*

Príklad 6 *Načrtnime grafy funkcií a určme ich obor hodnôt:*
a) $y = x^2 - 4x - 5$*; b)* $y = 2 - 3x^2 - 6x$*; c)* $y = x^2 - 2x + 2$, $x \in (-1; 2\rangle$.



Obr. 5: Postup náčrtu grafu funkcie $y = 2 - 3x^2 - 6x$

Riešenie. Ide o kvadratické funkcie, a preto ich grafmi budú paraboly, resp. „časť paraboly“, ktorých osi sú rovnobežné s osou y.

a) Skúsime to napr. pomocou poznámky 5: overte, že korene zodpovedajúcej kvadratickej rovnice $x^2 - 4x - 5 = 0$ sú $x_1 = 5$ a $x_2 = -1$. To znamená, že parabola pretína os x v dvoch bodoch, ktorých súradnice na osi x sú 5 a -1 (teda dva body paraboly už poznáme – pozri obr. 4). Pre x-ovú súradnicu vrcholu paraboly je $(5 + (-1))/2 = 2$. Daná funkcia priradí číslu 2 číslo $y = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9$, čo je druhá súradnica vrcholu paraboly. Po znázornení vrchola paraboly $V[2; -9]$ vieme parabolu nakresliť (môžeme pri tom využiť to, že parabola pretína os y v bode, ktorého druhá súradnica je $y = 0^2 - 4 \cdot 0 - 5 = -5$) – pozri obr. 4.)

   Ak získanú parabolu kolmo premietneme na os y, tak dostaneme obor hodnôt danej funkcie. Je to interval $\mathcal{H} = \langle -9; \infty)$.

b) Použijeme metódu, ktorá vychádza z transformácií funkcií. Ak doplníme výraz $2 - 3x^2 - 6x$ na úplný štvorec tvaru (9), tak dostaneme (pozri príklad **??**b)) $2 - 3x^2 - 6x = -3\left[x - (-1)\right]^2 + 5$, čo znamená, že našu funkciu môžeme zapísať v tvare

$$y = -3\left[x - (-1)\right]^2 + 5.$$

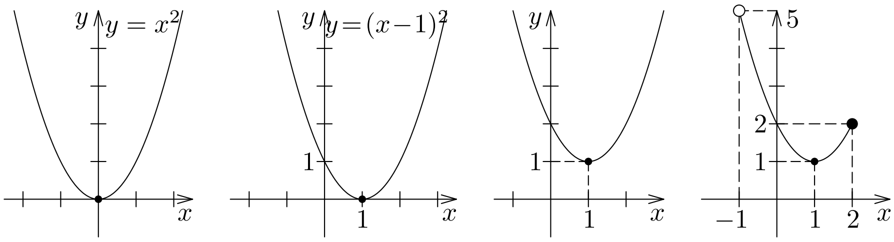
   Graf funkcie $y = -3\boldsymbol{x}^2$ vieme nakresliť (obr. 5 vľavo). Ak ho posunieme o vektor $\boldsymbol{v} = [-1; 0]$ dostaneme z neho graf funkcie $y = -3\left[\boldsymbol{x - (-1)}\right]^2$ (obr. 5 v strede). A ak tento graf posunieme o vektor $\boldsymbol{v} = [0; 5]$, dostaneme graf funkcie $y = -3\left[x - (-1)\right]^2 \boldsymbol{+5}$ (obr. 5 vpravo), čo vlastne je aj graf uvažovanej funkcie $y = 2 - 3x^2 - 6x$.

   Kolmým priemetom výslednej paraboly dostaneme obor hodnôt danej funkcie $\mathcal{H} = (-\infty; 5\rangle$.

c) Tentoraz máme určený definičný obor: je to množina $\mathcal{D} = (-1; 2\rangle$. Najskôr nakreslíme parabolu – graf funkcie s tým istým predpisom $y = x^2 - 2x + 2$, ale pre $x \in \mathbb{R}$. Zodpovedajúca kvadratická rovnica $x^2 - 2x + 2 = 0$ má záporný diskriminant ($D = -4$), a preto parabola nepretína x-ovú os. Pôjdeme na to cez transformácie funkcií: najprv upravíme predpis danej funkcie doplnením na úplný štvorec na tvar (9):

$$y = x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1.$$

   Nakreslíme graf funkcie $y = x^2$ (ten by sme mali poznať) a z neho posunutím o vektor $\boldsymbol{v} = [1; 0]$ dostaneme graf funkcie $y = (\boldsymbol{x - 1})^2$. Ak tento graf posunieme o vektor

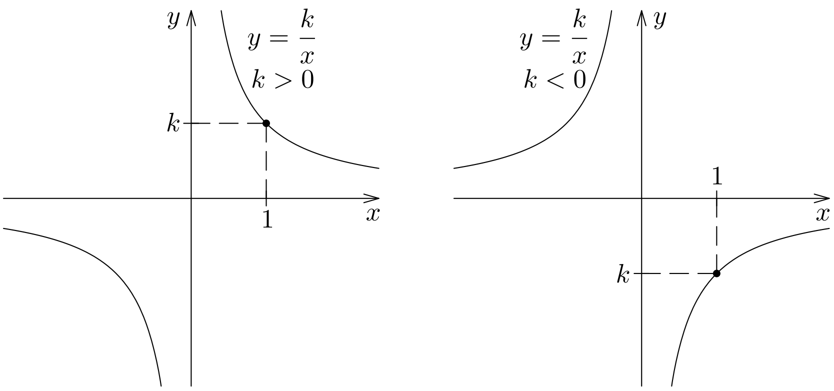


Obr. 6: Postup náčrtu grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 2$

$\boldsymbol{v} = [0; 1]$, dostaneme graf funkcie $y = (x-1)^2\mathbf{+1}$ (obr. 6), čo vlastne je graf našej funkcie $y = x^2 - 2x + 2$ (obr. 6 vpravo). Ešte sa musíme vysporiadať s definičným oborom $\mathcal{D} = (-1; 2\rangle$: „vykrojíme“ zo získaného grafu tú časť paraboly, ktorá zodpovedá hodnotám x z príslušného intervalu $(-1; 2\rangle$. Na obr. 6 je načrtnutý graf danej funkcie. Ak ho kolmo premietneme na os y, dostaneme požadovaný obor hodnôt danej funkcie: $\mathcal{H} = \langle 1; 5)$. □

Príklad 7 *Určme všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je funkcia $f : y = x^2 - 3x + 2$ nezáporná.*

Riešenie. Úloha je ekvivalentná s riešením nerovnice $x^2 - 3x + 2 \geqq 0$. Ľahko sa presvedčíme, že $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$. □



Obr. 7: Graf nepriamej úmernosti

Definícia 9 **Lineárne lomenou funkciou** *nazývame každú funkciu, ktorá je daná predpisom*

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-d/c\}, \tag{11}$$

kde a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, *pričom* $c \neq 0$ *a* $ad - bc \neq 0$.[8]

Poďme skúmať vlastnosti tejto funkcie.

Špeciálnym prípadom lineárne lomenej funkcie je tzv. **nepriama úmernosť**, ktorá je definovaná predpisom

$$y = \frac{k}{x}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ je parameter.} \tag{12}$$

Je zrejmé, že definičným oborom nepriamej úmernosti je množina nenulových reálnych čísel, t. j. $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$. Ak $k > 0$, tak graf nepriamej úmernosti je znázornený na obr. 7 vľavo. Ak $k < 0$, tak pomocou transformácie násobenia číslom (-1) dostaneme jej graf, ktorý je na obr. 7 vpravo. V oboch prípadoch je to „pootočená“ hyperbola, ktorej asymptoty[9] sú súradnicové osi, t. j. priamky $y = 0$ a $x = 0$. Všimnime si, že ak $k > 0$, tak vetvy hyperboly ležia v prvom a v treťom kvadrante a ak $k < 0$, tak sú v druhom a vo štvrtom kvadrante.

Kolmým priemetom týchto hyperbol na os y je množina všetkých nenulových reálnych čísel, a preto oborom hodnôt nepriamej úmernosti je množina

$$\mathcal{H} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty). \tag{13}$$

Príklad 8 *Načrtnime graf funkcie* $y = \dfrac{3-2x}{x-1}$ *a určme jeho priesečníky so súradnicovými osami. Čo je oborom hodnôt danej funkcie?*

Riešenie. Je zrejmé, že ide o lineárne lomenú funkciu (11), kde $a = -2$, $b = 3$, $c = 1$ a $d = -1$. Ak upravíme predpis tejto funkcie na tvar

$$y = \frac{k}{x-m} + s, \tag{14}$$

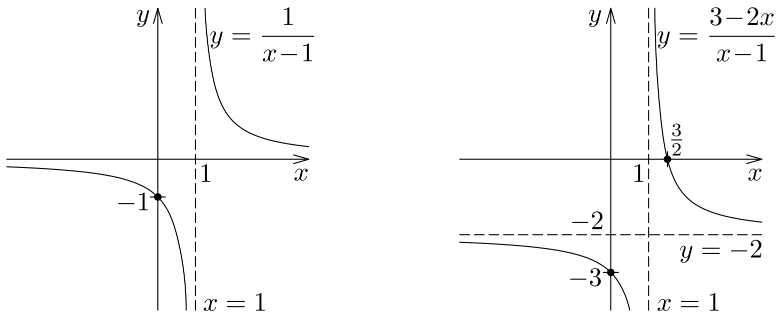
tak vieme získať požadovaný graf z grafu nepriamej úmernosti (7) pomocou transformácií funkcií. Môžeme to urobiť takto[10]:

$$y = \frac{3-2\boldsymbol{x}}{x-1} = \frac{3-2(\boldsymbol{x-1+1})}{x-1} = \frac{3-2(x-1)-2}{x-1} \overset{\alpha}{=} \frac{1-2\boldsymbol{(x-1)}}{\boldsymbol{x-1}} \overset{\beta}{=} \frac{1}{x-1} - 2,$$

[8]Pre $c = 0$ je (11) lineárnou funkciou a pre $ad - bc = 0$ je to lineárna funkcia s definičným oborom $\mathbb{R} - \{-d/c\}$).

[9]K presnej definícii asymptoty grafu by sme potrebovali pojem limita funkcie. Dá sa povedať, že asymptota grafu funkcie je priamka, ku ktorej sa graf funkcie „neobmedzene približuje“.

[10]Tí, čo ovládajú delenie mnohočlena mnohočlenom, zvládnu túto úpravu efektívnejšie.



Obr. 8: Postup konštrukcie náčrtu funkcie $y = \dfrac{3-2x}{x-1}$

kde
– v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme úpravami „vyrobili“ v čitateli výraz $(x-1)$ z menovateľa;
– v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme „roztrhli zlomok“. Dostali sme

$$y = \frac{1}{x-1} - 2, \tag{15}$$

čo je upravený predpis našej funkcie na tvar (14). Z toho predpisu funkcie zostrojíme požadovaný graf pomocou transformácií funkcií, a to takto:

1. načrtneme graf funkcie $y = \dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$ – pozri obr. 7 vľavo pre $k = 1$;
2. posunutím tohto grafu o vektor $\boldsymbol{v} = [1; 0]$ dostaneme graf funkcie

   $$y = \frac{1}{(\boldsymbol{x-1})},$$

   ktorý je znázornený na obr. 8 vľavo;
3. ak tento graf posunieme o vektor $\boldsymbol{v} = [0; -2]$ dostaneme požadovaný graf našej funkcie s upraveným predpisom (15). Tento graf je znázornený na obr. 8 vpravo.

Z výsledného grafu vidno, že os x pretína v bode, ktorého x-ová súradnica je $3/2$ a os y pretína v bode, ktorého y-ová súradnica je -3 (presvedčte sa o tom výpočtom). Kolmým priemetom grafu na os y dostaneme obor hodnôt danej funkcie:

$$\mathcal{H} = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty). \qquad \square$$

A teraz sa pokúsime zovšeobecniť poznatky, ktoré sme získali pri riešení tohto príkladu. Dá sa ukázať, že predpis každej lineárne lomenej funkcie (11) môžeme upraviť na tvar (14, kde

$$m = -\frac{d}{c} \qquad \text{a} \qquad s = \frac{a}{c} \tag{16}$$

(ľahko si to zapamätáme: m je koreňom menovateľa z predpisu funkcie (11) a s je podiel koeficientov pri x v tomto predpise – teda limita funkcie (11) pre $x \to \pm\infty$)). V bode 2 riešenia tohto príkladu dôjde k posunutiu grafu funkcie

$$y = \frac{k}{x} \qquad \text{o vektor } [-d/c\,; 0].$$

Pri tomto posunutí sa asymptota $x = 0$ posunie na asymptotu $x = -d/c$. Asymptota $y = 0$ sa nezmení. V bode 3 nastane posunutie získaného grafu funkcie

$$y = \frac{k}{x - m} \qquad \text{o vektor } [0; a/c].$$

Pri tomto posunutí sa asymptota $y = 0$ posunie na asymptotu $y = a/c$. Asymptota $y = -d/c$ sa nezmení.

Zhrnutie: asymptoty uvažovaných hyperbol sa zmenili takto:
– asymptota $x = 0$ sa zmenila na $x = -d/c$,
– asymptota $y = 0$ sa zmenila na $y = a/c$,
– graf nepriamej úmernosti $y = k/x$ (t. j. hyperbola) sa len posúval.

Predchádzajúce úvahy nám poskytujú jednoduchý postup na znázornenie grafu lineárne lomenej funkcie (11), t. j. hyperboly:

1. nakreslíme priamky: asymptotu $x = -d/c$ (rovnobežná s osou y) a asymptotu $y = a/c$ (rovnobežná s osou x). Tieto dve asymptoty rozdeľujú rovinu Oxy na „nové kvadranty“;
2. znázorníme ľubovoľný bod hľadanej hyperboly, ktorý dostaneme tak, že vyčíslime hodnotu danej funkcie (to je jeho y-ová súradnica) vo vhodne zvolenom čísle (čo je jeho x-ová súradnica);
3. „preložíme“ týmto bodom jednu vetvu hyperboly, pričom zoberieme do úvahy nakreslené asymptoty z bodu 1. Ak ten bod je v párnom „novom kvadrante“, tak jej druhú vetvu nakreslíme v druhom párnom novom kvadrante. Ak leží v nepárnom novom kvadrante, tak ju nakreslíme v druhom nepárnom novom kvadrante.

Príklad 9 *Načrtnime graf funkcie* $y = \dfrac{2x}{x+1}$ *a určme jeho priesečníky so súradnicovými osami. Čo je oborom hodnôt danej funkcie?*

Riešenie. Daná je lineárne lomená funkcia (11), kde $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$ a $d = 1$, ktorej grafom je hyperbola. Načrtneme ju podľa predchádzajúceho návodu:

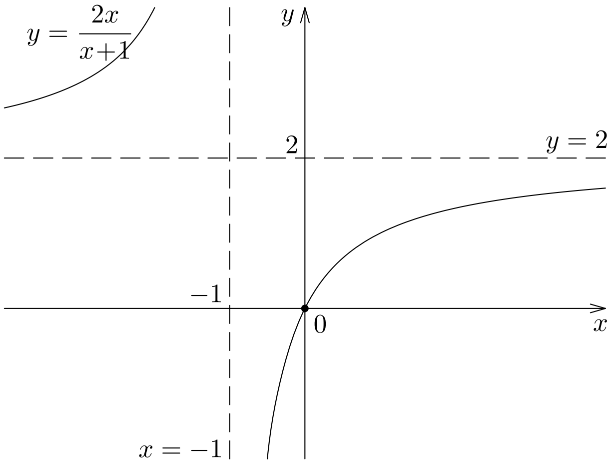
1. nakreslíme asymptoty $x = -1$ a $y = 2$;
2. hodnota danej funkcie napr. v čísle $x = 0$ je $y = 0$. Znázorníme bod, ktorého súradnice sú $[0; 0]$ – je to začiatok O súradnicovej sústavy;
3. nakreslíme vetvu hyperboly s danými asymptotami, ktorá prechádza bodom O – zrejme je vo štvrtom novom kvadrante, ktorý „vytvorili“ asymptoty;
4. v druhom novom kvadrante načrtneme druhú vetvu hyperboly.

Graf danej funkcie máme načrtnutý na obr. 9. Súradnicové osi pretína v bode $O[0; 0]$ a zrejme oborom hodnôt funkcie je množina

$$\mathcal{H} = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty; 2) \cup (2; \infty). \qquad \square$$

Urobme zhrnutie zistených vlastností lineárne lomenej funkcie (11):

- jej definičným oborom je množina $\mathcal{H} = \mathbb{R} - \{-d/c\}$;
- jej oborom hodnôt je množina $\mathcal{H} = \mathbb{R} - \{a/c\}$;
- jej grafom je hyperbola s asymptotami $y = -d/c$ a $y = a/c$;
- je to prostá funkcia.



Obr. 9: Náčrt grafu funkcie $y = \dfrac{2x}{x+1}$

Funkcie obsahujúce v predpise absolútnu hodnotu

Teraz sa budeme zaoberať niektorými prípadmi, keď **v predpise funkcie vystupuje absolútna hodnota**.

Nech $y = f(x)$ je daná funkcia, ktorej definičný obor je množina $\mathcal{D}(f)$. Je zrejmé, že ak existuje hodnota $f(x)$ v bode $x \in \mathcal{D}(f)$, tak existuje aj hodnota $|f(x)|$. To znamená, že definičným oborom funkcie, ktorá je definovaná predpisom $y = |f(x)|$ je tiež množina $\mathcal{D}(f)$.

Ako súvisí hodnota $f(x)$ s hodnotou $|f(x)|$? Tu si stačí zopakovať definíciu absolútnej hodnoty, z ktorej dostaneme

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{pre } f(x) \geqq 0; \\ -f(x) & \text{pre } f(x) < 0. \end{cases} \tag{17}$$

To nám umožňuje z grafu funkcie $y = f(x)$ získať graf funkcie $y = |f(x)|$:

- v bodoch, v ktorých je $f(x) \geqq 0$, je graf funkcie $y = |f(x)|$ totožný s grafom funkcie $y = f(x)$ – zrejme je to tá časť grafu $y = f(x)$, ktorá je umiestnená „nad x-ovou osou, včítane jeho prípadných priesečníkov s osou x“;
- v bodoch, v ktorých je $f(x) < 0$, je $|f(x)| = -f(x)$ (násobenie číslom (-1)), a preto je v týchto bodoch graf funkcie $y = |f(x)|$ osovo súmerný vzhľadom na os x s grafom funkcie $y = f(x)$. Teda ak máme graf funkcie $y = f(x)$ nakreslený, tak tú jej časť, ktorá je pod x-ovou osou „preklopíme nahor“.

Príklad 10 *Načrtnime grafy funkcií a určme ich obor hodnôt:*
a) $y = |-2x+4|$; *b)* $y = |x^2 - 4x - 5|$. *Sú to prosté funkcie?*

Riešenie. V oboch prípadoch môžeme použiť vyššie uvedené poznatky.

a) Najskôr načrtneme graf funkcie „bez absolútnej hodnoty“, t. j. graf funkcie $y = -2x+4$. Ten je získaný v rámci riešenia príkladu 4 a) – pozri príslušný obr. 1 vľavo. Vidno, že na intervale $(-\infty; 2\rangle$ nadobúda funkcia $y = -2x+4$ nezáporné hodnoty, a preto na tom intervale je graf totožný s grafom funkcie $y = |-2x+4|$. Na intervale $(2; \infty)$ je graf funkcie $y = -2x+4$ pod x-ovou osou, a preto tú časť „preklopíme nahor“ (osová súmernosť vzhľadom na os x). Výsledkom je požadovaný graf funkcie $y = |-2x+4|$, ktorý ja načrtnutý na obr. 10.

Kolmým priemetom tohto grafu na y-ovú os dostaneme obor hodnôt danej funkcie:

$$\mathcal{H} = \langle 0; \infty).$$

Keďže napr. priamka $y = 1$ pretína tento graf v dvoch bodoch, tak daná funkcia nie je prostá.

b) Zoberme funkciu $y = x^2 - 4x - 5$ z príkladu 5 a) – jej graf je na obr. 11 vľavo. Z neho môžeme konštatovať, že táto funkcia je záporná len na intervale $(-1; 5)$. Graf funkcie $y = |x^2 - 4x - 5|$ je na tomto intervale osovo súmerný podľa osi x s časťou paraboly, ktorá je na obr. 11 vľavo pod x-ovou osou. Odtiaľ vidno, že na obr. 11 vpravo je znázornený požadovaný graf funkcie $y = |x^2 - 4x - 5|$. Jej oborom hodnôt je takisto množina $\mathcal{H} = \langle 0; \infty)$. Nie je to prostá funkcia, lebo napr. priamka $y = 1$ pretína tento graf dokonca v štyroch bodoch. $\square$

Tak to bolo celkom jednoduché. Ale čo keď absolútna hodnota nevystupuje v predpise funkcie v tvare $|f(x)|$ alebo sa v ňom vyskytuje viackrát? Ako dostať v takom prípade graf funkcie? Jedna z možností je upraviť predpis funkcie tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu.

Príklad 11 *Načrtnime graf funkcie $f : y = |x + 2| - |6 - x|$ a určme jej obor hodnôt. Je to prostá funkcia?*

Riešenie. Tu v predpise danej funkcie vystupujú dve absolútne hodnoty, a teda nemôžeme použiť metódu z predchádzajúceho príkladu. Najprv v predpise odstránime absolútne hodnoty. Dostávame:

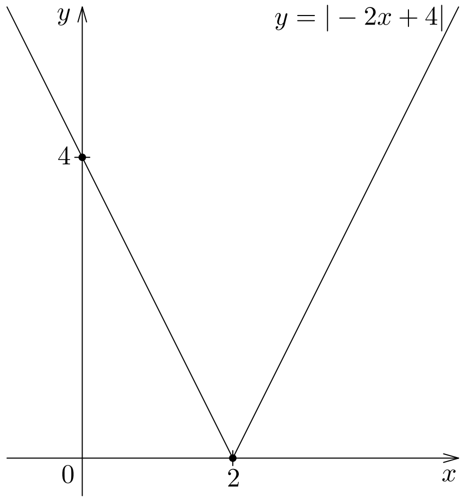
$$f : y = \begin{cases} -8 & \text{pre } x \in (-\infty; -2\rangle\,; \\ 2(x-2) & \text{pre } x \in (-2; 6)\,; \\ 8 & \text{pre } x \in \langle 6; +\infty). \end{cases} \tag{18}$$

A to je funkcia, ktorej predpis sa mení na jednotlivých intervaloch: na intervale $(-2; 6)$ je to lineárna funkcia a na ostatných dvoch konštantná funkcia. Ich grafy poznáme, ale musíme zohľadniť ich definičné obory. Graf funkcie f je načrtnutý na obr. 12. Všimnime si, že graf funkcie f sme mohli získať aj ako zjednotenie grafov týchto troch funkcií: $f_1 : y = -8$ pre $x \in (-\infty; -2\rangle$; $f_2 : y = 2(x - 2)$ pre $x \in (-2; 6)$ a $f_3 : y = 8$ pre $x \in \langle 6; +\infty)$. Samozrejme, že pritom tieto grafy znázorníme v tej istej súradnicovej sústave Oxy. $\square$

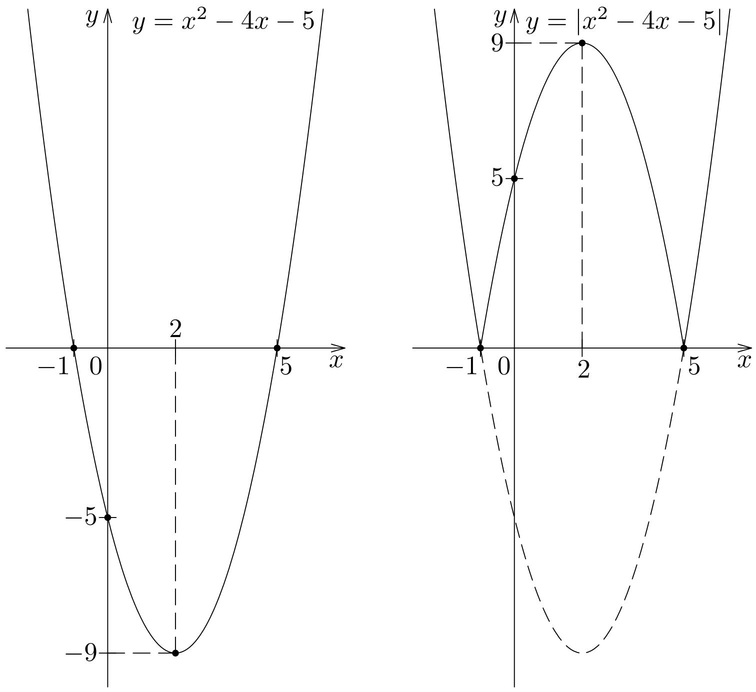
Úlohy

1. Načrtnite grafy funkcií: a) $y = -x + 5$; b) $y = 3x$; c) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$; d) $y = \dfrac{3-x}{5-3x}$; e) $y = \dfrac{1}{x}$; f) $y = x^2$; g) $y = x^2 - 2x + 1$; h) $y = x^2 + x + 10$; i) $y = -2x^2 + 12x - 14$.

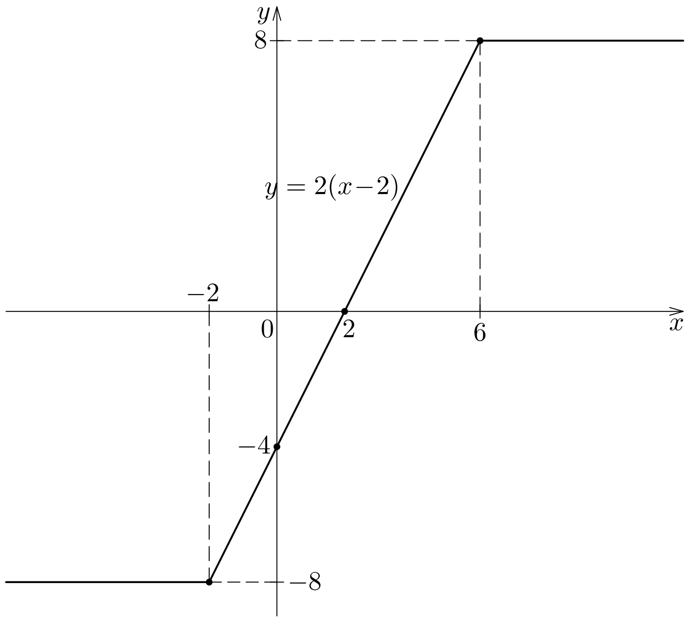
2. Načrtnite grafy funkcií: a) $y = 3x + 4$, $x \in \langle -3, 4)$; b) $y = -2t + 9$, $t \in \mathbb{R}$; c) $y = |3 - 6x|$, $x \in \mathbb{R}$; d) $y = 2|x| - x$, $x \in \langle -3, 3\rangle$; e) $y = -x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$; f) $y = 2x^2 + 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$; g) $y = 0{,}5x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$; h) $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$; i) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$; j) $y = \left|\dfrac{x+2}{1-x}\right|$; k) $y = \dfrac{|x+2|}{1-x}$; ℓ) $y = x^2 + |x|/2 + 1$. (Pozri obr. 13 a obr. 14 na stranách 22 a 23.)



Obr. 10: Náčrt grafu funkcie $y = |-2x + 4|$



Obr. 11: Konštrukcia náčrtu grafu funkcie $y = |x^2 - 4x - 5|$



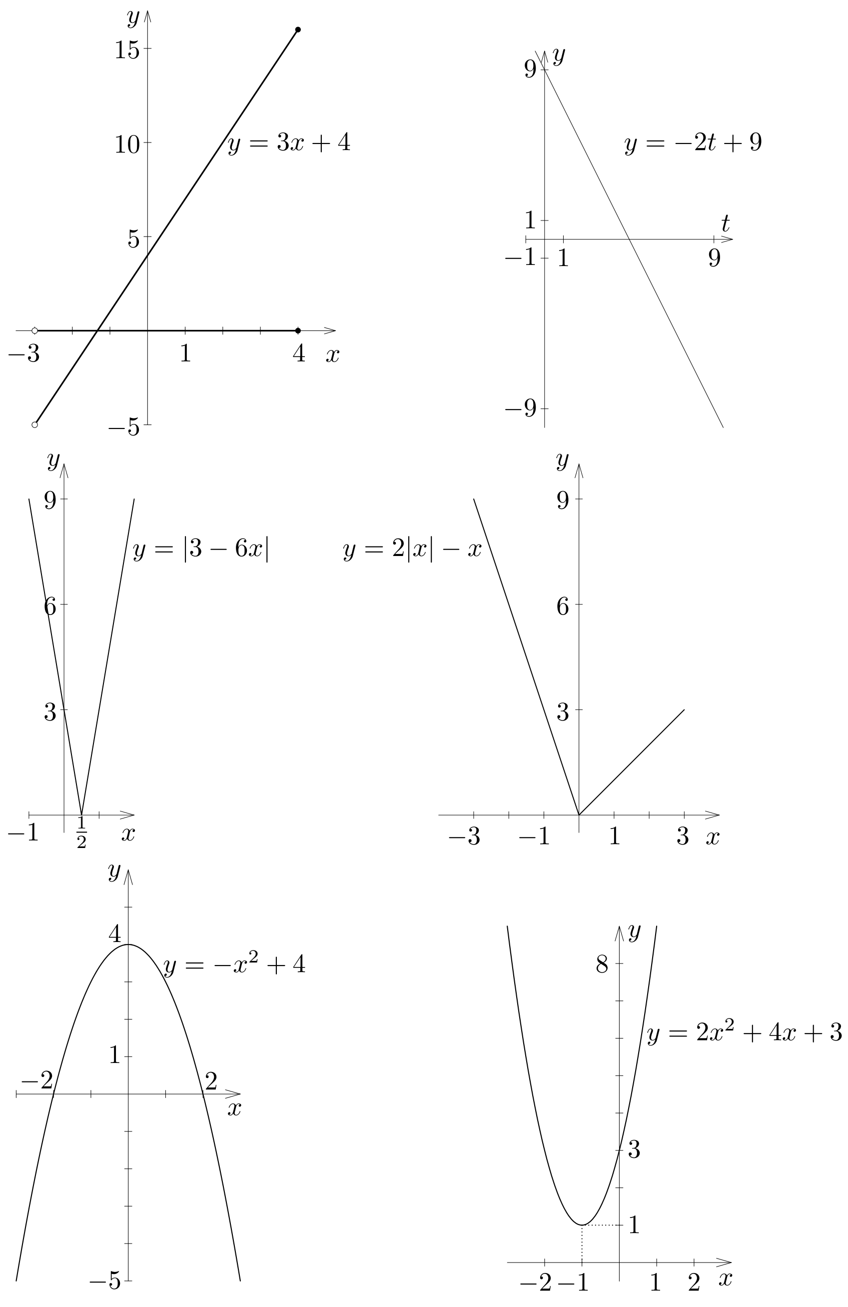
Obr. 12: Náčrt grafu funkcie $y = |x+2| - |6-x|$

3. Daná je funkcia $g: \; y = x^2 - 2x + 3$. Určte všetky $x \in \mathcal{D}(g)$, pre ktoré platí: a) $g(x) = g(0)$, $[\{0; 2\}]$; b) $g(x) = g(-1)$, $[\{-1; 3\}]$.

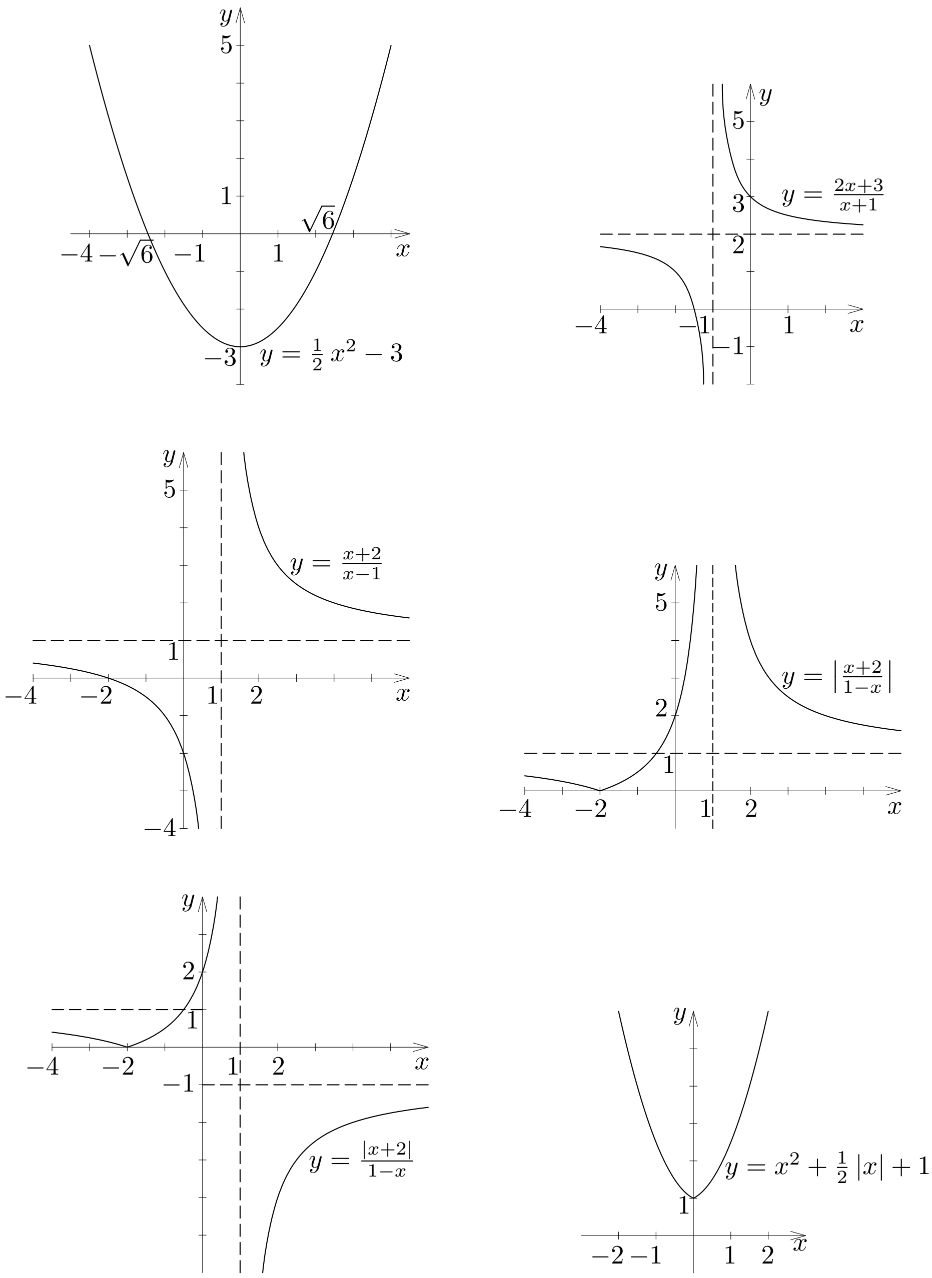
4. Určte všetky kvadratické funkcie dané rovnicou tvaru $y = x^2 + bx + c$, ktorým patria usporiadané dvojice $[0; 2]$, $[2; 4]$. $[y = x^2 - x + 2]$

5. Rozhodnite, či existuje kvadratická funkcia h, pre ktorú platí: $h(0) = 5$, $h(1) = 0$ a $h(-1) = -4$. $[h: \; y = 3x^2 + 2x - 5]$

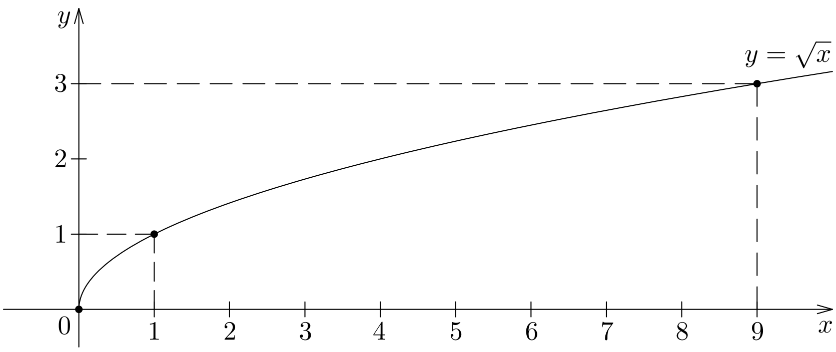
6. Určte obory hodnôt daných funkcií a súradnice priesečníkov ich grafov so súradnicovými osami:
   a) $y = |x+1| + x$; $[\mathcal{H} = \langle 1; \infty), [0; 1]]$
   b) $z = |t+1| - |1-t|$; $[\mathcal{H} = \langle -2; 2 \rangle, [0; 0]]$
   c) $u = 1 - |3s - 2|$. $[\mathcal{H} = (-\infty; 1\rangle, [0; -1], [1; 0], [1/3; 0]]$



Obr. 13: Grafy funkcií úlohy 1a)−1f)



Obr. 14: Grafy funkcií úlohy 1g)$-$1l)



Obr. 15: Graf funkcie $y = \sqrt{x}$

Funkcia n-tá odmocnina, iracionálne rovnice a nerovnice

V časti o algebrických výrazoch sme uviedli definíciu n-tej odmocniny a niektoré jej základné vlastnosti. Pripomíname, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$

a) n-tou odmocninou nezáporného čísla a (označujeme $\sqrt[n]{a}$) nazývame také nezáporné číslo b, pre ktoré platí $b^n = a$;

b) v prípade, že n je nepárne číslo a $a < 0$, tak rovnica $b^n = a$ má v $\mathbb{R}$ práve jedno riešenie $b = -\sqrt[n]{|a|}$;

c) platí:
$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ pre párne } n \quad \text{ a } \quad \sqrt[n]{a^n} = a \text{ pre nepárne } n.$$

Definícia 10 *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$.* **Funkciou n-tá odmocnina** *nazývame každú funkciu, ktorá je daná predpisom*
$$y = \sqrt[n]{x}. \tag{19}$$

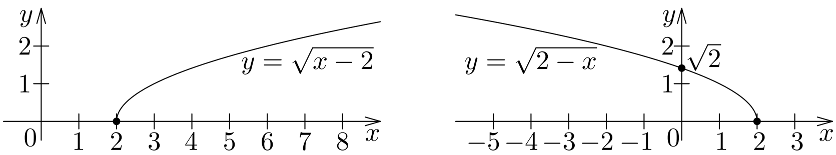
Definičným oborom tejto funkcie je pre párne n množina $\langle 0; \infty)$ a pre nepárne n celá množina reálnych čísel $\mathbb{R}$. Ľahko sa dá overiť, že pre jej obor hodnôt platí $\mathcal{H} = \mathcal{D}$ a že je to prostá funkcia.

V ďalšom výklade sa budeme zaoberať len prípadom $n = 2$. Na obr. 15 je znázornený graf funkcie $y = \sqrt{x}$. V súradnicovej sústave Oxy je to časť paraboly $x = y^2$, pre ktorú je $y \geqq 0$ (osou tejto paraboly je os x a jej vrchol má súradnice $[0; 0]$).

Príklad 12 *Určme definičný obor funkcií, načrtnime ich grafy a stanovme ich priesečníky so súradnicovými osami: a) $y = \sqrt{x-2}$; b) $y = \sqrt{2-x}$.*

Riešenie.

a) Druhá odmocnina existuje v množine $\mathbb{R}$ len z nezáporných čísel. Preto pre výraz $\sqrt{x-2}$ z predpisu funkcie musí platiť $x - 2 \geqq 0$, čo je ekvivalentná nerovnica s nerovnicou $x \geqq 2$. Teda $\mathcal{D} = \langle 2; \infty)$. Graf funkcie $y = \boldsymbol{\sqrt{x-2}}$ dostaneme z grafu funkcie $y = \boldsymbol{\sqrt{x}}$ (obr. 15) posunutím vpravo o vektor $\boldsymbol{v} = [2; 0]$ – pozri obr. 16 vľavo. Daná funkcia priradí číslu 2 hodnotu $y = \sqrt{2-2} = 0$, a preto graf funkcie pretína x-ovú os v bode so súradnicami $[2; 0]$. Vidno to aj z jej grafu – rovnako aj fakt, že y-ovú os nepretína.



Obr. 16: Náčrty grafov funkcií $y = \sqrt{x-2}$ a $y = \sqrt{2-x}$

b) Na určenie definičného oboru funkcie $y = \sqrt{2-x}$ je nevyhnutné vyriešiť nerovnicu $2-x \geqq 0$. Jej riešením je množina $(-\infty; 2\rangle = \mathcal{D}$.

Ako získať graf tejto funkcie? Je zrejmé, že $2-x = \mathbf{(-1)}(x-2)$. Tak graf funkcie $y = \sqrt{2-x}$ „dostaneme z grafu funkcie“ $y = \sqrt{x-2}$ pomocou transformácie „násobenie číslom“ (-1). To je chybná úvaha, lebo násobenie číslom (-1) neplatí pre predpisy týchto funkcií, t. j. $y = \sqrt{2-x} \neq (-1)\sqrt{x-2}$. Tak ako na to? Tí, čo sú zručnejší v analytickej geometri vedia, že grafom je časť paraboly $y^2 = -(x-2)$, ktorá je nad x-ovou osou.

My zvolíme iný postup: všimnime si, že funkcia $y = \sqrt{2-x}$ priradí číslu 0 číslo $\sqrt{2}$. Súmerne združeným bodom na osi x k bodu 0 vzhľadom na bod 2 je bod 4. Funkcia z časti a) $y = \sqrt{x-2}$ priradí bodu 4 tiež hodnotu $\sqrt{2}$. Ukážeme, že táto vlastnosť je splnená pre ľubovoľné číslo $a \in (-\infty; 2)$. Súmerne združeným bodom na osi x k bodu a vzhľadom na bod 2 je bod $(4-a)$ (stačí si uvedomiť, že aritmetickým priemerom čísel a a $(4-a)$ je číslo 2). Potom

- funkcia $y = \sqrt{2-x}$ priradí číslu a číslo $y = \boldsymbol{\sqrt{2-a}}$;
- funkcia $y = \sqrt{x-2}$ priradí združenému číslu $(4-a)$ vzhľadom na 2 číslo $y = \sqrt{(4-a)-2} = \boldsymbol{\sqrt{2-a}}$.

Teda rovnaké funkčné hodnoty. To ale znamená, že graf funkcie $y = \sqrt{2-x}$ je osovo súmerný vzhľadom na priamku $x = 2$ s grafom funkcie $y = \sqrt{x-2}$, ktorý poznáme z časti a). Teda stačí k nemu načrtnúť graf funkcie v uvažovanej osovej súmernosti – dostaneme graf, ktorý je uvedený na obr. 16 vpravo. Z tohto grafu (ale aj z predchádzajúcich úvah) vyplýva, že graf funkcie $y = \sqrt{2-x}$ pretína os x tiež v bode so súradnicami $[2; 0]$ a os y v bode so súradnicami $[0; \sqrt{2}]$. □

Teraz sa budeme zaoberať **iracionálnymi rovnicami**, t. j. rovnicami s neznámou z $\mathbb{R}$ v odmocnenci.

Príklad 13 *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}.$$

Riešenie. Budeme postupne **odstraňovať druhé odmocniny**: umocníme obe strany rovnice na druhú. S pravou stranou je to jednoduché, lebo pre isté hodnoty x platí: $\left[\sqrt{3x+12}\right]^2 = 3x + 12$. Na ľavej strane použijeme známy vzorec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, v ktorom $a = \sqrt{x+1}$ a $b = \sqrt{4x+13}$. Dostaneme rovnicu

$$(x+1) + 2\sqrt{(x+1)(4x+13)} + (4x+13) = 3x + 12,$$

pre ktorú platí, že každé riešenie pôvodnej rovnice je zároveň aj jej riešením. Túto rovnicu upravíme na tvar

$$\sqrt{(x+1)(4x+13)} = -x - 1.$$

Opätovným umocnením oboch strán na druhú a jednoduchými úpravami dostaneme

$$x^2 + 5x + 4 = 0,$$

čo je kvadratická rovnica, ktorej riešenia sú $x = -1$ alebo $x = -4$. Nakoľko sme použili pri riešení danej rovnice neekvivalentnú úpravu (umocňovanie na druhú), musíme sa presvedčiť, či tieto čísla sú skutočným riešením **danej rovnice**

- pre $x = -1$ dostaneme $SL(-1) = \sqrt{0} + \sqrt{9} = 3$ a $P(0) = \sqrt{9} = 3$, a preto $x = -1$ je riešením úlohy;

- pre $x = -4$ ľavá strana danej rovnice nie je definovaná, a teda -4 nie je riešením úlohy.

Takto $\mathcal{K} = \{-1\}$. □

Iracionálne nerovnice môžeme riešiť pomocou ekvivalentných úprav nerovníc. Medzi ne však nepatrí umocňovanie na párne číslo – tu by sme museli robiť diskusiu, či umocňujeme kladný alebo nezáporný výraz. Výhodné je použiť modifikáciu intervalovej metódy, ktorú ukážeme v nasledujúcom príklade (túto metódu môžeme použiť aj pri iných typoch nerovníc).

Príklad 14 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu* $\sqrt{8 + 2x - x^2} > 6 - 3x$.

Riešenie.

1. Najprv **určíme obor definície danej nerovnice**. Ľavá strana

$$\text{Ľ}(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$$

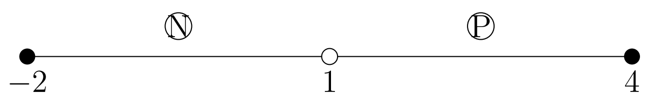
   je definovaná pre $8 + 2x - x^2 \geqq 0$, t. j. ak $x \in \langle -2; 4 \rangle$. Pravá strana $P(x) = 6 - 3x$ je definovaná pre každé $x \in \mathbb{R}$, a preto o danej nerovnici má zmysel uvažovať pre $x \in \langle -$ $-2; 4\rangle = \mathcal{D}$, čo je jej požadovaný definičný obor.

2. **Vyriešime zodpovedajúcu rovnicu** v $\mathbb{R}$, ktorá má v našom prípade tvar

$$\sqrt{8 + 2x - x^2} = 6 - 3x \tag{20}$$

   a riešime ju „umocnením na druhú“. Odtiaľ $5x^2 - 19x + 14 = 0$. Ľahko zistíme, že pre rovnicu (20) je $\mathcal{K} = \{1\}$.

3. Nakreslíme tú časť číselnej osi, ktorá je určená definičným oborom nerovnice $\mathcal{D}$ (pozri obrázok nižšie) a **znázorníme v nej body množiny** $\mathcal{K}$ t. j. body, ktoré sú riešením zodpovedajúcej rovnice z časti 2. V našom prípade znázorníme bod 1 prázdnym krúžkom, lebo ide o „ostrú nerovnicu“, plný krúžok by sme dávali v prípade nerovnice typu $\leqq$ alebo $\geqq$:



4. **Body množiny $\mathcal{K}$ rozdelia znázornený definičný obor nerovnice $\mathcal{D}$ na intervaly** – v našom prípade bodom 1 sme dostali intervaly $\langle -2; 1)$ a $(1; 4\rangle$.

5. **Výberom vhodných bodov z jednotlivých získaných intervalov overíme, či v nich je splnená požadovaná nerovnosť v danej nerovnici**. Ak áno, tak označíme na obrázku skúmaný interval napr. znakom P (platí nerovnosť) a v opačnom prípade znakom N. V našom príklade pre $0 \in (-2;\, 1)$ je $Ľ(0) = \sqrt{8} \not> 6 = P(0)$, a preto na $\langle -2;\, 1)$ daná nerovnica neplatí, čo sme na obrázku nad intervalom zaregistrovali dohodnutým znakom N. Obdobne pre $2 \in (1;\, 4)$ je $Ľ(2) = \sqrt{8} > 0 = P(2)$, a tak na $(1;\, 4\rangle$ nerovnica je splnená a tento interval sme označili znakom P.

6. **Riešením danej nerovnice je zjednotenie všetkých intervalov, ktorým bol priradený znak** P. V našom prípade je to interval

$$(1;\, 4\rangle. \qquad \square$$

Úlohy

Určte definičné obory funkcií:

1. $y = x^3 + x\sqrt{2 - x - x^2} - \sqrt[3]{x^2 + x - 2}$; $[\langle -2;\, 1\rangle]$

2. $y = \sqrt{2x^2 + 7x - 4} + \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$; $[(-\infty;\, -4) \cup \langle 1/2;\, +\infty)]$

3. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 20}{x - 6}}$; $[\langle -5;\, 4\rangle \cup (6;\, +\infty)]$

4. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 20}{\sqrt{x - 6}}}$. $[(6;\, +\infty)]$

Riešte v $\mathbb{R}$ iracionálne rovnice, resp. nerovnice alebo sústavy iracionálnych rovníc:

1. $\dfrac{\sqrt{x+13}+2}{\sqrt{x+13}-4} = 7;$ [12]

2. $\sqrt{2x+5} \cdot \sqrt{x-1} = 7;$ [4,5]

3. $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 4;$ [2]

4. $\dfrac{\sqrt{x}+b}{\sqrt{x}-b} = \dfrac{a+b}{a-b};$ $[a^2;\ a \neq b]$

5. $\sqrt{9-6x+x^2} = x-3;$ $[\langle 3, \infty)]$

6. $\sqrt{1+x\sqrt{1-x^2}} = x+1;$ [0]

7. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-1}} = x+1;$ [nemá riešenie]

8. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-2};$ [2]

9. $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-16} = 7;$ [25]

10. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{4x+5};$ $[-1]$

11. $\sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6;$ [2]

12. $\sqrt{7-2\sqrt{x}} = \sqrt{18-13\sqrt{x}};$ [1]

13. $2 + \sqrt{4+2x-x^2} = x-2;$ [3]

14. $3\sqrt{x+6} - 5\sqrt{y-1} = -3, \quad 7\sqrt{x+6} - 9\sqrt{y-1} = 1;$ $[[10; 10]]$

15. $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a, \quad \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b;$ $\left[\dfrac{a^2+b^2}{4};\ \dfrac{ab}{2}\right]$

16. $\sqrt{x+\dfrac{3}{2}} - \sqrt{x-\dfrac{1}{2}} = 2;$ [nemá riešenie]

17. $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} = 1;$ [6]

18. $\sqrt{2x-3+\sqrt{3x+4}} - \sqrt{2x-3-\sqrt{3x+4}} = 2;$ [4]

19. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}} - \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{3};$ [4]

20. $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}} - \sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}} = -\dfrac{5}{6}$; $[-6]$

21. $\sqrt{\dfrac{5x-4}{x+8}} + \sqrt{\dfrac{x+8}{5x-4}} = -2$; [nemá riešenie]

22. $\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{9x}} + \sqrt[3]{\dfrac{9x}{x-2}} = \dfrac{10}{3}$; $[3; -1/121]$

23. $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{16x}} = \dfrac{5}{2}$; $[2; -1/511]$

24. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x} < 1$; $[\langle -2;\, 0) \cup (2;\, +\infty)]$

25. $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$; $[\langle 0;\, 5\rangle]$

26. $\sqrt{x^2+5x-6} > x+2$; $[(-\infty;\, -6\rangle \cup (10;\, +\infty)]$

27. $\sqrt[3]{x^2+6x} > x$. $[(-\infty;\, -2) \cup (0;\, 3)]$

Odporúčané zdroje

[1] Baculíková, B. – Grinčová, A.: *Matematika I. Vzorové a neriešené úlohy,* TU v Košiciach (2013) 157 s., ISBN 978-80-553-1501-0, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/13/Vzorove_a_neriesene_ulohy_0_0.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[2] Buša, J. – Schrötter, Š.: *Stredoškolská matematika pre študentov FEI TU v Košiciach,* TU v Košiciach (2015) 180 s., ISBN 978-80-553-2193-6, `http://people.tuke.sk/jan.busa/SM/Busa_Schrotter_Stredoskolska_matematika_2015.pdf`, [navštívené 20. 6. 2016]

[3] Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.: *Úvod do predmetu MATEMATIKA 1*, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/M1-Ucebnica-Dzurina-Grincova-Pirc.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[4] *Matematika I*, elektronický učebný text, `http://it4kt.cnl.tuke.sk/c/mat/student/01.html`, [navštívené 18. 6. 2016]

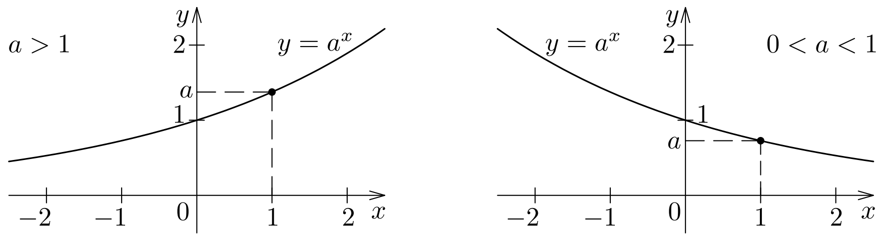
Exponenciálna funkcia a exponenciálne rovnice

Definícia 11 *Nech a je dané číslo, pre ktoré platí: $a \in \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$, $a \neq 1$.* **Exponenciálnou funkciou so základom $\boldsymbol{a}$** *nazývame každú funkciu, ktorá je daná predpisom*

$$y = a^x. \tag{21}$$

Uvedieme základné vlastnosti exponenciálnej funkcie.

1. Jej definičným oborom je množina $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel.



Obr. 17: Náčrt grafov funkcií $y = a^x$

2. Grafom funkcie $y = a^x$ je tzv. **exponenciálna krivka** alebo **exponenciála**. Na ľavom obrázku je načrtnutý graf funkcie pre nejaké $a > 1$ a na pravom pre $0 < a < 1$.

3. Všetky exponenciály pretínajú v súradnicovej sústave Oxy os y v jedinom bode so súradnicami $[0;\,1]$ (lebo $a^0 = 1$ pre všetky uvažované hodnoty a) a s osou x nemajú spoločný bod.

4. Oborom hodnôt každej exponenciálnej funkcie je množina kladných reálnych čísel, t. j. $\mathcal{D} = (0; \infty)$.

5. Každá exponenciálna funkcia je prostá.

Príklad 15 *Majme ľubovoľné číslo a také, že $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$. Existuje nejaká súvislosť medzi grafom funkcie $f\colon y = a^x$ a grafom funkcie $g\colon y = a^{-x}$?*

Riešenie. Je zrejmé, že f je exponenciálna funkcia so základom a. Predpis funkcie g nie je priamo v tvare (21), ale je mu „podobný“. Všimnime si, že pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$g(-x) = a^{-(-x)} = a^x = f(x). \tag{22}$$

Vieme, že bod x je na číselnej osi súmerne združený s bodom $(-x)$ vzhľadom na bod 0. Na základe (22) môžeme konštatovať, že hodnota funkcie f v ľubovoľnom bode x je rovná hodnote funkcie g v združenom bode $(-x)$. To ale znamená, že graf funkcie g dostaneme z grafu funkcie f pomocou osovej súmernosti vzhľadom na os y (čo je priamka $x = 0$). V súvislosti s tým vzniká prirodzená otázka: nie je aj funkcia g exponenciálna? Áno, je. Vidno to z tejto úpravy jej predpisu:

$$g(x) = a^{-x} = \left(a^{-1}\right)^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

g je teda exponenciálnou funkciou so základom $1/a$.

Tým sme ukázali, že graf exponenciálnej funkcie so základom a je súmerný v osovej súmernosti vzhľadom na os y s grafom exponenciálnej funkcie so základom $1/a$.

Ukážeme základné metódy na vyriešenie **exponenciálnych rovníc** (t. j. rovníc, v ktorých sa vyskytujú mocniny s neznámou v exponente): rovnicu upravíme na tvar

- rovnosti dvoch výrazov s rovnakým základom (pozri príklad 16) a potom použijeme túto vlastnosť exponenciálnych výrazov: pre ľubovoľné reálne čísla x_1 a x_2 platí:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2; \tag{23}$$

- v ktorom môžeme použiť substitúciu – pozri príklad 17;
- v ktorom môžeme obe strany rovnice „logaritmovať" – k tomu potrebujeme poznatky o logaritmoch (pozri príklad 22)

Príklad 16 *Vyriešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu* $9^{v+2} + 5 \cdot 9^{v+1} = 14$.

Riešenie. Platí $9^{v+2} = 9^v \cdot 9^2$ a $9^{v+1} = 9^v \cdot 9^1$, čo znamená, že pre ľavú stranu danej rovnice je

$$9^{v+2} + 5 \cdot 9^{v+1} = 9^v \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^v \cdot 9^1 = 9^v(9^2 + 5 \cdot 9^1) = 126 \cdot 9^v.$$

Dospeli sme k ekvivalentnej rovnici

$$126 \cdot 9^v = 14 \qquad \text{a po predelení číslom 126} \qquad 9^v = \frac{1}{9}.$$

Ale

$$\frac{1}{9} = 9^{-1} \quad \text{a teda rovnica má tvar} \quad 9^v = 9^{-1}.$$

Odtiaľ na základe (23) dostávame, že riešením danej rovnice je číslo $v = -1$. □

Príklad 17 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Riešenie. Vydeľme obe strany danej rovnice výrazom 36^x. Keďže

$$\frac{16^x}{36^x} = \left(\frac{16}{36}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^x \qquad \text{a} \qquad \frac{81^x}{36^x} = \left(\frac{81}{36}\right)^x = \left(\frac{9}{4}\right)^x,$$

tak daná rovnica nadobudne tvar

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 5.$$

Ak označíme $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$, tak získame rovnicu

$$3t + \frac{2}{t} = 5$$

a odtiaľ po jednoduchých úpravách dostaneme $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Riešením tejto rovnice je $t = 1$ a $t = 2/3$. Na základe použitej substitúcie je

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

a

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\,.$$

Takto $\mathcal{K} = \{0; 1/2\}$. □

Úlohy

Načrtnite grafy funkcií:

1. $y = 2^x$
2. $y = 1 - 8^x$
3. $y = 5^{-x} + 2$
4. $y = 7^{2-x}$

Graficky znázornite ohraničené oblasti ohraničené krivkami zadanými nasledujúcimi predpismi:

1. $y = 2x, \quad y = x, \quad x = 5\,;$
2. $y = 3 - x, \quad y = x, \quad y = 0\,;$
3. $y = 5 - 2x, \quad y = 2 + x, \quad x = 0\,;$
4. $x = y^2, \quad y = x - 2\,;$
5. $y = 6x - x^2, \quad y = 0\,;$
6. $y = x^2 - 2x, \quad y = 0\,;$
7. $y = -x^2 + 2, \quad y = -3x + 4\,;$
8. $y = x^2 - x - 6, \quad y = -x^2 + 5x + 14\,;$
9. $y = x^2 - x, \quad y = 3x - x^2\,;$
10. $x \cdot y = 4, \quad x + y = 5\,;$
11. $y = x^3, \quad y = 4x\,;$
12. $y = 2\,\mathrm{e}^x + 3, \quad y = \mathrm{e}^{2x}, \quad x = 0\,;$
13. $y = \mathrm{e}^{2x}, \quad y = 1, \quad x = 4\,;$
14. $y = \mathrm{e}^{x/2}, \quad y = \mathrm{e}, \quad x = 0\,.$

Základné vlastnosti logaritmu a logaritmická funkcia. Jednoduché logaritmické rovnice

Definícia 12 *Ak $a > 0$, $a \neq 1$ a x je ľubovoľné kladné reálne číslo, tak existuje jediné reálne číslo*[11] *ℓ, také že $a^\ell = x$. Toto jediné reálne číslo nazývame* **logaritmom čísla x pri základe a** *a označujeme ho zápisom $\log_a x$.*

Je potrebné dobre si zapamätať podstatu tejto definície:

$$\log_a x = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad a^\ell = x. \tag{24}$$

Teda číslo a vystupuje v základe logaritmu $\log_a x$ a aj v základe exponenciálneho výrazu a^ℓ.

Príklad 18 *Určme hodnoty: a)* $\log_3 81$*; b)* $\log_{10} 0{,}001$*; c)* $\log_{\frac{1}{2}} 8$.

Riešenie.

a) Na základe (24) je

$$\log_3 81 = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad 3^\ell = 81.$$

Ale $81 = 3^4$, a tak poslednú rovnicu môžeme zapísať v tvare $3^\ell = 3^4$. Odtiaľ $\ell = 4$ a teda $\log_3 81 = 4$. Pri minimálnej zručnosti s logaritmami sme mohli dospieť k výsledku otázkou: „3 na koľkú je 81“? Odpoveď je: na štvrtú. Preto $\log_3 81 = 4$.

b) Keďže $0{,}001 = 10^{-3}$, tak $\log_{10} 0{,}001 = -3$.

c) Mohli by sme položiť otázku: $\frac{1}{2}$ na koľkú je 8? Ak by sme nevedeli odpoveď, tak by sme použili opäť (24) a dostali by sme

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^\ell = 8.$$

Ale

$$8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3},$$

a teda $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$. □

Teraz uvedieme **základné vlastnosti logaritmu**.

V1: Pre každé $a > 0$, $a \neq 1$, a pre všetky kladné reálne čísla r, s platí

$$\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s;$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s;$$

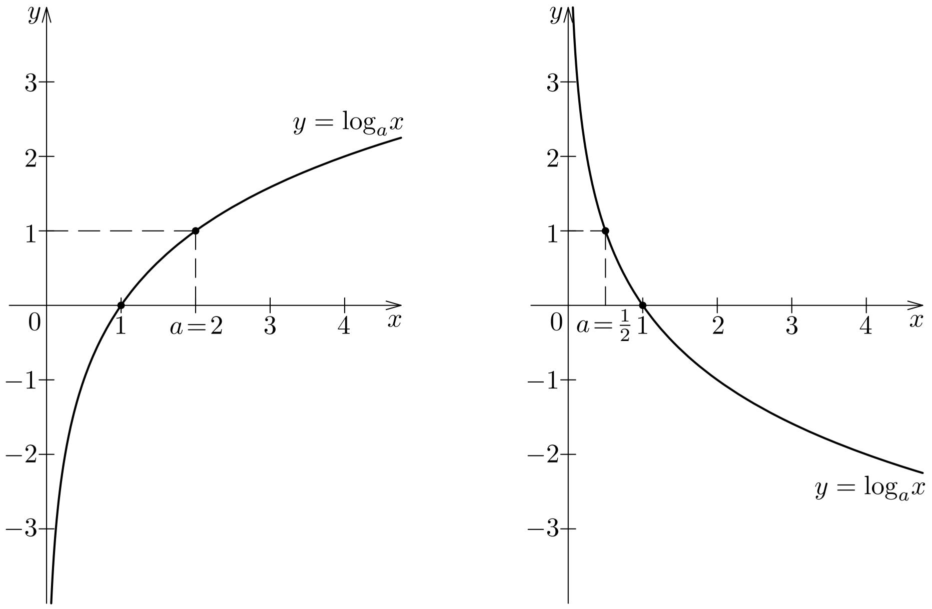
ak je $t \in \mathbb{R}$

$$\log_a r^t = t \cdot \log_a r.$$

V2: Nech a, b sú ľubovoľné čísla množiny $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ a r číslo z množiny $\mathbb{R}^+$. Potom

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}.$$

[11] Vidno to z grafu exponenciálnej funkcie $x = a^\ell$ (pozri grafy na obr. 17), kde ℓ je nezávisle premenná a x je závisle premenná.



Obr. 18: Náčrty grafov funkcií $y = \log_a x$ pre $a = 2$ vľavo a $a = 1/2$ vpravo

V3: Pre každé $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ a pre všetky $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a x_1 \neq \log_a x_2,$$

čiže $$\log_a x_1 = \log_a x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Poznámka 7 *Prechodu od rovnosti $x_1 = x_2$ k rovnosti $\log_a x_1 = \log_a x_2$ (viď V3) hovoríme „logaritmovanie rovnosti $x_1 = x_2$“. Tu je potrebné požadovať, aby x_1 a x_2 nadobúdali len kladné hodnoty. Ak teda logaritmujeme nejakú rovnicu, tak je nevyhnutná skúška správnosti pre vypočítané hodnoty (ináč by sme museli nájsť množinu, na ktorej sú obe strany rovnice kladné).*

Poznámka 8 *V zápise „$\log_{10} x$“ zvyčajne vynechávame základ „10“ a píšeme len $\log x$, občas sa môžete stretnúť aj s označením $\lg x$. Namiesto $\log_e x$ (tzv. prirodzený logaritmus – logaritmus naturalis, ktorého základom je Eulerovo číslo $\mathrm{e} \doteq 2{,}71828$) zvykneme písať $\ln x$. A aby to nebolo úplne jednoduché, informatici zvyknú písať $\log x$ namiesto $\log_2 x$ a vo viacerých programovacích jazykoch (napr. C, Matlab, Maxima, …) sa označenie $\log x$ používa pre prirodzený logaritmus!*

Definícia 13 *Nech $a > 0$, $a \neq 1$ je dané číslo.* **Logaritmickou funkciou so základom a** *nazývame každú funkciu, ktorá je daná predpisom*

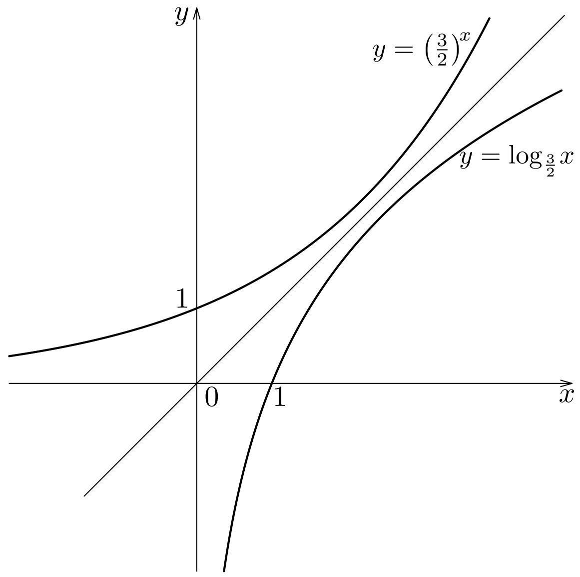
$$y = \log_a x, \tag{25}$$

kde $x \in (0; \infty)$.

Uvedieme základné vlastnosti tejto funkcie

1. Jej definičným oborom je množina všetkých kladných reálnych čísel, ktorú zvykneme označovať symbolom $\mathbb{R}^+$.

2. Graf funkcie $y = \log_a x$ je znázornený na obr. 18: na ľavej časti obrázku je načrtnutý jej graf pre zvolené $a > 1$ a na pravej pre $0 < a < 1$.



Obr. 19: Grafy exponenciálnej a logaritmickej funkcie s rovnakým základom

3. Grafy všetkých logaritmických funkcií (25) pretínajú v súradnicovej sústave Oxy os x v jedinom bode so súradnicami [1; 0] (lebo $\log_a 1 = 0$ pre všetky uvažované hodnoty a) a s osou y nemajú spoločný bod (os y je asymptotou grafu).

4. Oborom hodnôt každej logaritmickej funkcie je množina všetkých reálnych čísel, t j. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

5. Každá logaritmická funkcia (25) je prostá.

6. Graf funkcie $y = \log_a x$ prechádza bodom, ktorého súradnice sú $[a; 1]$ a tiež bodom so súradnicami $[1/a; -1]$.

Poznámka 9 *Každé číslo* $\log_a x$ *je podľa (24) definované pomocou exponenciálneho výrazu* a^ℓ*, pričom základy sú rovnaké. Vzniká otázka: ako súvisí graf logaritmickej funkcie s grafom exponenciálnej funkcie? Ak znázorníme v jednej súradnicovej sústave grafy funkcií*

$$y = \log_a x \qquad a \qquad y = a^x,$$

(základy sú rovnaké!), tak grafy budú osovo súmerné vzhľadom na priamku $y = x$*. Na obr. 19 sú znázornené tieto grafy v prípade* $a = \frac{3}{2}$ *(skúste si načrtnúť tieto grafy v prípade napr.* $a = \frac{2}{3}$*).*[12]

Príklad 19 *Určme definičný obor a obor hodnôt daných funkcií, načrtnime ich grafy a určme ich priesečníky so súradnicovými osami: a)* $y = \log_{0,5}(x + 2)$*; b)* $y = \log x^2$*; c)* $y = \log_2 8x$*.* [13]

Riešenie. V predpisoch všetkých troch funkcií vystupuje logaritmus, ale ani jeden nie je v tvare (25). Uvedieme jednu z možností ako sa s príkladom vysporiadať.

[12]Komu je známy pojem inverzná funkcia vie, že ak znázorníme graf funkcie a graf k nej inverznej funkcie v jednej súradnicovej sústave, tak tieto dva grafy sú vždy osovo súmerné vzhľadom na priamku $y = x$. V našom prípade je logaritmická funkcia inverznou funkciou ku exponenciálnej funkcii.

[13]Niektoré pramene používajú korektnejšie zápisy: namiesto $y = \log x^2$ píšu $y = \log(x^2)$ a namiesto $y = \log_2 8x$ zas $y = \log_2(8x)$.

a) Logaritmus „existuje len pre kladné čísla“, a preto definičný obor funkcie $y = \log_{0,5}(x+2)$ dostaneme vyriešením nerovnice $x + 2 > 0$. Odtiaľ máme

$$\mathcal{D} = (-2; \infty).$$

Aký je jej obor hodnôt? Pokúsime sa ho získať z grafu funkcie. Graf funkcie $y = \log_{0,5} \boldsymbol{x}$ poznáme (pozri pravú časť obr. 18). Posunutím tohto grafu o vektor $\boldsymbol{v} = [-2; 0]$, (t. j. posunutím proti smeru osi x o hodnotu 2) dostaneme graf našej funkcie $y = \log_{0,5} \boldsymbol{(x+2)}$, ktorý je uvedený na obr. 20. Jeho kolmým priemetom na os y získame obor hodnôt danej funkcie: je zrejmé, že

$$\mathcal{H} = \mathbb{R}.$$

Poďme na priesečníky so súradnicovými osami:

- priesečník s osou y: tu stačí zistiť hodnotu danej funkcie v bode 0. Keďže $\log_{0,5}(0+2) = \log_{0,5} 2 = -1$, tak graf pretína os y v bode so súradnicami $[0; -1]$;
- priesečník s osou x: tu je potrebné zistiť, či v nejakom čísle x nadobúda daná funkcia hodnotu 0. To musíme riešiť rovnicu $\log_{0,5}(x+2) = 0$. Na základe (24) dostaneme

$$0{,}5^0 = x + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -1.$$

Teda graf danej funkcie pretína os x v bode so súradnicami $[-1; 0]$.

b) Definičný obor funkcie $y = \log x^2$ je daný riešením nerovnice $x^2 > 0$. Odtiaľ je

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$$

Ale ako sa dopracovať ku grafu funkcie $f\colon y = \log x^2$? Keby tam nebol ten logaritmus tak by to bola parabola! A čo tak úprava predpisu funkcie podľa vlastnosti V1: $\log x^2 = 2 \cdot \log x$? Dostaneme tým funkciu

$$g\colon y = 2 \cdot \log x \tag{26}$$

a jej graf už vieme získať z grafu funkcie $y = \log x$ (čiarkovaný graf na obr. 21) dvojnásobnou dilatáciou (násobenie číslom 2). Táto úvaha je správna len pre kladné x, lebo definičným oborom funkcie g je množina $(0; \infty)$. Ale definičný obor funkcie f je $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Ako sa vysporiadať s intervalom $(-\infty; 0)$? Všimnime si, že pre ľubovoľné $x \neq 0$ platí

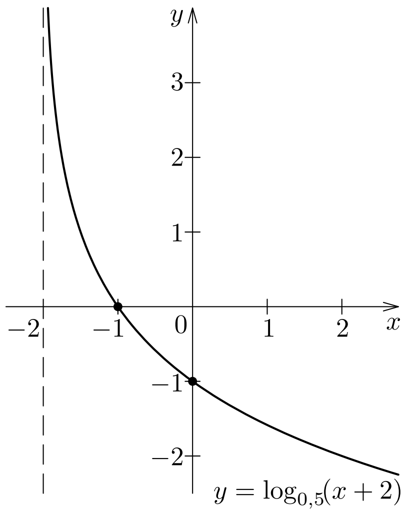
$$f(-x) = \log(-x)^2 = \log x^2 = f(x),$$

čo znamená, že hodnoty funkcie f sa vo dvojici súmerne združených bodov x a $(-x)$ rovnajú. Teda jej graf je osovo súmerný vzhľadom na os y. Požadovaný graf dostaneme z grafu funkcie g pomocou osovej súmernosti vzhľadom na os y – pozri obr. 21. Z obrázku vidno, že oborom hodnôt danej funkcie je opäť množina $\mathbb{R}$.

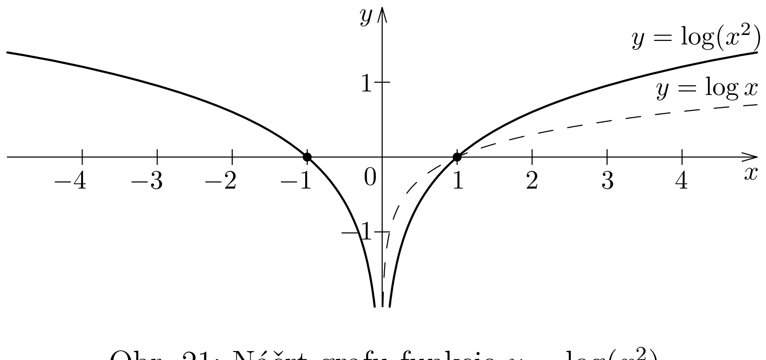
Keďže číslo 0 nie je z definičného oboru danej funkcie, tak jej graf nepretína os y. Os x pretína v bodoch, ktorých x-ové súradnice sú riešením rovnice $\log x^2 = 0$. Odtiaľ podľa (24) je $x^2 = 1$, a teda $x = \pm 1$. Graf danej funkcie pretína x-ovú os vo dvoch bodoch, ktorých súradnice sú $[-1; 0]$ a $[1; 0]$.

c) Definičný obor funkcie $y = \log_2 8x$ získame riešením nerovnice $8x > 0$. Odtiaľ je $\mathcal{D} = (0; \infty)$.

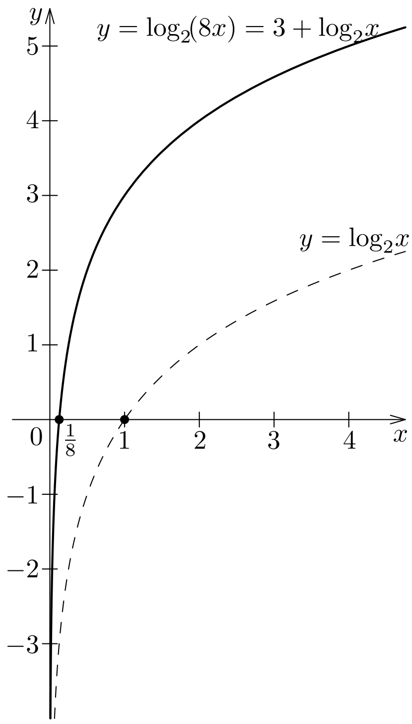
Graf našej funkcie $y = \log_2 \boldsymbol{8x}$ by sme mohli dostať osemnásobnou kontrakciou známeho grafu funkcie $y = \log_2 \boldsymbol{x}$. Ukážeme názornejší postup: na základe vlastnosti V1 a (24) platí:



Obr. 20: Náčrt grafu funkcie $y = \log_{0,5}(x + 2)$



Obr. 21: Náčrt grafu funkcie $y = \log(x^2)$



Obr. 22: Náčrt grafu funkcie $y = \log_2(8x)$

$\log_2 8x = \log_2 8 + \log_2 x = 3 + \log_2 x$. Tieto úpravy boli ekvivalentné, a teda predpis danej funkcie môžeme zapísať takto

$$y = \mathbf{3} + \log_2 x. \tag{27}$$

Graf funkcie $y = \log_2 x$ poznáme (na obr. 22 je nakreslený prerušovanou čiarou). Z neho dostaneme požadovaný graf funkcie (27) posunutím, ktoré je dané vektorom $\boldsymbol{v} = [0; 3]$, t. j. posunutím v smere osi y o hodnotu 3 – pozri obr. 22. Odtiaľ vidno, že oborom hodnôt danej funkcie je množina reálnych čísel $\mathbb{R}$.

V bode 0 nie je daná funkcia definovaná, a preto jej graf nepretína os y. Na určenie priesečníkov s x-ovou osou treba riešiť rovnicu $\log_2 8x = 0$. Podľa (24) dostaneme $2^0 = 8x$, t. j. $x = 1/8$. Teda graf pretína x-ovú os v bode, ktorého súradnice sú $[1/8; 0]$ (porozmýšľajte o tom, ako sme sa mohli dopracovať k tomu bodu cez osemnásobnú kontrakciu). □

Pri riešení **logaritmických rovníc** (t. j. rovníc, v ktorých vystupuje logaritmus výrazu s neznámou) zvyčajne pomocou vlastností V1 a V2 upravíme rovnicu na tvar

- rovnosti dvoch logaritmov s rovnakým základom (pozri príklad 21) a potom použijeme vlastnosť V3 (tzv. „odlogaritmovanie“, t. j. „exponovanie“):

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2. \tag{28}$$

- v ktorom môžeme použiť substitúciu – pozri príklad 23;
- v ktorom môžeme obe strany rovnice „logaritmovať“ (pozri príklad 23)

Pri riešení väčšiny logaritmických rovníc budeme potrebovať definíciu logaritmu (24).

Príklad 20 *Riešme nasledujúce rovnice*

a) $\log_2 8 = x$; *b)* $\log_2 x = 3$; *c)* $\log_x 8 = 3$.

Riešenie. Na základe (24) je

a) $\log_2 8 = x$ práve vtedy, keď $2^x = 8$. Pretože $8 = 2^3$, tak $2^x = 2^3$, a teda $x = 3$.

b) $\log_2 x = 3$ práve vtedy, ak $2^3 = x$, t. j. $x = 8$.

c) $\log_x 8 = 3$ práve vtedy, keď $x^3 = 8$, čiže $x = 2$. □

Príklad 21 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu* $\log(x-2) + \log(8x+4) = 3$.

Riešenie. Pretože $3 = \log 10^3$, tak úpravou ľavej strany rovnice podľa vlastnosti V1 dostávame[14]

$$\log[(x-2)(8x+4)] = \log 1000.$$

„Odlogaritmovaním" tejto rovnice dostaneme $(x-2)(8x+4) = 1000$, čo je kvadratická rovnica. Jej riešením je $x_1 = 12$ a $x_2 = -21/2$.

Keďže sme použili neekvivalentnú úpravu rovnice, musíme urobiť skúšku správnosti.

Pre $x = 12$ je hodnota ľavej strany rovnice

$$L(12) = \log(12-2) + \log(8 \cdot 12 + 4) = \log 10 + \log 100 = 1 + 2 = 3,$$

a teda $12 \in \mathcal{K}$.

$x = -21/2$ nie je riešením danej rovnice, lebo v tomto bode $\log(x-2)$ neexituje – dostávame logaritmus záporného čísla. Záver: $\mathcal{K} = \{12\}$. □

Príklad 22 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu* $2^{x+2} + 2^x = 5 \cdot 3^{x-1} - 3^x$.

Riešenie. Je to exponenciálna rovnica. Upravíme jej ľavú stranu

$$2^{x+2} + 2^x = 2^x \cdot 2^2 + 2^x = 5 \cdot 2^x$$

a aj jej pravú stranu

$$5 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 5 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} - 3^x = 3^x \left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{2}{3} \cdot 3^x.$$

Danú rovnicu môžeme teda zapísať v ekvivalentnom tvare

$$5 \cdot 2^x = \frac{2}{3} \cdot 3^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 15 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x.$$

Poslednú rovnicu už môžeme „logaritmovať". Zvolíme za základ logaritmu Eulerovo číslo e – potom logaritmus podľa dohody označujeme ln (mohli sme zvoliť za základ logaritmu aj číslo 2 alebo 3 alebo 10). Podľa vlastnosti V1 dostaneme

$$\ln 15 + x \ln 2 = \ln 2 + x \ln 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(\ln 2 - \ln 3) = \ln 2 - \ln 15,$$

odkiaľ

$$x = \frac{\ln 15 - \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} = \frac{\ln 7{,}5}{\ln 1{,}5}.$$

Veľkou chybou by bolo krátiť výsledný zlomok „výrazom ln". Skúšku správnosti nemusíme urobiť, lebo sme použili ekvivalentné úpravy – ale skúste ju urobiť! □

[14]Získaná rovnica nie je ekvivalentná s danou rovnicou – zdôvodnite to.

Príklad 23 *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu $x^{\log x} = 0{,}1x^2$.*

Riešenie. Najprv danú rovnicu logaritmujeme

$$\log(x^{\log x}) = \log(0{,}1x^2).$$

Podľa vlastnosti V1 dostávame

$$\log x \cdot \log x = \log 0{,}1 + 2 \log x.$$

Z definície logaritmu (24) je $\log 0{,}1 = -1$ (základom logaritmu je číslo 10). Potom získaná rovnica nadobúda tvar[15]

$$\log^2 x - 2 \log x + 1 = 0.$$

Použitím substitúcie $\log x = y$ dostávame kvadratickú rovnicu $y^2 - 2y + 1 = 0$ s neznámou $y \in \mathbb{R}$. Riešením tejto rovnice je $y = 1$. Dosadením do substitučnej rovnice dostávame $\log x = 1$, čiže $x = 10^1 = 10$.

Urobíme skúšku správnosti:

$$L(10) = 10^{\log 10} = 10^1 = 10 \qquad \text{a} \qquad P(10) = 0{,}1 \cdot 10^2 = 10.$$

Teda $x = 10$ je jediným riešením danej rovnice. $\square$

[15]Uvedomme si, že $\log^2 x = (\log x)^2$, $\sin^5 x = (\sin x)^5$ a pod.

Úlohy

1. Určte hodnoty logaritmov:

   a) $\log_{10} 1000$; [3]

   b) $\log_2 0{,}5$; [−1]

   c) $\log_{17} 1$; [0]

   d) $\log_9 \dfrac{1}{3}$; [−1/2]

   e) $\log_2 4$; [2]

   f) $\log_2 \sqrt[3]{4}$. [2/3]

2. Vypočítajte hodnoty výrazov:

   a) $\log_5 10 + \log_5 12{,}5$; [3]

   b) $4\log_6 3 + 5\log_6 2 - \log_6 12$; [3]

   c) $\log_2 10 + \log_2 6{,}4$; [6]

   d) $5\log 5 + 6\log 2 - \log 20$; [4]

   e) $\log 1500 - \log 15$; [2]

   f) $\log_5 250 + \log_5 \dfrac{125}{4} - \log_5 5^{-1}$. [7]

3. Určte y, ak

   a) $\log y = \log(x+3) + \log(x-3) - \log(x^2+1) - 2$;
   $\left[y = \dfrac{(x+3)(x-3)}{100(x^2+1)}\right]$

   b) $\log y = 2\log a - \dfrac{2}{3}\log b - \dfrac{1}{4}\log c$. $\left[y = \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{c}}\right]$

4. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

   a) $\log_3(x+5) = \log_3(2x-1)$; [6]

   b) $\log(x+3) - \log 2 = 1 - \log(x+2)$; [2]

c) $\log_3(x^2 - 8x) = 2\,;$ [$\{-1; 9\}$]

d) $\log_6(4x + 8) = 2\,;$ [7]

e) $\log_2 x = 3\,;$ [8]

f) $\log_{10} x = -4\,;$ [0,0001]

g) $\log_{16} x = 0{,}5\,;$ [4]

h) $\log_{25} x = -0{,}5\,;$ [1/5]

i) $\log_{0{,}2487} x = 0\,;$ [1]

j) $\log_2 x = -3\,;$ [1/8]

k) $\log_x 8 = 3\,;$ [2]

l) $\log_x 9 = 2\,;$ [3]

m) $\log_x 5 = \dfrac{1}{2}\,;$ [25]

n) $\log_x 25 = 2\,;$ [5]

o) $\log_x 49 = 2\,.$ [7]

5. Určte definičné obory funkcií:

a) $y = \sqrt{\log(7 - x - x^2)};$ [$\langle -3; 2\rangle$]

b) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2 - x)};$ [$\langle 1; 2)$]

c) $y = \sqrt{\log_5 \dfrac{3}{x-3}};$ [$(3; 6\rangle$]

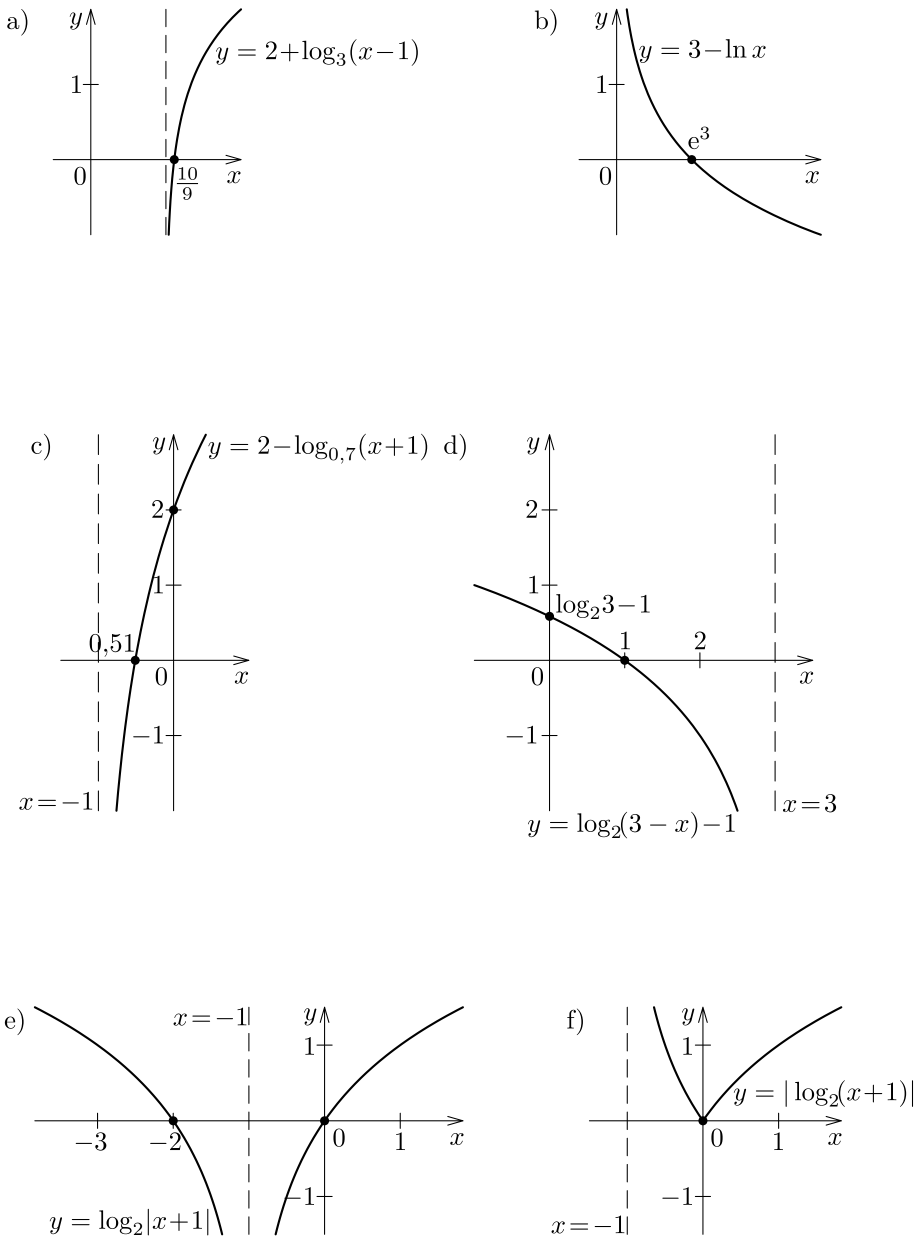
d) $y = \sqrt{\log_4 \dfrac{3x}{x-3}};$ [$(-\infty; -3/2\rangle \cup (3; \infty)$]

e) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 1)};$ [$\langle 0; 1) \cup (1; 2\rangle$]

f) $y = \sqrt{\log_{\frac{3}{4}} \dfrac{2x-1}{5+3x}};$ [$(-\infty; -6\rangle \cup (1/2; \infty)$]

g) $y = \sqrt{3 - x} + \sqrt{\log \dfrac{3-2x}{5}};$ [$(-\infty; -1\rangle$]

h) $y = \log\Big(1 - \log(x^2 - 5x + 16)\Big);$ [$(2; 3)$]



Obr. 23: Náčrty grafov funkcií úlohy 3

6. Určte definičný obor a obor hodnôt daných funkcií, načrtnite ich grafy a určte ich priesečníky so súradnicovými osami:

a) $y = 2 + \log_3(x-1)$; $[\mathcal{D} = (1;\infty);\ \mathcal{H} = \mathbb{R};\ [10/9;0]]$

b) $y = 3 - \ln x$; $[\mathcal{D} = (0;\infty);\ \mathcal{H} = \mathbb{R};\ [e^3;0]]$

c) $y = 2 - \log_{0,7}(x+1)$; $[\mathcal{D} = (-1;\infty);\ \mathcal{H} = \mathbb{R};\ [-0{,}51;0];\ [0;2]]$

d) $y = \log_2(3-x) - 1$; $[\mathcal{D} = (-\infty;3));\ \mathcal{H} = \mathbb{R};\ [1;0];\ [0;\log_2 3 - 1]]$

e) $y = \log_2|x+1|$; $[\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1\};\ \mathcal{H} = \mathbb{R};\ [-2;0];\ [0;0]]$

f) $y = |\log_2(x+1)|$; $[\mathcal{D} = (-1;\infty);\ \mathcal{H} = \langle 0;\infty);[0;0]$

g) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$; $[\mathcal{D} = (1;\infty);\ \mathcal{H} = \mathbb{R};\ [1;0]]$

h) $y = \ln(2x+5)$; $[\mathcal{D} = (-5/2;\infty);\ \mathcal{H} = \mathbb{R};\ [0;\ln 5];\ [-2;0]]$

Odporúčané zdroje

[1] Baculíková, B. – Grinčová, A.: *Matematika I. Vzorové a neriešené úlohy,* TU v Košiciach (2013) 157 s., ISBN 978-80-553-1501-0, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/13/Vzorove_a_neriesene_ulohy_0_0.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[2] Buša, J. – Schrötter, Š.: *Stredoškolská matematika pre študentov FEI TU v Košiciach,* TU v Košiciach (2015) 180 s., ISBN 978-80-553-2193-6, `http://people.tuke.sk/jan.busa/SM/Busa_Schrotter_Stredoskolska_matematika_2015.pdf`, [navštívené 20. 6. 2016]

[3] Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.: *Úvod do predmetu MATEMATIKA 1*, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/M1-Ucebnica-Dzurina-Grincova-Pirc.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[4] *Matematika I*, elektronický učebný text, `http://it4kt.cnl.tuke.sk/c/mat/student/01.html`, [navštívené 18. 6. 2016]