Kapitola 5

Limita funkcie

5.1 Čo je to limita funkcie

Nech je daná funkcia $f\colon y = f(x) = 2x + 2$, ktorá je definovaná na množine $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Ak uvažujeme číslo „blízke“ číslu 1, tak vidíme, že hodnoty funkcie f sú „blízke“ číslu 4. „Blízkosť“ čísel tu posudzujeme podľa veľkosti absolútnej hodnoty ich rozdielu. Inak by sme mohli posudzovať blízkosť nejakého čísla k danému číslu podľa toho, či sa nachádza v dosť „malom“ okolí príslušného čísla.

Definícia 5.1 Pod δ**-okolím bodu** x_0 budeme rozumieť otvorený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$. Označíme ho symbolom: $O_\delta(x_0)$.

δ-okolie bodu x_0 je interval so stredom v bode x_0 a polomerom δ. Ak nejaké ľubovoľné reálne číslo x je z δ-okolia bodu x_0, tak to môžeme napísať jedným z nasledujúcich spôsobov:

(1) $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

(2) $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$,

(3) $|x - x_0| < \delta$,

(4) $O_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \wedge \delta > 0\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Definícia 5.2 Pod **pravým** δ**-okolím bodu** x_0 rozumieme interval $\langle x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$. Označíme ho symbolom: $O_\delta^+(x_0)$.

$$O_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leqq x < x_0 + \delta \wedge \delta > 0\} = \langle x_0, x_0 + \delta).$$

Pod **ľavým** δ**-okolím bodu** x_0 rozumieme interval $(x_0 - \delta, x_0\rangle$, kde $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$. Označíme ho symbolom: $O_\delta^-(x_0)$.

$$O_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x \leqq x_0 \wedge \delta > 0\} = (x_0 - \delta, x_0\rangle.$$

Niekedy používame aj zjednodušené zápisy δ okolia: $\delta(x_0)$, $\delta_-(x_0)$, $\delta_+(x_0)$, $O_\delta(x_0)$, $O_\delta^-(x_0)$, $O_\delta^+(x_0)$, alebo len napíšeme δ-okolie bodu x_0.

Definícia 5.3 Nech je daná funkcia f, bod x_0 a reálne číslo α. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 limitu rovnú číslu** α, ak k ľubovoľnému reálnemu číslu $\varepsilon > 0$ existuje také $O_\delta(x_0)$, že pre všetky $x \in O_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$ je funkcia f definovaná a platí: $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha. \tag{5.1}$$

Definícia 5.4 Nech je daná funkcia f, bod x_0 a reálne číslo α. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 limitu sprava rovnú číslu** α, ak k ľubovoľnému reálnemu číslu $\varepsilon > 0$ existuje také $O_\delta^+(x_0)$, že pre všetky $x \in O_\delta^+(x_0)$, $x \neq x_0$ je funkcia f definovaná a platí: $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha. \tag{5.2}$$

Definícia 5.5 Nech je daná funkcia f, bod x_0 a reálne číslo α. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 limitu zľava rovnú číslu** α, ak k ľubovoľnému reálnemu číslu $\varepsilon > 0$ existuje také $O_\delta^-(x_0)$, že pre všetky $x \in O_\delta^-(x_0)$, $x \neq x_0$ je funkcia f definovaná a platí: $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha. \tag{5.3}$$

Poznámka 5.1.1 Limity funkcie f sprava (5.2) a zľava (5.3) v bode x_0 sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode x_0.

Veta 5.1 Nech je daná funkcia f a reálne číslo x_0. Funkcia f má v bode x_0 limitu rovnú reálnemu číslu α práve vtedy, keď funkcia f má v bode x_0 limitu sprava aj limitu zľava a navyše obe limity sa rovnajú reálnemu číslu α. Formálne to zapíšeme:

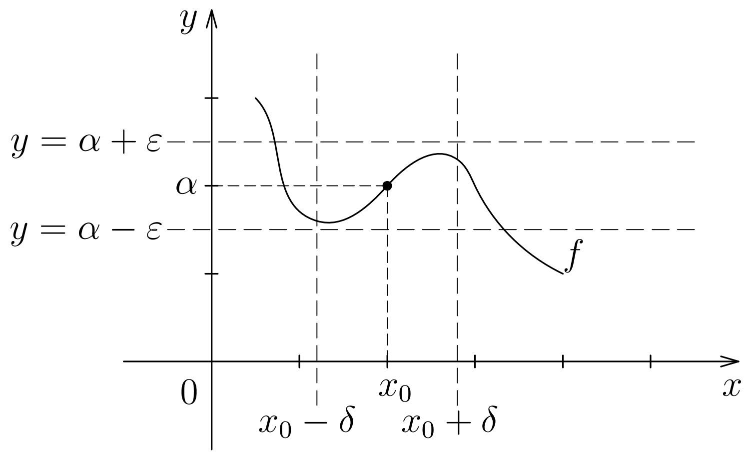
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha.$$

Nech $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$. Nerovnosť $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ znamená to isté, čo zápis:

$$\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon.$$

Zostrojme grafy funkcií g_1 a g_2, kde g_1: $y = \alpha - \varepsilon$ a g_2: $y = \alpha + \varepsilon$. Ak zvolíme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne malé, potom pás, ktorý je ohraničený rovnobežkami $y = \alpha - \varepsilon$ a $y = \alpha + \varepsilon$, ktorého šírka je $2 \cdot \varepsilon$, určí vždy δ-okolie bodu x_0 tak, že graf funkcie f bude pre každé $x \in O_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$ ležať medzi týmito rovnobežkami, t. j. medzi grafmi funkcií g_1 a g_2. Pozri obrázok 5.1.

Na základe obrázku 5.1 môžeme povedať, že funkcia f má v bode x_0 limitu rovnú reálnemu číslu α, ak ku každému ε-okoliu bodu α, existuje také δ-okolie bodu x_0, že pre všetky hodnoty $x \neq x_0$ z okolia $O_\delta(x_0)$ je zodpovedajúca hodnota funkcie $f(x)$ z ε-okolia bodu α.



Obr. 5.1: ε-okolie a δ-okolie bodu x_0 funkcie f a jej limita α.

5.2 Vlastnosti limity funkcie

Veta 5.2 Nech sú dané funkcie f a g. Ak existujú limity: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \beta$, tak existujú aj nasledujúce limity:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konštanta,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot \alpha$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konštanta,

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \alpha + \beta$,

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \alpha \cdot \beta$,

(5) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, pre $\beta \neq 0$.

Veta 5.3 Platia nasledujúce rovnosti:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,

(2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$,

(4) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$,

(5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$,

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$,

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$,

(8) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x}\right)$ – neexistuje,

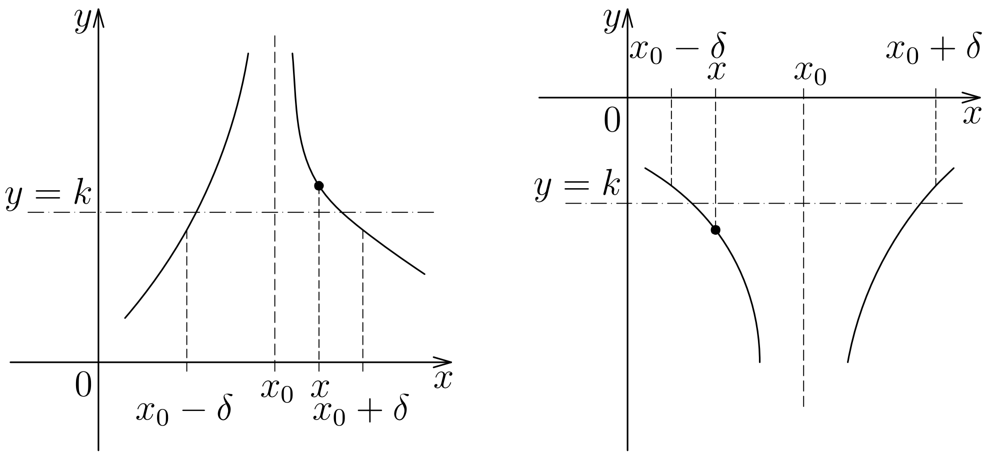
(9) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

Poznámka 5.2.1 Vety 5.2 a 5.3 platia len pre prípady vlastných limít. Pre neurčité výrazy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $1^{\pm\infty}$, ∞^0, 0^∞ a 0^0, ktoré môžeme dostať, ak sa snažíme dosadiť za x hodnotu x_0, postupujeme tak, že najprv si určíme typ neurčitosti (po tzv. nesprávnom dosadení za x). Odstránime neurčitosť (alebo aspoň čiastočne) a vypočítame limitu dosadením za premennú x.

Z predchádzajúcich definícií a vlastností je zrejmé, že ak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, pre $x \to x_0$, tak pre všetky $x \neq x_0$: $f(x) \to A$. Ide o vlastnú limitu funkcie $f(x)$ vo vlastnom bode x_0.

Úvahy možno rozšíriť o prípady, keď limita funkcie f v bode x_0 je rovná $+\infty$ alebo $-\infty$, a tiež vtedy, keď limitu funkcie f uvažujeme v nevlastnom bode, t. j. pre $x \to \pm\infty$. Zmysel týchto prípadov možno sledovať napríklad na nasledujúcich obrázkoch.

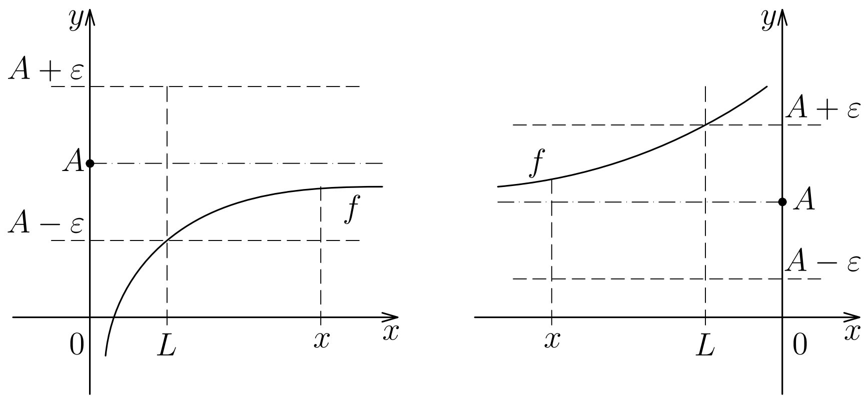
Obrázok 5.2 zobrazuje situácie, keď $x \to x_0$ a $f(x) \to +\infty$ alebo $f(x) \to -\infty$. Teda ide o limity v tvare: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

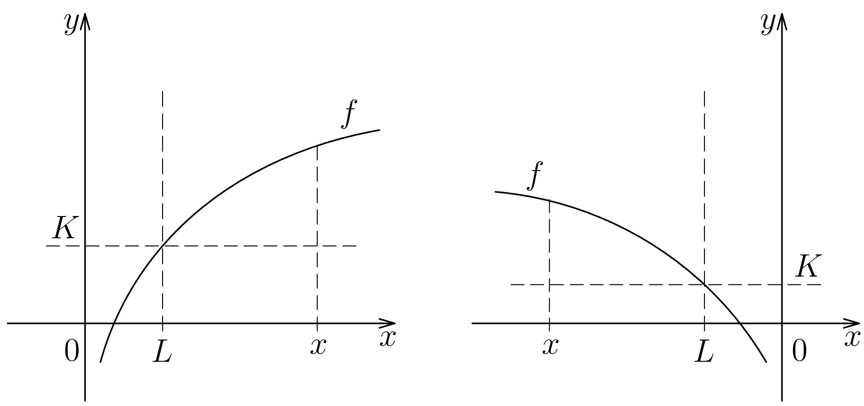
Obr. 5.2: Ukážka limít typu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Obrázok 5.3 zobrazuje situácie, keď $x \to \pm\infty$ a $f(x) \to A$. Číslo A sa nazýva vlastná limita funkcie $f(x)$ v nevlastnom bode $\pm\infty$. Teda ide o limity v tvare: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

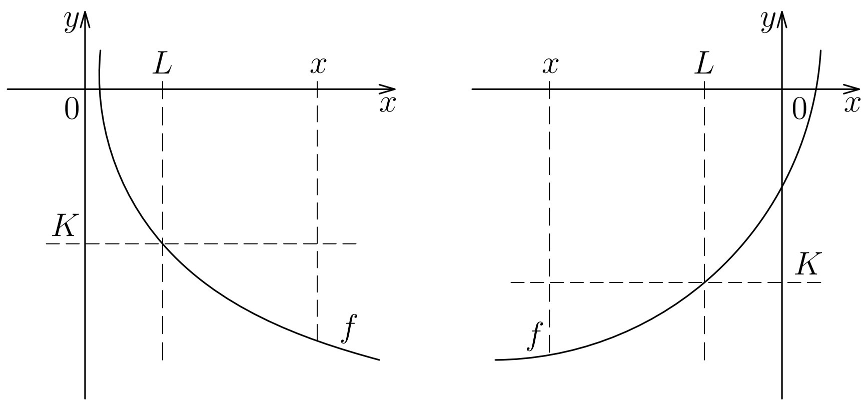


$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

Obr. 5.3: Ukážka limít typu: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$.



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Obr. 5.4: Ukážka limít typu: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Obrázok 5.4 zobrazuje situácie, keď $x \to \pm\infty$ a $f(x) \to \pm\infty$. Hovoríme, že funkcia f má nevlastnú limitu funkcie $f(x)$ v nevlastnom bode $\pm\infty$, ktorá sa rovná $\pm\infty$. Teda ide o limity v tvare: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Základné vzorce na výpočet limít[1]

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\left[\frac{0}{0}\right]$,
(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\left[\frac{0}{0}\right]$,
(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$[1^{+\infty}]$,
(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$[1^{-\infty}]$,
(5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ – neexistuje	$\left[\frac{1}{0}\right]$,
(6) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\left[\frac{1}{0^-}\right]$,
(7) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$	$\left[\frac{1}{0^+}\right]$,
(8) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$, pre $a > 1$	$[a^\infty]$,
(9) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 1$, pre $a = 1$	$[a^\infty]$,
(10) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, pre $a \in (0, 1)$	$[a^\infty]$,
(11) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, pre $a > 1$	$[a^{-\infty}]$,
(12) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 1$, pre $a = 1$	$[a^{-\infty}]$,
(13) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$, pre $a \in (0, 1)$	$[a^{-\infty}]$,
(14) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$	$[e^\infty]$,
(15) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$[e^{-\infty}]$,
(16) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$	$[\ln 0]$,
(17) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$	$[\ln \infty]$,
(18) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$, pre $n \in \mathbb{N}$	$[\infty^n]$,
(19) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \infty$, pre $n \in \mathbb{N}$, n párne	$[(-\infty)^n]$,
(20) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, pre $n \in \mathbb{N}$, n nepárne	$[(-\infty)^n]$,
(21) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, pre $n \in \mathbb{N}$	$\left[\frac{1}{(\pm\infty)^n}\right]$,

[1] V hranatých zátvorkách je uvedený typ limity.

(22) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = \infty$, pre $n \in \mathbb{N}$, n párne $\left[\frac{1}{(0)^n}\right]$,

(23) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} =$ neexistuje, pre $n \in \mathbb{N}$, n nepárne $\left[\frac{1}{(0)^n}\right]$,

(24) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$, pre $n \in \mathbb{N}$, n nepárne $\left[\frac{1}{(0^-)^n}\right]$,

(25) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$, pre $n \in \mathbb{N}$, n nepárne $\left[\frac{1}{(0^+)^n}\right]$,

(26) $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = \infty$ $\left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\right]$,

(27) $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ $\left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\right]$,

(28) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$ $[\operatorname{cotg} 0]$,

(29) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{cotg} x = \infty$ $[\operatorname{cotg} 0]$,

(30) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ $[\operatorname{arctg} \infty]$,

(31) $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ $[\operatorname{arctg} -\infty]$,

(32) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arccotg} x = 0$ $[\operatorname{arccotg} \infty]$,

(33) $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$ $[\operatorname{arccotg} -\infty]$,

(34) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sin x =$ neexistuje $[\sin \pm\infty]$,

(35) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \cos x =$ neexistuje $[\cos \pm\infty]$.

Riešené príklady 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 a 5.2.4 ukazujú postup pri výpočte limít reálnych funkcií.

Príklad 5.2.1 Vypočítajte:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \log(3x^2 - 5x + 1)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

Riešenie:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \log(3x^2 - 5x + 1) = \lim\limits_{x\to -1} \log(3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 1) = \log 9.$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x + 1 - 1}{x \cdot \left(\sqrt{x+1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$ $\surd$

Príklad 5.2.2 Vypočítajte:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+5x-14}$,

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+5)}{x^4+x-11}$,

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+2x^2-7x}{7x^3-4x+2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+2x^2-7}{x^3-4x+1}$.

Riešenie:

(a) Ak funkcia, z ktorej počítame limitu je racionálna lomená (t. j. čitateľ aj menovateľ tvorí polynóm) a dostaneme typ limity $\left[\frac{0}{0}\right]$, tak môžme čitateľ aj menovateľ vydeliť výrazom $x - x_0$. V našom prípade môžme čitateľa aj menovateľa vydeliť výrazom $x-2$. Dostávame:
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+5x-14} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+2}{x+7} = \frac{4}{3}.$$

(b) Ak dostaneme typ limity $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$, tak na základe stupňov polynómov v čitateli a menovateli vieme rýchlo odhadnúť výsledok takejto limity. Ukážeme si to na nasledujúcich príkladoch (b) až (d).
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+5)}{x^4+x-11} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+7x^2+12x+5x^2+35x+60}{x^4+x-11} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{47}{x^3}+\frac{60}{x^4}\right)}{x^4\cdot\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{11}{x^4}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{47}{x^3}+\frac{60}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}-\frac{11}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

(c) Aj v tomto prípade dostávame limitu typu $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$, preto zvolíme rovnaký postup.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+2x^2-7x}{7x^3-4x+2} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cdot\left(4+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{x^3\cdot\left(7-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{4}{7}.$$

(d) Posledná limita je tiež typu $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$ a zvolíme rovnaký postup ako v prípadoch (b) a (c).
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x^2-7}{x^3-4x+1} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cdot\left(x+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

$\checkmark$

Poznámka 5.2.2 Limity z racionálnych lomených funkcií typu $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$ môžeme počítať hneď, ak použijeme jedno z nasledujúcich pravidiel:

(1.) ak je v čitateli aj v menovateli polynóm rovnakého stupňa, tak výsledná limita je podiel koeficientov pri členoch s najvyššou mocninou polynómov v čitateli a menovateli,

(2.) ak je v čitateli polynóm menšieho stupňa ako polynóm v menovateli, tak výsledná limita je rovná nule,

(3.) ak je v čitateli polynóm väčšieho stupňa ako polynóm v menovateli, tak výsledná limita je rovná $+\infty$, ak majú koeficienty rovnaké znamienko, resp. $-\infty$, ak majú koeficienty opačné znamienko.

Príklad 5.2.3 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x}.$$

Riešenie:
Pri riešení tohto príkladu využijeme pre prehľadnosť a zjednodušenie substitúciu, ktorá už bola použitá v príkladoch 2.5.3 a 2.5.4 na strane 26.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{7\cdot \sin 7x}{7x} \left| \begin{array}{ll} \text{sub.} & 7x = t \\ & x\to 0, \quad t\to 0 \end{array} \right| = 7\cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 7\cdot 1 = 7. \qquad \surd$$

Príklad 5.2.4 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}.$$

Riešenie:
V tomto riešení využijeme podobný spôsob zjednodušenia ako v príkladoch 2.5.3 a 2.5.4, kde sa využíva substitúcia.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} \overset{[1^\infty]}{=} \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2x+3-2x-1}{2x+1}\right)^{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} \left| \begin{array}{ll} sub. & \frac{2x+1}{2} = t \\ & x\to\infty, \quad t\to\infty \end{array} \right| = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}. \qquad \surd$$

5.3 Neriešené úlohy

5.1 Vysvetlite nasledujúce pojmy: jednostranná limita funkcie v bode a sprava, jednostranná limita funkcie v bode a zľava a limita funkcie v bode a. Aký je medzi nimi vzťah?

5.2 Vysvetlite pojmy vlastná limita, nevlastná limita, limita vo vlastnom bode a limita v nevlastnom bode.

5.3 Vysvetlite, aký je rozdiel medzi vlastnou limitou v nevlastnom bode a nevlastnou limitou vo vlastnom bode.

5.4 Vypočítajte limitu funkcie:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2 - 3x + 2\right)$,

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x+2}{x-2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{5x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{8x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{10x}{(x-2)^4}$,

f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3}{(x+2)^2}$,

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^2+2x+15}{13x^2+6}$,

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$,

j) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{36-x^2}{\sqrt{3+x}-3}$,

k) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}$.

5.5 Vypočítajte limitu funkcie:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$,

b) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x}$,

c) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$,

d) $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$,

e) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+3}$,

f) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

g) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{3x-1}$,

h) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x}$.

5.6 Vypočítajte dané limity funkcie, ak existujú:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$,

b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$,

c) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$.

5.7 Vypočítajte nasledujúce jednostranné limity:

a) $\lim_{x\to 1^+}\frac{3x+1}{x-1}$,

b) $\lim_{x\to 1^-}\frac{3x+1}{x-1}$,

c) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{2x-4}$,

d) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{2x-4}$,

e) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x+3}{6-2x}$,

f) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x+3}{6-2x}$.

5.8 Vypočítajte limitu funkcie:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(x-1)\cdot\sqrt{2-x}}{x^2-1}\right)$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{5-x}\right)$,

5.4 Výsledky neriešených úloh

5.4 **a)** 0 **b)** 7 **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{5}{8}$ **e)** ∞ **f)** $-\infty$ **g)** $\frac{7}{13}$ **h)** 0 **i)** 0 **j)** -72 **k)** $\frac{1}{6}$

5.5 **a)** e^3 **b)** e^{-5} **c)** e^2 **d)** e^{-3} **e)** e^4 **f)** e **g)** e^{12} **h)** 0

5.6 **a)** neexistuje **b)** ∞ **c)** $-\infty$

5.7 **a)** ∞ **b)** $-\infty$ **c)** ∞ **d)** $-\infty$ **e)** $-\infty$ **f)** ∞

9.2 **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** 0 **e)** $-\frac{1}{4}$