Kapitola 7

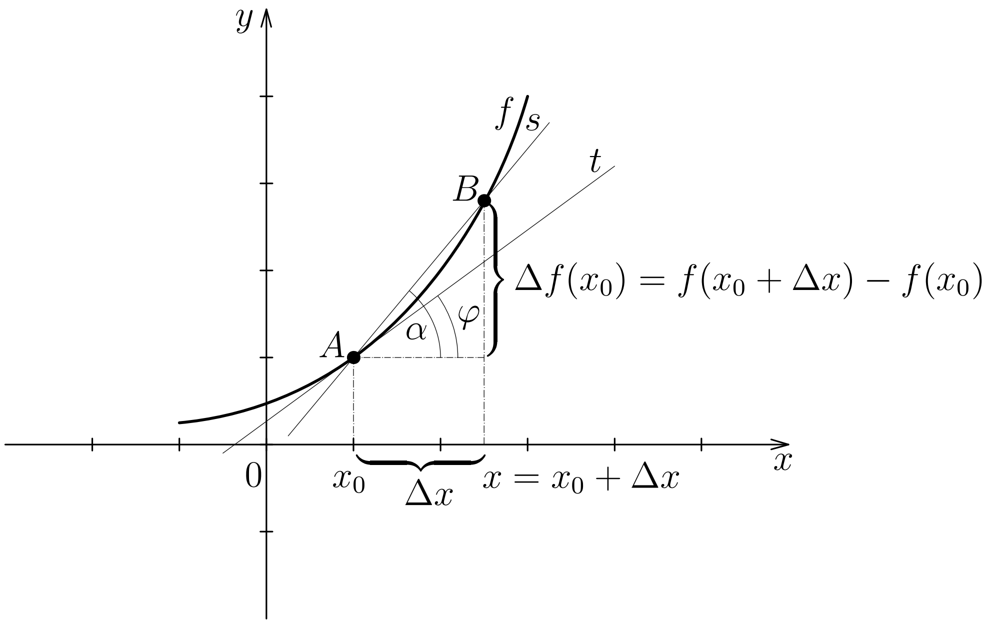
Derivácia funkcie

7.1 Pojem derivácie funkcie

Najprv ukážeme, ako vznikol pojem derivácie pri riešení niektorých geometrických a fyzikálnych úloh. Ukážeme teda, aká bola motivácia vzniku tohto pojmu. Pri definovaní pojmu *derivácia funkcie* sa odvolávame na pojem limity funkcie, pretože pri riešení niektorých geometrických a fyzikálnych úloh je to praktický postup.

7.1.1 Geometrická interpretácia

Popíšeme úlohu o dotyčnici na základe obrázku 7.1.



Obr. 7.1: Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $T = [x_0, y_0]$.

Nech je daná spojitá funkcia $f\colon y = f(x)$ s definičným oborom $\mathcal{D}(f)$. Zvoľme na grafe funkcie $f\colon y = f(x)$ pevný bod $A = [x_0, f(x_0)]$ a ďalší „pohyblivý bod“ $B = [x, f(x)]$, kde $x_0, x \in \mathcal{D}(f)$ a $x_0 \neq x$. Rozdiel $x - x_0 = \Delta x$ nazývame **prírastok argumentu**. Preto ak $\Delta x = x - x_0$, tak $x = x_0 + \Delta x$. Rozdiel $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \Delta y$ nazývame **prírastok hodnoty funkcie** f **v bode** x_0 prislúchajúci prírastku argumentu Δx, alebo tiež **diferencia funkcie** f v bode x_0. Preto ak $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, tak $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0)$.

Podiel:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{7.1}$$

sa nazýva **diferenčný podiel funkcie** f v bode x_0. Tiež sa zvykne nazývať aj ako **relatívny prírastok funkcie** f v bode x_0. Z obrázka 7.1 je zrejmé, že platí:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{7.2}$$

Vidíme, že diferenčný podiel $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ je smernicou priamky p, ktorá prechádza bodmi $A = [x_0, y_0]$ a $B = [x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ grafu funkcie f, kde $y_0 = f(x_0)$.

Poznámka 7.1.1 Na základe týchto pozorovaní a obrázka 7.1 možno intuitívne dôjsť k záveru, že ak sa bod B „blíži“ k bodu A, t. j. ak sa $\Delta x \longrightarrow 0$, tak poloha priamky $AB \equiv s$ (sečnica grafu f) prechádza do polohy priamky t (dotyčnice ku grafu funkcie f). To znamená, že aj smernica priamky AB sa postupne blíži k smernici priamky t, ktorú nazývame *dotyčnica ku grafu funkcie* f v bode $A \equiv T = [x_0, y_0]$.

Definícia 7.1 Nech je daná funkcia $f\colon y = f(x)$ s definičným oborom $\mathcal{D}(f)$ a nech $T = [x_0, y_0]$, kde $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a $y_0 = f(x_0)$. Nech funkcia f je definovaná v ľubovoľnom okolí bodu x_0.

(1) Ak existuje vlastná limita $k \in \mathbb{R}$

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{7.3}$$

tak **dotyčnicou** t ku grafu funkcie f v bode T nazývame priamku, ktorá prechádza bodom T a má smernicu k.

(2) Ak limita (7.3) je nevlastná, tak funkcia f je v bode x_0 spojitá. Potom **dotyčnicou** ku grafu funkcie f v bode T nazývame priamku t, ktorá prechádza bodom T a je rovnobežná s osou o_y.

(3) Ak limita (7.3) neexistuje, tak v bode T **neexistuje dotyčnica** ku grafu funkcie f.

Poznámka 7.1.2 Dotyčnica t ku grafu funkcie f je priamka, ktorá prechádza bodom T a má smernicu danú vzťahom (7.3), preto rovnicu dotyčnice t môžme písať aj v tvare:

$$t : y - y_0 = k \cdot (x - x_0), \tag{7.4}$$

kde $T = [x_0, y_0]$ a $y_0 = f(x_0)$. Pozri nasledujúci riešený príklad 7.1.1.

Príklad 7.1.1 Napíšte rovnicu dotyčnice t ku grafu funkcie f: $y = x^3$ v bode $T = [2, 8]$.

Riešenie:
Platí t: $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} =$$

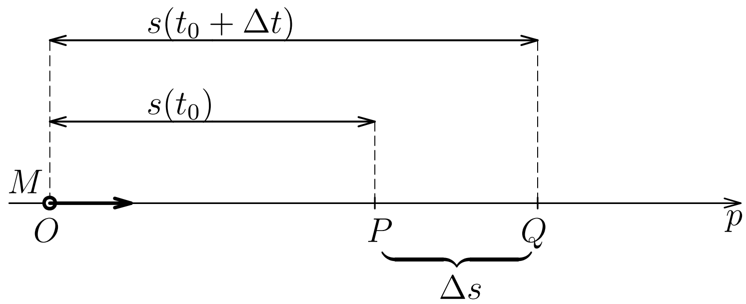
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (3x_0^2 + 3x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2) =$$

$$= 3x_0^2 = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Vieme, že t: $y = kx + q$ a súčasne bod $T \in t$. Preto platí, že $y = 12x + q$ a súčasne $8 = 12 \cdot 2 + q$. Odtiaľ dostávame, že $q = -16$. Priamka t: $y = 12x - 16$ je dotyčnicou ku grafu f: $y = x^3$ v bode $T = [2, 8]$. $\surd$

7.1.2 Fyzikálna interpretácia

Pozrime sa na fyzikálnu interpretáciu rovnakého pojmu. Uvažujme hmotný bod M, ktorý sa pohybuje po priamke p (pozri obrázok 7.2).



Obr. 7.2: Pohyb hmotného bodu po priamke.

V časovom okamihu t_0 nech je jeho poloha v bode P a dráha, ktorú prejde od bodu O za čas t_0 je s. Dráha s je funkciou času t, takže uvedený pohyb je popísaný funkciou s: $y = s(t)$. Nech v časovom okamihu $t_0 + \Delta t$ je pohybujúci sa bod M v bode Q. Nech Δs je prírastok dráhy za časový interval Δt. Tento prírastok sa rovná dráhe, ktorú bod M prešiel po priamke z bodu P do bodu Q. Preto platí:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0). \tag{7.5}$$

Podiel:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \tag{7.6}$$

sa nazýva *priemerná rýchlosť pohybu* bodu M po priamke p.

Ak je pohyb bodu M po priamke p nerovnomerný, potom sa priemerná rýchlosť mení v závislosti od zmeny veľkosti Δt. Ak sa Δt zmenšuje, tak podiel (7.6) stále presnejšie charakterizuje uvažovaný pohyb v časovom okamihu t_0. Ak existuje vlastná limita (7.7)

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}, \tag{7.7}$$

tak toto číslo nazývame *okamžitá rýchlosť* bodu M v čase t_0.

Ak označíme okamžitú rýchlosť daného pohybu v časovom okamihu t_0 symbolom $v(t_0)$ a v časovom okamihu $t_0+\Delta t$ ako $v(t_0+\Delta t)$, potom *priemerným zrýchlením* daného pohybu po dráhe PQ rozumieme podiel:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \tag{7.8}$$

a limitu (7.9)

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \tag{7.9}$$

nazývame *okamžité zrýchlenie* pohybu v časovom okamihu t_0. Nasledujúci príklad 7.1.2 je ilustráciou fyzikálnej interpretácie derivácie.

Príklad 7.1.2 Voľný pád je daný pohybovou rovnicou $v = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$, ktorá vyjadruje rýchlosť v v závislosti od času t. Vypočítajte okamžitú rýchlosť pohybujúceho sa bodu (padajúceho kolmo nadol) v čase $t_0 = 7$ sekúnd, ak gravitačnú konštantu g poznáme.

Riešenie:
Platí:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot (7 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot ((49 + 14\Delta t + (\Delta t)^2) - 49)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot g \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \cdot (14 + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 14 = 7 \cdot g \, [\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}].$$

Okamžitá rýchlosť pohybujúceho sa bodu v čase $t_0 = 7$ sekúnd je $7 \cdot g$ $[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$. $\surd$

Poznámka 7.1.3 Vidíme, že pre definíciu smernice dotyčnice krivky v danom bode, pre definíciu okamžitej rýchlosti priamočiareho pohybu hmotného bodu a pre definíciu okamžitého zrýchlenia pohybu sme použili limity (7.3), (7.7) a (7.9). Formálne sú úplne rovnaké, vždy išlo o limitu diferenčného podielu, t. j. podielu prírastku funkcie k prírastku argumentu funkcie, pričom prírastok argumentu funkcie sa blíži k nule. Vzhľadom na dôležitosť tejto limity je prirodzené zaviesť pre ňu všeobecný názov – *derivácia funkcie* f v bode x_0.

Definícia 7.2 Nech funkcia $f : y = f(x)$ je definovaná v okolí bodu $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. **Derivácia funkcie** f v bode x_0 je číslo zodpovedajúce limite (7.10) resp. (7.11), ak existuje:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{7.10}$$

resp.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{7.11}$$

Definícia 7.3 Hovoríme, že funkcia f: $y = f(x)$ má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ **deriváciu zľava**, ak je definovaná v istom ľavom okolí bodu $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje limita:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{7.12}$$

resp.

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{7.13}$$

Hovoríme, že funkcia f: $y = f(x)$ má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ **deriváciu sprava**, ak je definovaná v istom pravom okolí bodu $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje limita:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{7.14}$$

resp.

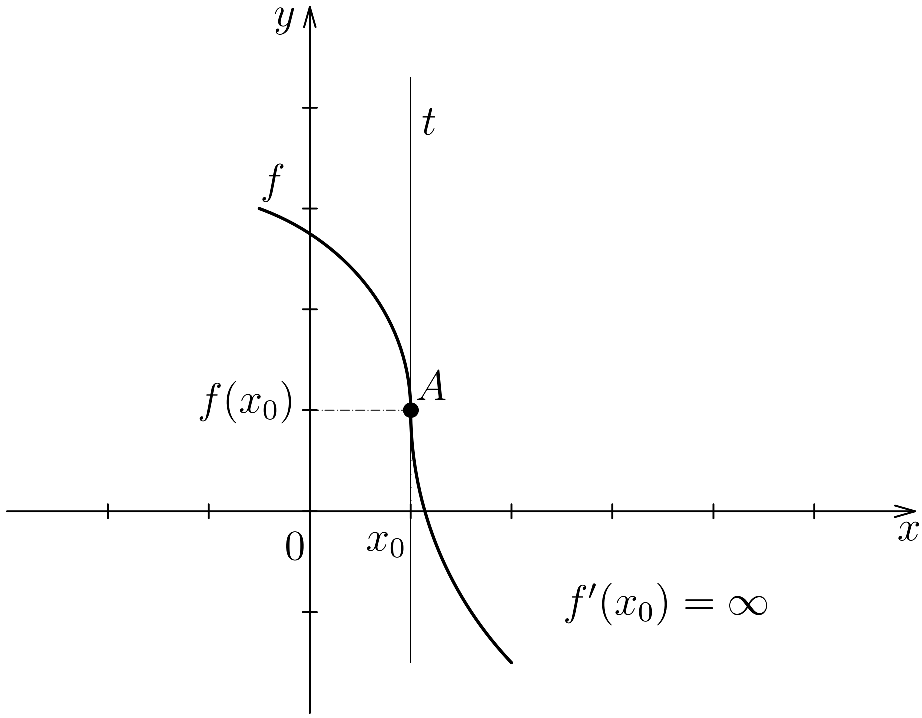
$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{7.15}$$

Poznámka 7.1.4 Ak limita (7.10), resp. (7.11) je vlastná, tak hovoríme o *vlastnej derivácii*. Ak tieto limity sú nevlastné, tak hovoríme o *nevlastnej derivácii*. Ak tieto limity neexistujú, tak hovoríme, že funkcia f nemá v bode x_0 deriváciu. Pozri obrázky 7.3, 7.4 a 7.5.

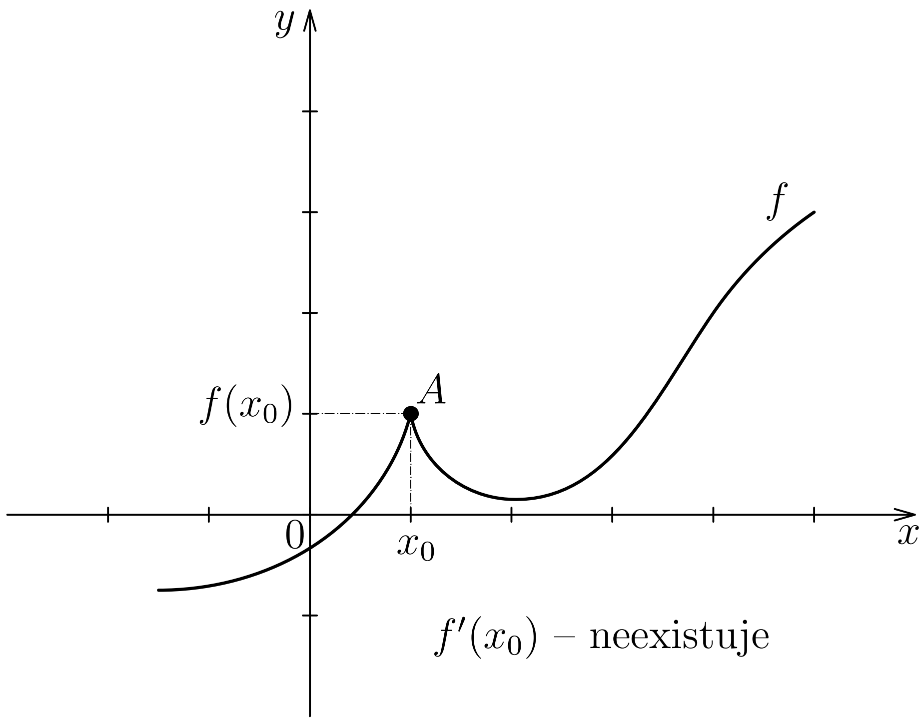
Poznámka 7.1.5 Na označenie derivácie funkcie f v bode x_0 sa najčastejšie používa nasledujúca symbolika:

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Definícia 7.4 Nech je daná funkcia f a bod $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Funkcia, ktorá má v bode x_0 deriváciu, sa nazýva **diferencovateľná** v bode x_0.



Obr. 7.3: Nevlastná derivácia.



Obr. 7.4: Derivácia v bode x_0 neexistuje.

Definícia 7.5 Nech je daná funkcia $f\colon y = f(x)$ s definičným oborom $\mathcal{D}(f)$. Ak má funkcia f deriváciu v každom bode nejakej číselnej množiny $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, tak hovoríme, že funkcia f má **deriváciu na množine** I, označíme $f_I'(x)$, t. j.

$$f_I'(x) = \{[x, y'] : x \in I \wedge y' = f'(x)\}.$$

Napríklad pre kvadratickú funkciu $f\colon y = x^2$ existuje derivácia $y' = 2x$ pre všetky $x \in I = (-\infty, \infty)$. Pozri tiež riešené príklady 7.1.3 a 7.1.4.

Príklad 7.1.3 Pomocou definície derivácie funkcie f v bode x_0 vypočítajte deriváciu, ak je daná funkcia $f\colon y = x^2 - 2$ a bod $x_0 = 3$.

Riešenie:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta x)^2 - 2 - (3^2 - 2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2 - 9 + 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (6 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Derivácia $f'(3) = 6$. $\surd$

Príklad 7.1.4 Ukážte, že funkcia $f\colon y = |x|$ nemá v bode $x_0 = 0$ deriváciu.

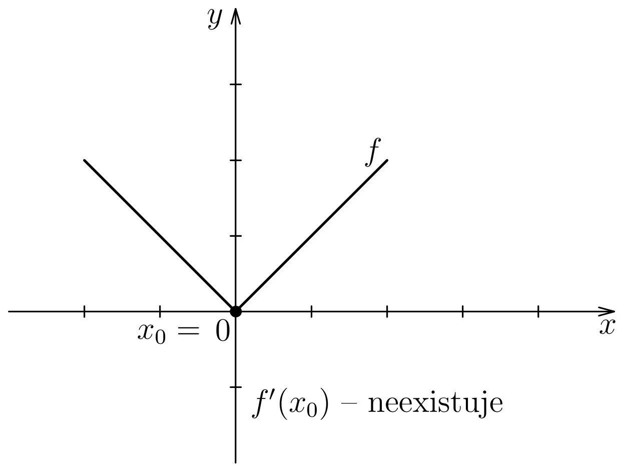
Riešenie:

$$f_+'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

a

$$f_-'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Vidíme, že $f_+'(0) \neq f_-'(0)$. Derivácia $f'(0)$ nie je definovaná, preto funkcia $f\colon y = |x|$ nemá v bode $x_0 = 0$ deriváciu. Pozri obrázok 7.5. $\surd$



Obr. 7.5: Funkcia f: $y = |x|$ nemá deriváciu v bode $x_0 = 0$.

Veta 7.1 Ak funkcia f má v bode x_0 deriváciu, tak funkcia f je v tomto bode spojitá.

Veta 7.2 Nech je daná funkcia f: $y = f(x)$ a bod $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je vnútorným bodom definičného oboru funkcie f. Funkcia f má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, ak má v bode x_0 deriváciu zľava $f'_-(x_0)$, deriváciu sprava $f'_+(x_0)$ a platí rovnosť: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

7.2 Základné pravidlá derivovania

Veta 7.3 (Základné pravidlá derivovania) Nech funkcie f: $y = f(x)$ a g: $y = g(x)$ majú v bode x_0 derivácie $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$. Nech $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(1) $(c \cdot f(x_0))' = c \cdot f'(x_0)$,

(2) $(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$,

(3) $(f(x_0) - g(x_0))' = f'(x_0) - g'(x_0)$,

(4) $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,

(5) $\left(\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, kde $g(x_0) \neq 0$.

Poznámka 7.2.1 Vetu o derivovaní súčtu a súčinu dvoch funkcií možno rozšíriť na deriváciu súčtu a súčinu konečného počtu funkcií.

$$(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x),$$

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x))' = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdots f_i'(x) \cdots f_{n-1}(x) \cdot f_n(x).$$

Tieto vzorce platia v každom bode x_0, v ktorom existujú derivácie všetkých funkcií $f_i(x)$, pre $i = 1, 2 \ldots, n$.

Veta 7.4 (Derivácia zloženej funkcie) Nech zložená funkcia h: $y = f\Big(g(x)\Big)$ je definovaná na intervale (a, b) a nech $x_0 \in (a, b)$. Nech funkcia g má v bode x_0 deriváciu $g'(x_0)$ a nech funkcia f má v bode $z_0 = g(x_0)$ deriváciu $f'(z_0)$. Potom funkcia h má v bode x_0 deriváciu

$$h'(x_0) = f'(z_0) \cdot g'(x_0) = f'\left(g(x_0)\right) \cdot g'(x_0). \tag{7.16}$$

Na obrázku 7.6 je znázornený graf spojitej rastúcej funkcie $y = f(x)$. Funkcia f je spojitá a rastúca, preto k nej existuje inverzná funkcia f^{-1}, ktorá je tiež rastúca a spojitá. Grafy týchto funkcií sú symetrické vzhľadom na priamku p: $y = x$.

Graf funkcie f má v bode $P = [a, b]$, kde $b = f(a)$ dotyčnicu, ktorá zviera s osou x ostrý uhol α. Graf funkcie f^{-1} má v bode $P' = [b, a]$, kde $a = f^{-1}(b)$ dotyčnicu, ktorá zviera s osou x ostrý uhol β. Teda funkcia f^{-1} má v bode b deriváciu a platí:

$$(f^{-1})'(b) = \operatorname{tg}\beta. \tag{7.17}$$

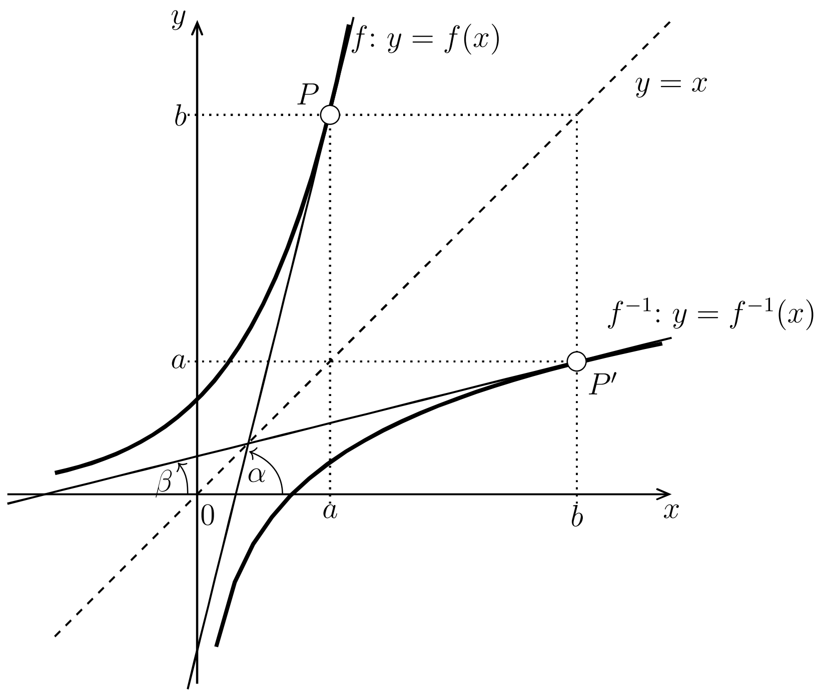
Pre uhly α a β platí:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \tag{7.18}$$

Potom dostávame:

$$(f^{-1})'(b) = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(a)}. \tag{7.19}$$

Tento výsledok sformulujeme teraz do vety 7.5.



Obr. 7.6: Derivácia inverznej funkcie $\left(f^{-1}(y_0)\right)'$.

Veta 7.5 (Derivácia inverznej funkcie) Nech funkcia f: $y = f(x)$ je definovaná na intervale (a, b). Nech f je na intervale (a, b) spojitá a prostá. Nech v bode $x_0 \in (a, b)$ má funkcia f deriváciu, kde $f'(x_0) \neq 0$. Potom funkcia v f^{-1} má v bode $y_0 = f(x_0)$ deriváciu a platí:

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{7.20}$$

7.3 Základné vzorce pre derivovanie

Pomocou definície derivácie funkcie f v bode x 7.2 možno dokázať, že platia nasledujúce vzťahy:

(1) $(c)' = 0$, kde c je konštanta $c \in \mathbb{R}$,

(2) $(x)' = 1$, pre $x \in \mathbb{R}$,

(3) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, pre $n \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}$,

(4) $(\sin x)' = \cos x$, pre $x \in \mathbb{R}$,

(5) $(\cos x)' = -\sin x$, pre $x \in \mathbb{R}$,

(6) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, pre $x \in \mathbb{R} - \{\frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$,

(7) $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$, pre $x \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$,

(8) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, pre $x \in (-1, 1)$,

(9) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, pre $x \in (-1, 1)$,

(10) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, pre $x \in \mathbb{R}$,

(11) $(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$, pre $x \in \mathbb{R}$,

(12) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, pre $x \in (0, \infty)$,

(13) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, kde $a > 0$ a $a \neq 1$, pre $x \in (0, \infty)$,

(14) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, pre $x \in \mathbb{R}$,

(15) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, kde $a > 0$ a $a \neq 1$, pre $x \in \mathbb{R}$.

Príklad 7.3.1 V úlohách a) až g) vypočítajte deriváciu funkcie f: $y = f(x)$ použitím základných vzorcov.

a) $f : y = x - \sin x$, pre $x \in \mathbb{R}$,

b) $f : y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x} + x^5 \cdot \mathrm{e}^x$, pre $x \in \mathbb{R} \wedge 1 - \sin x \neq 0$,

c) $f : y = \dfrac{\ln x}{x}$, pre $x \in \mathbb{R}^+$,

d) $f : y = \sin \sqrt{x}$, pre $x \in \mathbb{R}_0^+$,

e) $f : y = \sqrt{1 + x^5}$, pre $x \in \mathbb{R}_0^+$,

f) $f : y = \mathrm{e}^{\operatorname{arccotg} x^2}$, pre $x \in \mathbb{R}$,

g) $f : y = \cos^{13} x + \cos x^{13} + 13 \cdot \cos x$, pre $x \in \mathbb{R}$.

Riešenie:

a) $y' = (x - \sin x)' = (x)' - (\sin x)' = 1 - \cos x$

b) $$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + x^5 \cdot \mathrm{e}^x\right)' = \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x}\right)' + \left(x^5 \cdot \mathrm{e}^x\right)' = \\ &= \frac{(\cos x)' \cdot (1 - \sin x) - \cos x \cdot (1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} + (x^5)' \cdot \mathrm{e}^x + x^5 \cdot (\mathrm{e}^x)' = \\ &= \frac{-\sin x \cdot (1 - \sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} + 5x^4 \cdot \mathrm{e}^x + x^5 \cdot \mathrm{e}^x = \\ &= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} + 5x^4 \cdot \mathrm{e}^x + x^5 \cdot \mathrm{e}^x = \\ &= \frac{1}{1 - \sin x} + x^4 \cdot \mathrm{e}^x \cdot (5 + x) \end{aligned}$$

c) $y' = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

d) Funkcia f je zloženou funkciou, kde $y = \sin t$ je vonkajšia zložka a $t = \sqrt{x}$ je vnútorná zložka zloženej funkcie f. Podľa vety 7.4 o derivácii zloženej funkcie dostávame:
$y' = \left(\sin \sqrt{x}\right)' = (\sin t)' \cdot t' = \cos t \cdot (\sqrt{x})' = \cos\left(\sqrt{x}\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

e) Funkcia f je zloženou funkciou, kde $y = \sqrt{t}$ je vonkajšia zložka a $t = (1 + x^5)$ je vnútorná zložka zloženej funkcie f. Podľa vety 7.4 o derivácii zloženej funkcie dostávame:
$y' = \left(\sqrt{1 + x^5}\right)' = (\sqrt{t})' \cdot t' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (1 + x^5)' = \dfrac{5 \cdot x^4}{2\sqrt{1 + x^5}}$

f) Funkcia f je zloženou funkciou. Položme $y = \mathrm{e}^u$, $u = \operatorname{arctg} v$ a $v = x^2$. Vzhľadom na uvedené označenie zložiek funkcie je výhodné použiť značenie pre deriváciu, s ktorým sa často stretávame vo fyzike. Podľa vety 7.4 o derivácii zloženej funkcie dostávame:

$$y'_u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u,\ u'_v = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{1+v^2} \quad \text{a} \quad v'_x = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x$$

$$y' = y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^u \cdot \frac{1}{1+v^2}\cdot 2x = \frac{2x\cdot \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x^2}}{1+x^4}$$

g) $y' = \left(\cos^{13} x + \cos x^{13} + 13\cdot\cos x\right)' = \left(\cos^{13} x\right)' + \left(\cos x^{13}\right)' + (13\cdot\cos x)' =$

$$\begin{aligned}
&= 13\cdot\cos^{12} x\cdot(-\sin x) - \sin x^{13}\cdot(13\cdot x^{12}) - 13\cdot\sin x = \\
&= -13\sin x\cdot\cos^{12} x - 13x^{12}\sin x^{13} - 13\sin x = \\
&= -13\sin x\cdot\left(\cos^{12} x + 1\right) - 13x^{12}\sin x^{13} = \\
&= -13\left(\sin x\cdot\left(\cos^{12} x + 1\right) + x^{12}\sin x^{13}\right)
\end{aligned}$$

$\checkmark$

Príklad 7.3.2 Vypočítajte derivácie daných funkcií:

$$\begin{aligned}
&f_1 : y = x^3 - 2x^2 + \frac{x}{5} + \mathrm{e}^3 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{5x}, \\
&f_2 : y = \sqrt{x} + \sqrt[5]{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}, \\
&f_3 : y = x^2\cdot(3 - 2\cdot\ln x) + \frac{2-3x}{x-1}, \\
&f_4 : y = \ln(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x}), \\
&f_5 : y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).
\end{aligned}$$

Riešenie:
Postupne vypočítame derivácie jednotlivých funkcií.

$$\begin{aligned}
f'_1 : y' &= \left(x^3 - 2x^2 + \frac{x}{5} + \mathrm{e}^3 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{5x}\right)' = \\
&= (x^3)' - 2(x^2)' + \frac{1}{5}\cdot x' + \mathrm{e}^3\cdot(1)' - (x^{-4})' + \frac{2}{5}\cdot(x^{-1})' = \\
&= 3x^2 - 4x + \frac{1}{5} + \mathrm{e}^3\cdot 0 - (-4)x^{-5} + \frac{2}{5}\cdot(-1)x^{-2} = \\
&= 3x^2 - 4x + \frac{1}{5} + \frac{4}{x^5} - \frac{2}{5x^2}
\end{aligned}$$

$$f_2' : y' = \left(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)' =$$

$$= \left(\sqrt{x}\right)' + \left(\sqrt[5]{x}\right)' - \left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)' + \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right)' - \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)' =$$

$$= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' - \left(4x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)' - \left(\mathrm{e}^{-x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} - 4\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' - \mathrm{e}^{-x}\,(-x)' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + 2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \mathrm{e}^{-x}(-1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

$$f_3' : y' = \left(x^2 \cdot (3 - 2 \cdot \ln x) + \frac{2-3x}{x-1}\right)' =$$

$$= \left(x^2 \cdot (3 - 2 \cdot \ln x)\right)' + \left(\frac{2-3x}{x-1}\right)' =$$

$$= (x^2)' \cdot (3 - 2 \cdot \ln x) + x^2 \cdot (3 - 2 \cdot \ln x)' + \frac{(2-3x)'(x-1) - (2-3x)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= 2x \cdot (3 - 2 \cdot \ln x) + x^2 \cdot \left(0 - 2 \cdot \frac{1}{x}\right) + \frac{(-3)(x-1) - (2-3x)(1)}{(x-1)^2} =$$

$$= 4x - 4x \cdot \ln x + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f_4' : y' = \left(\ln(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x})\right)' = \frac{1}{(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x})} \cdot (\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x})' = \frac{1}{(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x})} \cdot (0 - \mathrm{e}^{2x}(2x)') =$$

$$= \frac{-2\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x})}$$

$$f_5' : y' = \left[\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - (1-x^2)}} \cdot \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}(1-x^2)' =$$

$$= \frac{-1}{2|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(0 - 2x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}},$$

kde v čitateli je hodnota $+1$, ak $x \geqq 0$ a -1, ak $x < 0$. $\surd$

Ukážeme, ako derivovať funkciu f, ktorá má tvar f: $y = f(x)^{g(x)}$, kde $f(x) > 0$ pre všetky $x \in \mathcal{D}(f)$. V tomto prípade nemôžeme použiť ani vzorec (3) („funkcia na konštantu“) ani (15) („konštanta na funkciu“). Jednou z možností je využiť navzájom inverzné funkcie $y = \mathrm{e}^x$ a $y = \ln(x)$.

$$y' = \left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}\right) \cdot \left[g(x) \cdot \ln f(x)\right]' =$$

$$= \left(f(x)^{g(x)}\right) \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot (\ln f(x))'\right] =$$

$$= \left(f(x)^{g(x)}\right) \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right].$$

Dostali sme ďalší derivačný vzorec v tvare:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right]. \tag{7.21}$$

Existujú aj ďalšie postupy, ako získať vzorec (7.21) na výpočet derivácie funkcie f: $y = f(x)^{g(x)}$.

Príklad 7.3.3 Vypočítajte deriváciu funkcie:

$$f : y = x^x, \quad x > 0.$$

Riešenie:
Funkciu x^x môžeme upraviť do tvaru:

$$x^x = \mathrm{e}^{\ln(x^x)} = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(x)}.$$

Podľa vety 7.4 o derivácii zloženej funkcie dostaneme:

$$(x^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\cdot\ln(x)}\right)' = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1).$$

$\surd$

Príklad 7.3.4 Vypočítajte deriváciu funkcie f: $y = f(x)$, ak

$$f : y = (\sin x)^{\cos x}.$$

Riešenie:
Funkcia f je zložená a má tvar $(f(x))^{g(x)}$, kde $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$. Použijeme vzťah (7.21). Potrebujeme ešte poznať derivácie funkcií f a g. Platí: $f'(x) = \cos x$ a $g'(x) = -\sin x$.

$$y' = ((\sin x)^{\cos x})' = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

Ďalšou možnosťou, ako vypočítať deriváciu funkcie f je prepísať funkciu f: $y = (\sin x)^{\cos x}$ do tvaru f: $y = \mathrm{e}^{\cos x \cdot \ln(\sin x)}$ a potom derivovať túto funkciu ako zloženú funkciu podľa vety 7.4. Treťou možnosťou ako zderivovať funkciu f je logaritmovať ľavú aj pravú stranu a potom obe strany derivovať. Dostávame: $y = (\sin x)^{\cos x} \Longrightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln(\sin x) \Longrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$. Vynásobením oboch strán výrazom y dostávame hľadanú deriváciu, kde na pravej strane y nahradíme výrazom pre y. $\surd$

Logaritmické derivovanie:
Vo uvedených príkladoch je možné použiť tiež metódu **logaritmického derivovania**, ktorá spočíva v nasledujúcom:
Rovnicu $y = f(x)$, ak $f(x) > 0$, najprv logaritmujeme, následne upravíme a potom derivujeme obe strany rovnice. Ukážeme si to na príklade 7.3.5.

Príklad 7.3.5 Vypočítajte deriváciu funkcie f: $y = f(x)$, ak

$$f : y = (\cos x)^{\sin x}.$$

Riešenie:
Najprv daný vzťah zlogaritmujeme a upravíme, dostaneme rovnosti:

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \ln\left((\cos x)^{\sin x}\right) \\ \ln(f(x)) &= \sin(x) \cdot \ln(\cos x) \\ (\ln(f(x)))' &= [\sin(x) \cdot \ln(\cos x)]' \end{aligned}$$

Teraz danú rovnosť zderivujeme a dostávame:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos(x) \cdot \ln(\cos(x)) + \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)).$$

Vynásobíme rovnosť výrazom $f(x)$ a upravíme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(\cos(x)) - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right) \\ f'(x) &= (\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(\cos(x)) - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right) \end{aligned}$$

$\surd$

Príklad 7.3.6 Zderivujte funkciu f:

$$f : y = x^{\ln x}.$$

Riešenie:
Použijeme vzťah (7.21) zo strany 112.

$$\begin{aligned} f' : y' = \left(x^{\ln x}\right)' &= \left(x^{\ln x}\right) \cdot \left[(\ln x)' \cdot \ln x + \frac{\ln x}{x}(x)'\right] = \\ &= \left(x^{\ln x}\right) \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot \ln x + \frac{\ln x}{x} \cdot 1\right] = \left(x^{\ln x}\right) \cdot \left[\frac{2\ln x}{x}\right]. \end{aligned}$$

$\surd$

Poznámka 7.3.1 Uvedený postup je niekedy výhodné použiť aj pri niektorých zložitejších funkciách, ktoré je možné logaritmovaním previesť na funkcie, ktoré sa derivujú jednoduchšie.

Príklad 7.3.7 Vypočítajte deriváciu funkcie f: $y = f(x)$, ak

$$f : y = \frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 \cdot \mathrm{e}^x}, \quad x > 1.$$

Riešenie:
Pre $x > 1$ platí:

$$\ln(f(x)) = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x\ln(\mathrm{e}).$$

Derivujeme ľavú aj pravú stranu rovnosti a dostávame:

$$\begin{aligned} (\ln(f(x)))' &= \left(2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x\ln(\mathrm{e})\right)' \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 \\ f'(x) &= f(x) \cdot \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right] \\ f'(x) &= \frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 \cdot \mathrm{e}^x} \cdot \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]. \end{aligned}$$

$\surd$

7.4 Derivácie vyšších rádov

Definícia 7.6 Nech je daná funkcia f: $y = f(x)$ s definičným oborom $\mathcal{D}(f)$. Nech funkcia f má v bode $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ deriváciu. Označme deriváciu funkcie f ako funkciu h: $y = f'(x)$ s definičným oborom $\mathcal{D}(h)$. Ak funkcia h má v bode $x_0 \in \mathcal{D}(h)$ deriváciu $h'(x_0)$, tak túto deriváciu nazývame **druhou deriváciou** funkcie f v bode x_0 (resp. **derivácia druhého rádu** funkcie f v bode x_0). Označíme ju $h'(x_0) = f''(x_0)$. Platí:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right]_{x=x_0}. \tag{7.22}$$

Definícia 7.7 Nech je daná funkcia f: $y = f(x)$ s definičným oborom $\mathcal{D}(f)$ a nech funkcia f má v bode $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ deriváciu, t. j. $y' = f'(x_0)$. Nech v bode x_0 existuje derivácia $(n-1)$-vého rádu, t. j. existuje $f^{(n-1)}(x_0)$. Potom v bode x_0 definujeme **deriváciu n-tého rádu** (ak existuje) funkcie f v bode x_0 ako deriváciu $(n-1)$-vej derivácie funkcie f v bode x_0 a píšeme:

$$f^{(n)}(x_0) = \left[\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right]_{x=x_0} = \left[f^{(n-1)}(x_0)\right]'. \tag{7.23}$$

Veta 7.6 (Leibnitzov vzorec) Nech sú dané funkcie f: $y = f(x)$ a g: $y = g(x)$ a aj ich všetky derivácie až do n-tého rádu. Potom pre výpočet n-tej derivácie súčinu dvoch funkcií f a g platí vzťah:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n)} = \binom{n}{0} \cdot f^{(n)} \cdot g^{(0)} + \binom{n}{1} \cdot f^{(n-1)} \cdot g' + \binom{n}{2} \cdot f^{(n-2)} \cdot g'' + \dots \\ \dots + \binom{n}{n-2} \cdot f'' \cdot g^{(n-2)} + \binom{n}{n-1} \cdot f' \cdot g^{(n-1)} + \binom{n}{n} \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n)}.\end{aligned} \tag{7.24}$$

Pozri riešené príklady 7.4.1 na strane 115, 7.4.2, 7.4.3 na strane 116 a 7.4.4 na strane 117.

Príklad 7.4.1 Vypočítajte derivácie všetkých rádov funkcie f:

$$f : y = x^3 - x, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Riešenie:
Postupne derivujeme funkciu f:

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^3 - x\right)' = 3x^2 - 1, \\ y'' &= \left(3x^2 - 1\right)' = 6x, \\ y''' &= (6x)' = 6, \\ y^{(4)} &= (6)' = 0. \end{aligned}$$

Zrejme platí, že $f^{(n)}(x) = 0$ pre všetky $n \geqq 4$. $\surd$

Príklad 7.4.2 Použitím Leibnitzovho vzorca vypočítajte piatu deriváciu funkcie

$$f : y = \mathrm{e}^x \cdot \cos x.$$

Riešenie:
Funkciu f môžeme napísať v tvare f: $y = g(x) \cdot h(x)$, kde $g(x) = \mathrm{e}^x$ a $h(x) = \cos x$. Vypočítame všetky derivácie funkcií g a h až do rádu 5.
$g'(x) = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
$g''(x) = (\mathrm{e}^x)'' = \mathrm{e}^x$,
$g'''(x) = (\mathrm{e}^x)''' = \mathrm{e}^x$, $g^{(4)}(x) = (\mathrm{e}^x)^{(4)} = \mathrm{e}^x$ a
$g^{(5)}(x) = (\mathrm{e}^x)^{(5)} = \mathrm{e}^x$.

Podobne získame derivácie aj pre funkciu h.
$h'(x) = (\cos x)' = -\sin x$,
$h''(x) = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$,
$h'''(x) = (\cos x)''' = (-\cos x)' = \sin x$,
$h^{(4)}(x) = (\cos x)^{(4)} = (\sin x)' = \cos x$,
$h^{(5)}(x) = (\cos x)^{(5)} = (\cos x)' = -\sin x$.

$$\begin{aligned}
f^{(5)}(x) &= [g(x) \cdot h(x)]^{(5)} = \\
&= \binom{5}{0} \cdot g^{(5)} \cdot h^{(0)} + \binom{5}{1} \cdot g^{(4)} \cdot h' + \binom{5}{2} \cdot g^{(3)} \cdot h'' + \binom{5}{3} \cdot g'' \cdot h''' + \binom{5}{4} \cdot g' \cdot h^{(4)} + \\
&+ \binom{5}{5} \cdot g^{(0)} \cdot h^{(5)} = \\
&= \mathrm{e}^x \cdot \cos x - 5 \cdot \mathrm{e}^x \sin x - 10 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \cos x + 10 \cdot \mathrm{e}^x \sin x + 5 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \cos x - \mathrm{e}^x \cdot \sin x = \\
&= \mathrm{e}^x \cdot (4 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x).
\end{aligned}$$

Piata derivácia funkcie f má tvar: $y^{(5)} = \mathrm{e}^x \cdot (4 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x)$. $\surd$

Príklad 7.4.3 Vypočítajte tretiu deriváciu funkcie

$$f : y = (1 + x)^6.$$

Riešenie:
Postupne derivujeme funkciu f:

$$\begin{aligned}
y' &= \left((1+x)^6\right)' = 6(1+x)^5, \\
y'' &= \left(6(1+x)^5\right)' = 30(1+x)^4, \\
y''' &= \left(30(1+x)^4\right)' = 120(1+x)^3.
\end{aligned}$$

Tretia derivácia funkcie f má tvar:

$$y''' = 120(1 + x)^3.$$

$\surd$

Príklad 7.4.4 Napíšte vzťah pre výpočet derivácie n-tého rádu funkcie f:

$$f : y = \cos x.$$

Riešenie:
Postupne vypočítame derivácie funkcie f:

$$\begin{aligned}
y &= (\cos x)^{(0)} = \cos x = \cos\left(x + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\
y' &= (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\
y'' &= (-\sin x)' = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\
y''' &= (-\cos x)' = \sin x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\
y^{(4)} &= (\sin x)' = \cos x = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + 2\pi).
\end{aligned}$$

Vidíme, že výsledok pre výpočet 4. derivácie je totožný s pôvodnou funkciou f a pri ďalšom derivovaní by sa teda cyklus opakoval. Ďalej si všimnime zákonitosti vo vyjadrení jednotlivých derivácií pomocou hodnôt funkcie kosínus. Je možné to zovšeobecniť. Platí:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analogicky pre n-tú deriváciu funkcie f: $y = \sin x$ máme vzťah:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\surd$

7.5 Neriešené úlohy

7.1 Vysvetlite pojmy: derivácia funkcie f v bode x_0, nevlastná derivácia funkcie f v bode x_0, derivácia funkcie f sprava (zľava) v bode x_0.

7.2 Aký je geometrický význam derivácie funkcie f v bode x_0?

7.3 Podľa definície určte prvú deriváciu funkcie f v bode x_0, ak je daná funkcia:

a) $f : y = \dfrac{8}{4+x^2}$ v bode $x_0 = 2$,

b) $f : y = \sqrt{1+x^2}$ v bode $x_0 = \sqrt{3}$.

7.4 Vypočítajte prvú deriváciu funkcie f v bode x_0 ($f'(x_0)$), ak je dané:

a) $f : y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$, kde $x_0 = 3$,

b) $f : y = x \cdot \mathrm{e}^{1-x}$, kde $x_0 = 1$.

7.5 Vypočítajte prvú deriváciu daných funkcií:

a) $f : y = 3x^5 - \dfrac{x^4}{2} + 7x - 6 + 2x^3 \cdot \ln 2 - \cos 1$,

b) $f : y = \dfrac{5}{2x^3} - \dfrac{\sqrt{3}}{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{8x}} - 4\sqrt{x}$,

c) $f : y = \left(1 - \sqrt{x}\right) \cdot (1+x)$,

d) $f : y = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}}$,

e) $f : y = \dfrac{x^5}{5} \cdot \left(\ln x - \dfrac{1}{5}\right) - \dfrac{(x-2)^2}{x}$,

f) $f : y = \mathrm{e}^x \cdot \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)$,

g) $f : y = \dfrac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}$,

h) $f : y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1+x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x$,

i) $f : y = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$,

j) $f : y = \mathrm{e}^x \cdot x^3 \cdot \cos x$,

k) $f: y = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$,

l) $f: y = (2x^3 - 4)^5$,

m) $f: y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$,

n) $f: y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2} \cdot x}{1+x^2}\right)$.

7.6 Vypočítajte druhú deriváciu daných funkcií:

a) $f: y = 4x^3 - x^4$,

b) $f: y = \dfrac{x^2 - 2\ln(x-1)}{2}$,

c) $f: y = 2x + \ln(\cos x)$,

d) $f: y = \dfrac{x^2}{x-1}$,

e) $f: y = \dfrac{7+x^2}{3+x^2}$,

f) $f: y = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$,

g) $f: y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$,

h) $f: y = x + \operatorname{arctg} x$.

7.7 Napíšte funkčný predpis prvej derivácie funkcie f, ak je daná predpisom:

a) $f: y = \dfrac{x^3}{(1-x^2)^2}$,

b) $f: y = \sqrt{1-x^2}$,

c) $f: y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, kde $a \in \mathbb{R}$ (a – konštanta),

d) $f: y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$,

e) $f: y = x \cdot 10^x$,

f) $f: y = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$,

g) $f : y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$,

h) $f : y = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$,

i) $f : y = \mathrm{e}^{\arcsin(2x)}$,

j) $f : y = \operatorname{arctg}\left(x^2\right)$,

k) $f : y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$,

l) $f : y = \sin\sqrt{1+x^2}$,

m) $f : y = 3\cdot\sin(3x+5)$,

n) $f : y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

7.8 Derivujte funkciu f a výsledok $f'(x)$ uveďte v najjednoduchšej upravenej podobe, ak funkcia f je daná predpisom:

a) $f : y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\cdot x + 2\sqrt{x}\dfrac{1}{x}$,

b) $f : y = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$,

c) $f : y = \dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$,

d) $f : y = \dfrac{(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg}x - x}{2}$,

e) $f : y = \mathrm{e}^x\cdot\arcsin x$,

f) $f : y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$,

g) $f : y = \operatorname{tg}x - \dfrac{1}{3}\cdot\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}^5 x$,

h) $f : y = \sqrt{1+\arcsin x}$,

i) $f : y = \sqrt[3]{2\mathrm{e}^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$,

j) $f : y = \sin 3x + \cos\dfrac{x}{5} + \operatorname{tg}\sqrt{x}$,

k) $f : y = \sin^3 x + \cos\left(x^3\right) - \sqrt{\operatorname{cotg}x}$,

l) $f : y = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{6} \cdot \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$,

m) $f : y = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$,

n) $f : y = \frac{2x^2}{(2-x)^2}$.

7.9 Určte y' a deriváciu zjednodušte, ak funkcia f je daná predpisom:

a) $f : y = -\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+1}$,

b) $f : y = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}\right)$,

c) $f : y = \sqrt{\ln(x^2)}$,

d) $f : y = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$,

e) $f : y = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot \cos x$,

f) $f : y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$,

g) $f : y = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$,

h) $f : y = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$,

i) $f : y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$,

j) $f : y = x^{\ln x}$,

k) $f : y = \frac{a-x}{a+x}$, kde $a \in \mathbb{R}$ (a – konštanta),

l) $f : y = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$,

m) $f : y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}$,

n) $f : y = \ln(\sin x)$,

o) $f : y = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$,

p) $f : y = \ln{(ax + b)}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ $(a, b$ – konštanty),

r) $f : y = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$.

7.10 Určte prvú deriváciu y' funkcie f bez následných zjednodušovaní výrazov, ak je daná funkcia f:

a) $f : y = \operatorname{tg}\left(x^3\right)$,

b) $f : y = \sqrt{\ln\left(\sin\left(\frac{x+3}{4}\right)\right)}$,

c) $f : y = \arccos\frac{2}{x}$,

d) $f : y = \sin\left(x^4\right)$,

e) $f : y = \sin^4 x$,

f) $f : y = \sin{(\sin{(\sin x)})}$,

g) $f : y = \sin^3\left(\cos^2{(\operatorname{tg} x)}\right)$,

h) $f : y = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$,

i) $f : y = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}\right)$,

j) $f : y = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\left(x^2\right)}$,

k) $f : y = x \cdot \mathrm{e}^{x^2}$,

l) $f : y = \operatorname{cotg}\sqrt[5]{x + 1}$,

m) $f : y = \arcsin{(\sin x)}$,

n) $f : y = \cos{(11 - 7x)}$,

o) $f : y = \sin{(21x)}$,

p) $f : y = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}(2x)}$,

r) $f : y = \sin^2{(2x)}$,

s) $f : y = x^3 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

t) $f : y = \operatorname{tg}^3 x$,

u) $f : y = \sin\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

7.11 Vypočítajte prvú deriváciu $f'(x)$ funkcie f logaritmickým derivovaním, ak je daná funkcia funkčným predpisom:

a) $f : y = x^{\sin x}$,

b) $f : y = (\sin x)^{\cos x}$,

c) $f : y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$,

d) $f : y = 2^{\frac{1}{x^2}}$,

e) $f : y = x^{\ln x}$,

f) $f : y = (\ln x)^{x}$,

g) $f : y = x^{\cos x}$,

h) $f : y = (1-x)^{\ln x}$,

i) $f : y = x^{\frac{1}{x}}$,

j) $f : y = \sqrt{x^{\sin x}}$.

7.12 Podľa definície určte prvú deriváciu funkcie f v bode x_0, ak je daná funkcia:

a) $f : y = \dfrac{8}{4+x^2}$ v bode $x_0 = 2$,

b) $f : y = \sqrt{1+x^2}$ v bode $x_0 = \sqrt{3}$.

7.13 Určte hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

a) $f'(x_0) = 0$,

b) $f'(x_0) = -2$,

pričom funkcia je daná predpisom f: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

7.6 Výsledky neriešených úloh

7.4 **a)** $\frac{7}{64}$ **b)** 0

7.5 **a)** $y' = 15x^4 - 2x^3 + 6x^2 \cdot \ln 2 + 7$ **b)** $y' = -\frac{15}{2x^4} + \frac{\sqrt{3}}{x^2} - \frac{1}{6x\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ **c)** $y' = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **d)** $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$ **e)** $y' = x^4 \cdot \ln x - 1 + \frac{4}{x^2}$ **f)** $y' = x^3 \cdot \mathrm{e}^x$ **g)** $y' = \sin^2 x$ **h)** $y' = -x \cdot \operatorname{arctg} x$ **i)** $y' = \frac{-2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ **j)** $y' = x^2 \cdot \mathrm{e}^x \cdot (x \cdot \cos x + 3\cos x - x\sin x)$ **k)** $y' = \frac{4}{4-x^2}$ **l)** $y' = 30x^2(2x^3-4)^4$ **m)** $y' = \frac{2}{1+x^2}$ **n)** $y' = \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$

7.6 **a)** $y'' = 12x \cdot (2-x)$ **b)** $y'' = \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2}$ **c)** $y'' = \frac{-1}{(\cos x)^2}$ **d)** $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ **e)** $y'' = 24 \cdot \frac{x^2-1}{(3+x^2)^3}$ **f)** $y'' = 4 \cdot \frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}$ **g)** $y'' = (2-4x+x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$ **h)** $y'' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

7.7 **a)** $y' = \frac{(3+x)^2 \cdot x^2}{(1-x)^3}$ **b)** $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ **c)** $y' = \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ **d)** $y' = \frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ **e)** $y' = 10^x \cdot (1 + x \cdot \ln 10)$ **f)** $y' = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$ **g)** $y' = \frac{2}{x \cdot (1+\ln x)^2}$ **h)** $y' = \frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$ **i)** $y' = \frac{2 \cdot \mathrm{e}^{\arcsin(2x)}}{\sqrt{1-4x^2}}$ **j)** $y' = \frac{2x}{1+x^4}$ **k)** $y' = \frac{1}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}$ **l)** $y' = \frac{x \cdot \cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ **m)** $y' = 9 \cdot \cos(3x+5)$ **n)** $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

7.8 **a)** $y' = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **b)** $y' = -\frac{2x^2+14x+5}{(x^2-5x+5)^{-2}}$ **c)** $y' = \frac{2}{\sin(2x)-1}$ **d)** $y' = x \cdot \operatorname{arctg} x$ **e)** $y' = \mathrm{e}^x \cdot \arcsin x - \mathrm{e}^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **f)** $y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ **g)** $y' = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$ **h)** $y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(1+\arcsin x)\cdot(1-x^2)}}$ **i)** $y' = \frac{(2\mathrm{e}^x - 2^x \cdot \ln 2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(2\mathrm{e}^x - 2^x + 1)^2}} + \frac{5 \cdot (\ln x)^4}{x}$ **j)** $y' = 3 \cdot \cos 3x - \frac{1}{5} \cdot \sin\frac{x}{5} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\cos\sqrt{x})^2}$ **k)** $y' = 3 \cdot (\sin x)^2 \cdot \cos x - 3 \cdot x^2 \cdot \sin x^3 + \frac{1}{2 \cdot (\sin x)^2 \cdot \sqrt{\operatorname{cotg} x}}$ **l)** $y' = \frac{x^2}{(2+x^2)\cdot(x^2-1)}$ **m)** $y' = \frac{1}{2 \cdot \cos x}$ **n)** $y' = \frac{8x}{(2-x)^3}$

7.9 **a)** $y' = -\frac{2}{x \cdot (1+\ln x)^2}$ **b)** $y' = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ **c)** $y' = \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x^2}}$ **d)** $y' = \frac{2}{1+x^2}$ **e)** $y' = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x)$ **f)** $y' = -\frac{1}{2}$ **g)** $y' = \frac{4x}{1-x^4}$ **h)** $y' = \frac{2}{1+x^2}$ **i)** $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **j)** $y' = 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$ **k)** $y' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$ **l)** $y' = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$ **m)** $y' = \frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$ **n)** $y' = \operatorname{cotg} x$ **o)** $y' = \frac{1}{\sin x}$ **p)** $y' = \frac{a}{(ax+b)}$ **r)** $y' = \frac{2 \cdot (1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

7.11 **a)** $y' = x^{\sin x} \cdot \left[\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin x}{x}\right]$ **b)** $y' = \sin x^{\cos x} \cdot \left[\frac{(\cos x)^2}{\sin x} - \sin x \cdot \ln(\sin x)\right]$ **c)** $y' = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$ **d)** $y' = \frac{-2 \cdot 2^{\frac{1}{x^2}} \cdot \ln 2}{x^3}$ **e)** $y' = 2x^{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x}$ **f)** $y' = (\ln x)^x \cdot \left[\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right]$ **g)** $y' = x^{\cos x} \cdot \left[-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right]$ **h)** $y' = (1-x)^{\ln x} \cdot \left[\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}\right]$ **i)** $y' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right]$ **j)** $y' = \sqrt{x^{\sin x}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{2x}\right]$

7.12 **a)** $y = -\frac{1}{2}$ **b)** $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7.13 **a)** $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$ **b)** $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$

Kapitola 8

Vlastnosti derivácie funkcie

8.1 Dotyčnica a normála

Veta 8.1 Nech je daná funkcia f: $y = f(x)$ a bod $T = [x_0, y_0]$, kde $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, $y_0 \in \mathcal{H}(f)$ a $y_0 = f(x_0)$. Ak existuje derivácia funkcie f v bode x_0 ($f'(x_0)$), tak dotyčnica t ku grafu funkcie f v bode T má rovnicu:

$$t: \quad y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \tag{8.1}$$

Veta 8.2 Nech je daná funkcia f: $y = f(x)$ a bod $T = [x_0, y_0]$, kde $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, $y_0 \in \mathcal{H}(f)$ a $y_0 = f(x_0)$. Ak existuje derivácia funkcie f v bode x_0 ($f'(x_0)$) a $f'(x_0) \neq 0$, tak normála n ku grafu funkcie f v bode T má rovnicu:

$$n: \quad y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \tag{8.2}$$

Príklad 8.1.1 Napíšte rovnicu dotyčnice t ku grafu funkcie f: $y = x^3$ v bode $T = [1, ?]$.

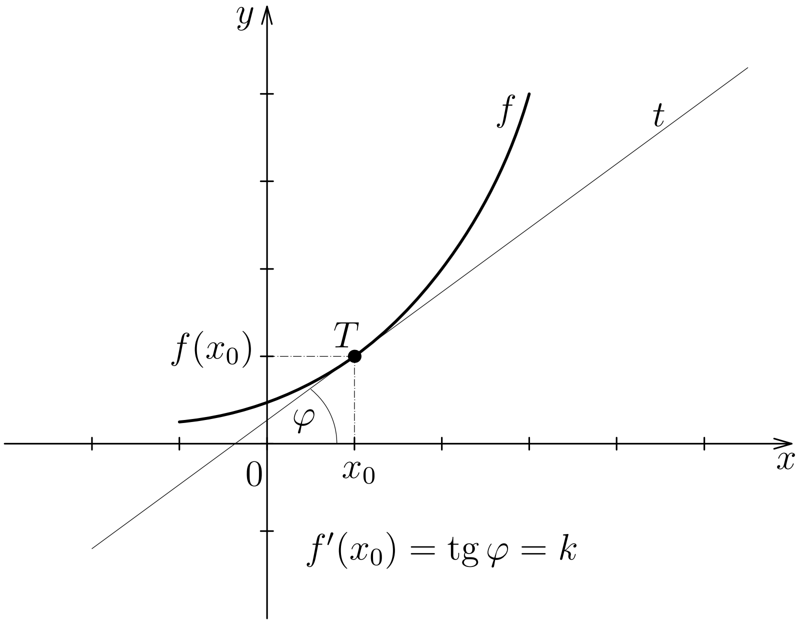
Riešenie:
Určíme druhú súradnicu bodu T. Platí $y_0 = 1^3 = 1$. Dostávame dotykový bod $T = [1, 1]$. Platí t: $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (3x_0^2 + 3x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2) =$$

$$= 3x_0^2 = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Vieme, že t: $y = kx+q$ a súčasne bod $T \in t$. Preto platí, že $y = 3x+q$ a súčasne $1 = 3 \cdot 1 + q$. Odtiaľ dostávame, že $q = -2$. Priamka t: $y = 3x - 2$ je dotyčnicou ku grafu f: $y = x^3$ v bode $T = [1, 1]$. $\checkmark$



Obr. 8.1: Smernica dotyčnice ku grafu funkcie.

8.2 Diferenciál funkcie

Definícia 8.1 Nech je daná funkcia $f\colon y = f(x)$ s definičným oborom $\mathcal{D}(f)$ a nech funkcia f má v bode $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ deriváciu, t. j. $y' = f'(x_0)$. Výraz:

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \varDelta x \tag{8.3}$$

nazývame **diferenciál** funkcie f v bode x_0 pre prírastok argumentu $\varDelta x = x - x_0$.

Diferenciál funkcie f tiež zvykneme zapisovať v tvare $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Vieme, že

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Potom pre nejaké x blízke x_0 dostávame vzťah:

$$f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longrightarrow f(x) \doteq f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0).$$

Pomocou tohto vzťahu je možné vypočítať približnú hodnotu funkcie f v bode blízkom bodu x_0. Pre ľubovoľný bod x píšeme diferenciál ako $\mathrm{d}f(x)$ resp. $\mathrm{d}y$. Namiesto prírastku $\varDelta x$ zvykneme písať iba $\mathrm{d}x$, lebo pre funkciu $f\colon y = x$ dostávame diferenciál $\mathrm{d}f(x) = 1 \cdot \varDelta x = \mathrm{d}x$. Odtiaľ dostávame, že $\mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \mathrm{d}x \Longrightarrow f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.