

KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A INFORMATIKY

STROJNÍCKA FAKULTA TU KOŠICE



PREHĽAD
ZÁKLADNÝCH VZORCOV A VZŤAHOV
ZO STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

Pomôcka pre prípravný kurz

2022

ZÁKLADNÉ ALGEBRAICKÉ VZORCE

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | 4) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ |
| 2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | 5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ |
| 3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ | 6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ |

OPERÁCIE S MOCNINAMI

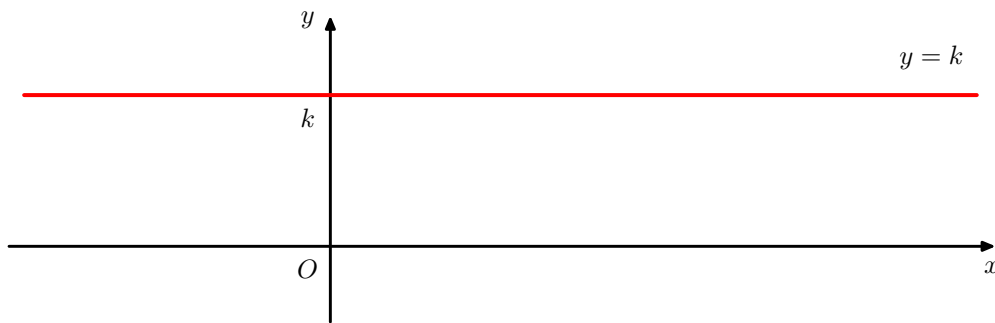
- | | |
|------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | 5) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ |
| 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ | 6) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ |
| 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | 7) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ |
| 4) $a^0 = 1$ | 8) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ |

ELEMENTÁRNE FUNKCIE

Konštantná funkcia – $f : y = k, k \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \{k\}$.

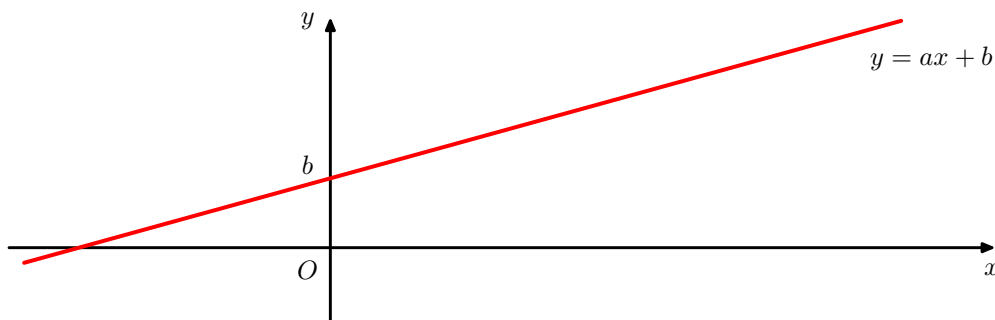
Grafom je priamka rovnobežná s osou x .



Lineárna funkcia – $f : y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.

Grafom je priamka so smernicou a , ktorá na osi y vytína úsek b .



Kvadratická funkcia – $f : y = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Grafom je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y .

1) $a > 0$:

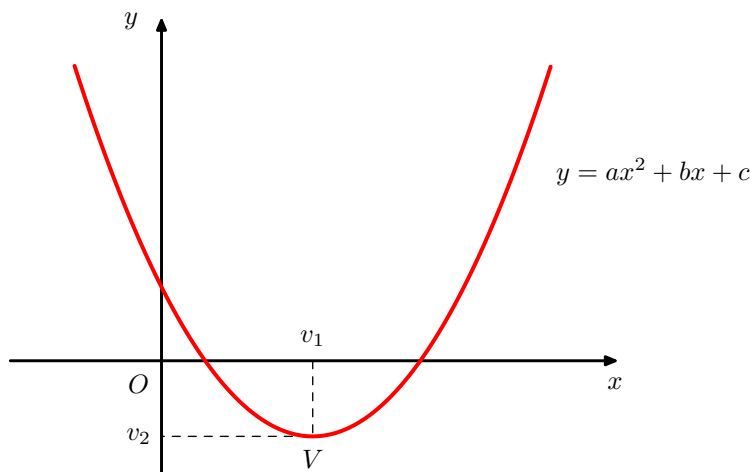
$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \langle v_2; \infty \rangle,$$

párna pre $b = 0$,

ohraničená zdola,

rastúca, prostá pre $x \in \langle v_1; \infty \rangle$,

klesajúca, prostá pre $x \in (-\infty; v_1)$.



2) $a < 0$:

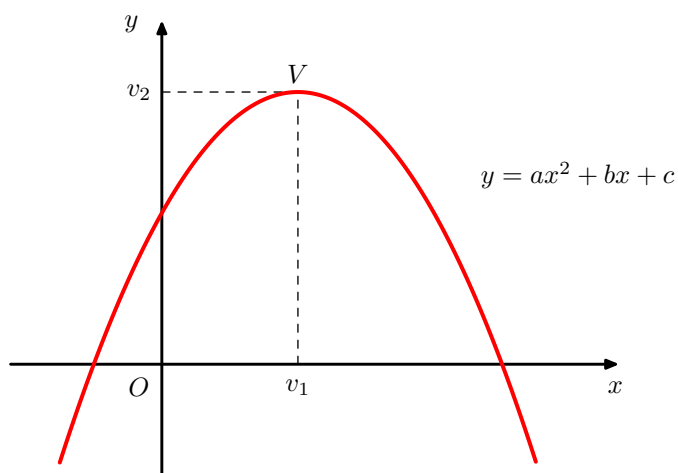
$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (-\infty; v_2),$$

párna pre $b = 0$,

ohraničená zhora,

rastúca, prostá pre $x \in (-\infty; v_1)$,

klesajúca, prostá pre $x \in \langle v_1; \infty \rangle$.

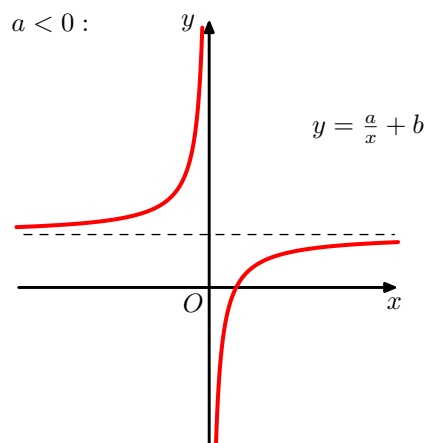
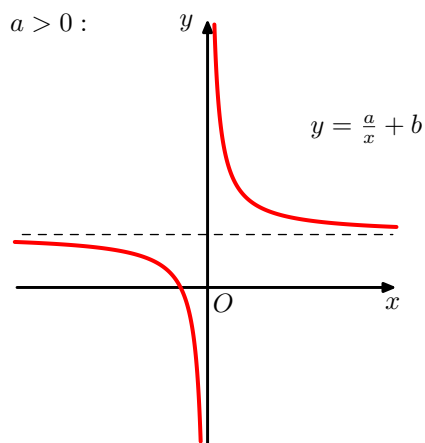


Nech x_1 a x_2 sú korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Potom kvadratickú funkciu $y = ax^2 + bx + c$ môžeme vyjadriť v tvare $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Hyperbolická funkcia – $f : y = \frac{a}{x} + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

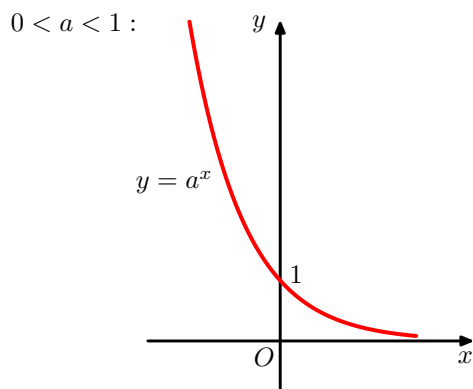
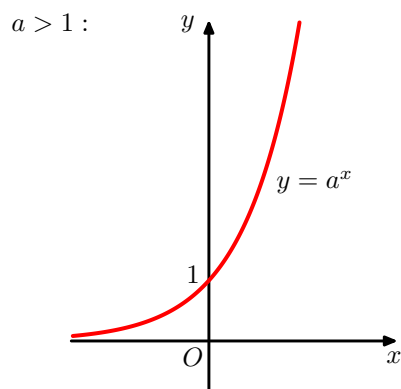
$\mathcal{D}(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty), \mathcal{H}(f) = (-\infty; b) \cup (b; \infty)$.

Grafom je rovnoosová hyperbola.



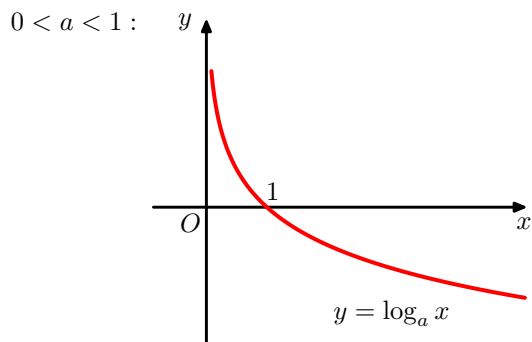
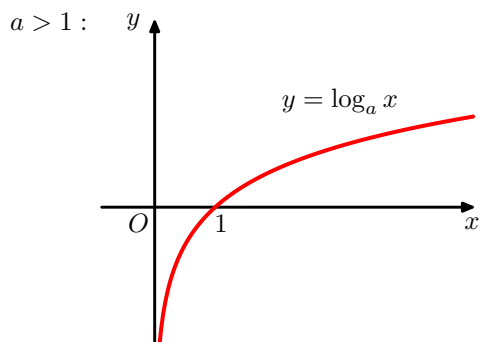
Exponenciálna funkcia – $f : y = a^x, a > 0, a \neq 1$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0; \infty)$.



Logaritmická funkcia – $f : y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

$\mathcal{D}(f) = (0; \infty), \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.



$\log x = \log_{10} x$ sa nazýva dekadickým logaritmom,

$\ln x = \log_e x$ sa nazýva prirodzeným logaritmom, (kde $e = 2.718\dots$ je Eulerovo číslo).

Vlastnosti logaritmov:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a x = \frac{\log_y x}{\log_y a}$$

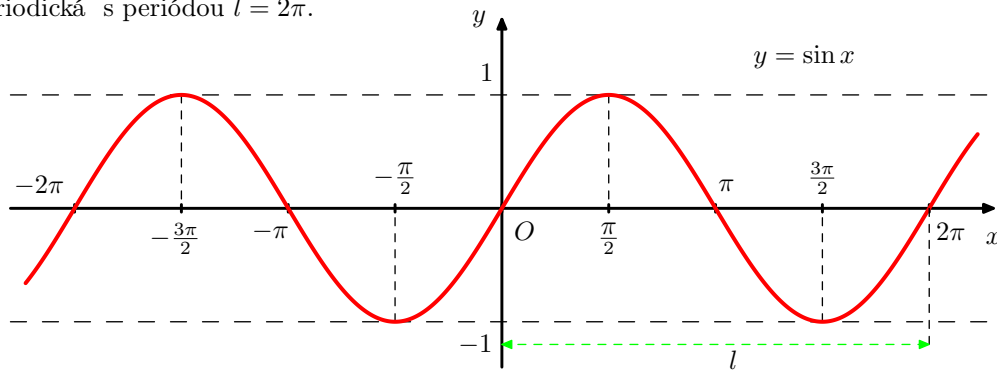
Goniometrické funkcie

$$f: y = \sin x \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}(f) = \langle -1; 1 \rangle,$$

nepárna, preto $\sin(-x) = -\sin x$,

ohraničená,

periodická s periódou $l = 2\pi$.

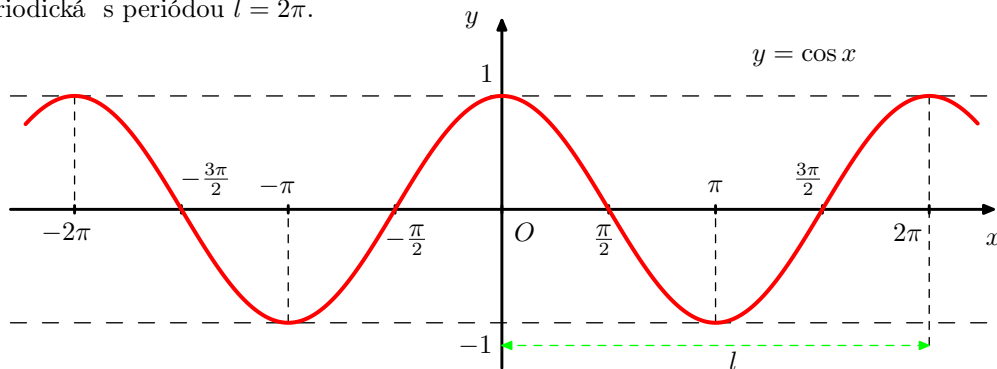


$$f: y = \cos x \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}(f) = \langle -1; 1 \rangle,$$

párna, preto $\cos(-x) = \cos x$,

ohraničená,

periodická s periódou $l = 2\pi$.



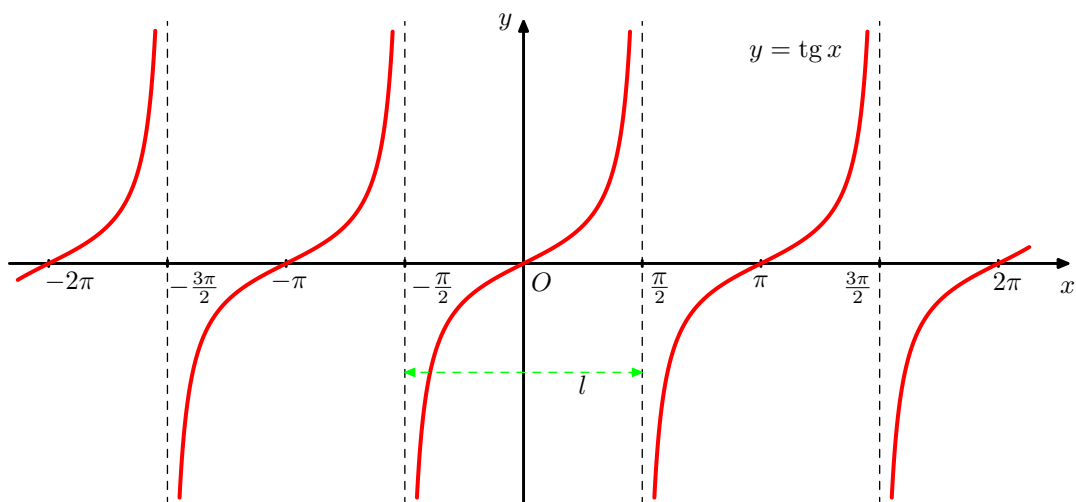
$$f: y = \operatorname{tg} x \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad \mathcal{H}(f) = \mathbb{R},$$

nepárna, preto $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,

rastúca na každom intervale $I \subset \mathcal{D}(f)$,

neohraničená,

periodická s periódou $l = \pi$.



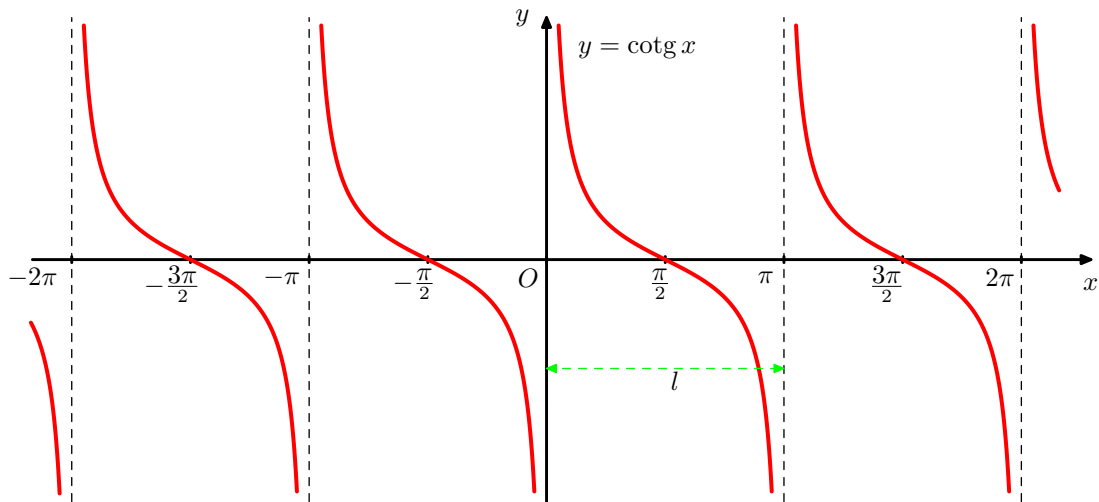
$$f: y = \cotg x \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi; (k+1)\pi), \quad \mathcal{H}(f) = \mathbb{R},$$

nepárna, preto $\cotg(-x) = -\cotg x$,

klesajúca na každom intervale $I \subset \mathcal{D}(f)$,

neohraničená,

periodická s periódou $l = \pi$.



ZNAMENKA GONIOMETRICKÝCH FUNKCIÍ

kvadrant	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
I.	+	+	+	+
II.	+	-	-	-
III.	-	-	+	+
IV.	-	+	-	-

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\sin(90^\circ + x) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ + x) = -\sin x$$

TABUĽKA ZÁKLADNÝCH HODNÔT GONIOMETRICKÝCH FUNKCIÍ

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*
$\operatorname{cotg} x$	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57^\circ 17' 45''$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \doteq 0,0175$$

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$

3) $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

4) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

5) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

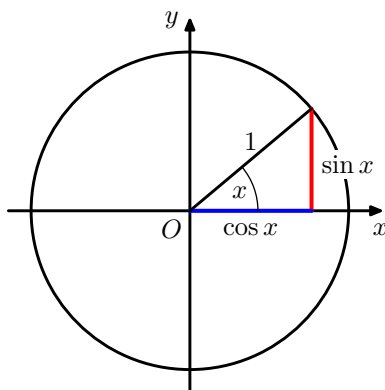
6) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

7) $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

8) $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

9) $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

Jednotková kružnica:



KVADRATICKÉ ROVNICE

Rovnica $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ sa nazýva kvadratickou rovnicou vo všeobecnom tvare. Korene x_1, x_2 kvadratickej rovnice vypočítame zo vzťahu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

kde $D = b^2 - 4ac$ sa nazýva diskriminant kvadratickej rovnice.

Ak $D > 0$, tak kvadratická rovnica má dva rôzne reálne korene.

Ak $D = 0$, tak kvadratická rovnica má jeden reálny dvojnásobný koreň

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Ak $D < 0$, tak kvadratická rovnica má dva komplexne združené korene

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{|D|}}{2a},$$

kde i je imaginárna jednotka.

Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice, tak tzv. rozklad na súčin koreňových činiteľov má tvar

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ak $a = 1, b = p, c = q$, dostaneme normovanú kvadratickú rovnicu

$$x^2 + px + q = 0,$$

pričom pre jej korene x_1, x_2 platí

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

ABSOLÚTNA HODNOTA

Absolútna hodnota reálneho čísla a je definovaná takto

1. ak $a \geq 0$, tak $|a| = a$,
2. ak $a < 0$, tak $|a| = -a$.

Vlastnosti absolútnej hodnoty

- a) $|a| \geq 0$,
- b) $|-a| = |a|$,
- c) $|ab| = |a| \cdot |b|$,
- d) $\sqrt{a^2} = |a|$,
- e) $|a| = k \Leftrightarrow a = k \vee a = -k$,
- f) $|a| < k \Leftrightarrow -k < a < k \Leftrightarrow a \in (-k; k)$,
- g) $|a| > k \Leftrightarrow a < -k \vee a > k \Leftrightarrow a \in (-\infty; -k) \cup (k; \infty)$.

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

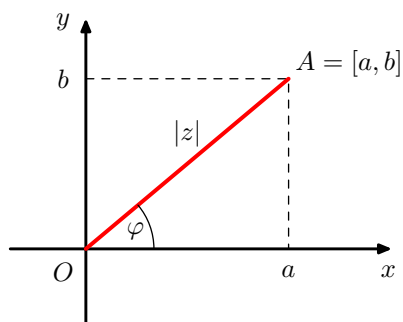
Každé komplexné číslo sa dá zapísať v tvare $z = a + bi$, kde a je reálna časť, b je imaginárna časť komplexného čísla, i je imaginárna jednotka, pre ktorú platí $i^2 = -1$.

Nech $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ sú komplexné čísla. Potom

- a) súčet $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$,
- b) rozdiel $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$,
- c) súčin $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$,
- d) podiel $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$, $c + di \neq 0$.

Číslo $c - di$ je komplexne združené číslo k číslu z_2 .

Znázornenie komplexného čísla $z = a + bi$ vektorom \overline{OA}



Absolútna hodnota komplexného čísla je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \sin \varphi$$

Po dosadení do algebraického tvaru komplexného čísla $z = a + bi$ dostaneme goniometrický tvar

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

Platí Eulerov vzťah

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi.$$

Teda komplexné číslo môžeme zapísať v tvare

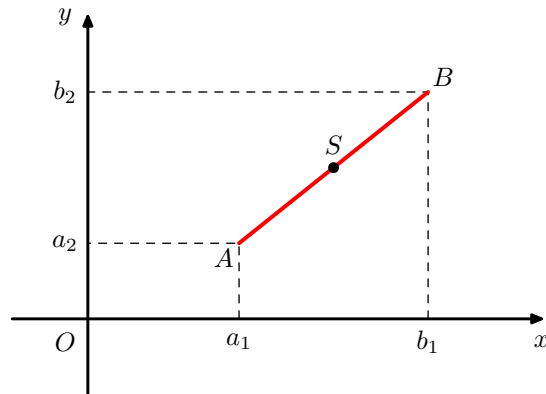
$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Nech sú dané dva body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Potom ich **vzdialenosť** je

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

a **stred úsečky** AB je

$$S = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right].$$

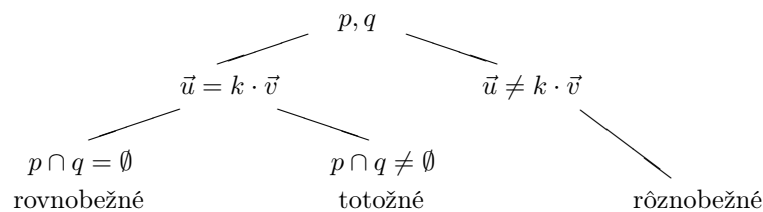


Rovnice priamky:

1. **parametrické** rovnice –
priamka je určená bodom $A = [a_1, a_2]$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2)$
 $x = a_1 + t \cdot u_1$,
 $y = a_2 + t \cdot u_2$, $t \in \mathbb{R}$,
2. **všeobecný tvar** rovnice –
 $ax + by + c = 0$,
 kde $\vec{n} = (a, b)$ je normálový vektor priamky, platí $\vec{n} \perp \vec{u}$,
3. **smernicový tvar** rovnice –
 $y = kx + q$,
 kde $k = \text{tg } \alpha$ je smernicou priamky, q je úsek, ktorý vytína priamka na osi y .

Vzájomná poloha dvoch priamok:

Priamka p je určená bodom A a smerovým vektorom \vec{u} , priamka q je určená bodom B a smerovým vektorom \vec{v} . Ich vzájomnú polohu určíme podľa schémy, kde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$:



Uhol dvoch priamok:

$$\cos \alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|},$$

kde $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Vzdialenosť bodu $M = [x_0, y_0]$ od priamky $ax + by + c = 0$:

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

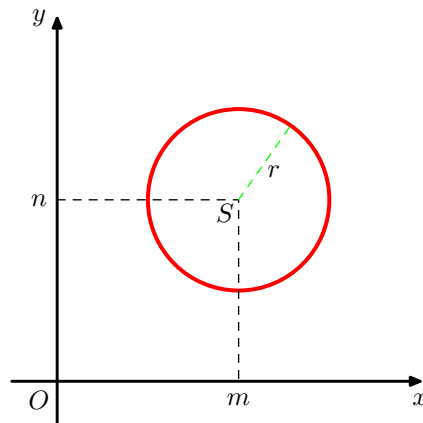
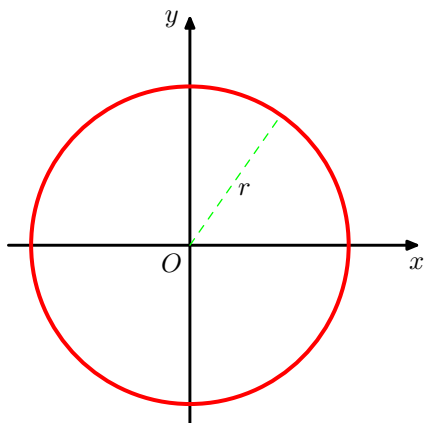
Kružnica

Stredový tvar rovnice kružnice $k(S; r)$, kde $P = [x, y]$ je jej ľubovoľný bod, $S = [0, 0]$ je stred, $r = |SP|$ je polomer kružnice, je

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ak $S = [m, n]$ je stred, tak rovnica kružnice je

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$


Elipsa

Stredový tvar rovnice elipsy, kde $P = [x, y]$ je jej ľubovoľný bod, je

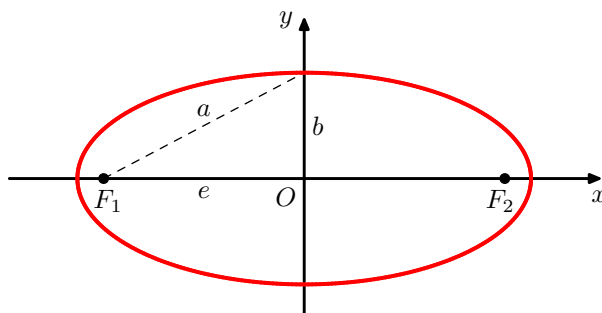
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad S = [0, 0], \quad a^2 > b^2,$$

alebo

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1, \quad S = [m, n], \quad a^2 > b^2.$$

$e = \sqrt{a^2 - b^2}$ – lineárna excentricita elipsy.

$F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0]$ – ohniská elipsy.


Hyperbola

Stredový tvar rovnice hyperboly, kde $P = [x, y]$ je jej ľubovoľný bod, je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad S = [0, 0],$$

alebo

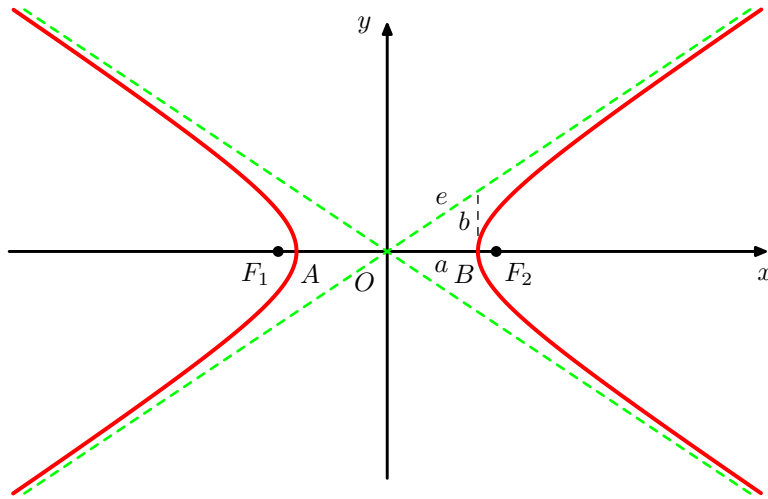
$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1, \quad S = [m, n].$$

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ – lineárna excentricita hyperboly.

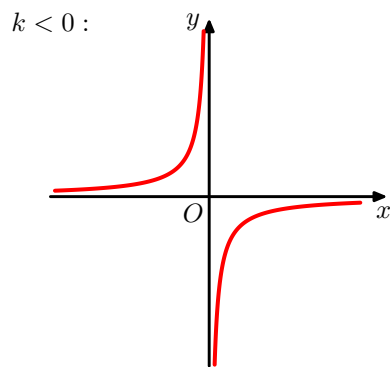
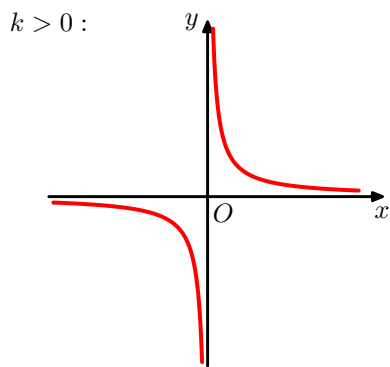
$F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0]$ – ohniská hyperboly.

A, B – vrcholy hyperboly.

Asymptoty hyperboly majú rovnice: $y = \frac{b}{a} \cdot x, \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x.$



Rovnoosová hyperbola $y = \frac{k}{x}$



Parabola

Vrcholový tvar rovnice paraboly, kde $P = [x, y]$ je jej ľubovoľný bod, je

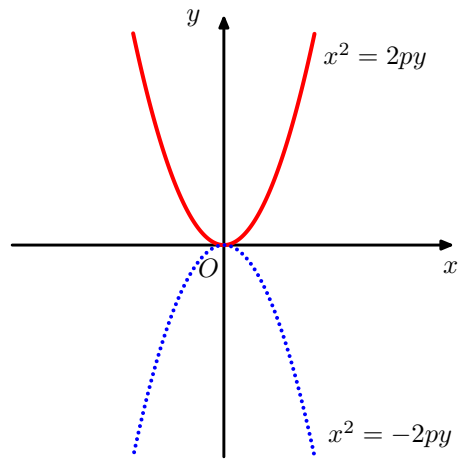
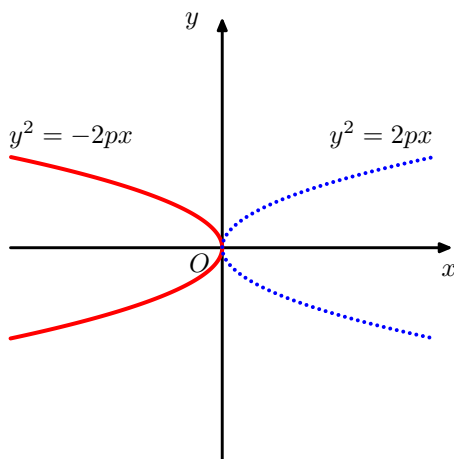
$$y^2 = \pm 2px,$$

$$x^2 = \pm 2py,$$

$$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m),$$

$$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n),$$

kde $p > 0$, $V = [0, 0]$, $o = x$,
kde $p > 0$, $V = [0, 0]$, $o = y$,
kde $p > 0$, $V = [m, n]$, $o \parallel x$,
kde $p > 0$, $V = [m, n]$, $o \parallel y$.



Derivačné vzorce:

1) $[c]' = 0$, kde c je konštanta

2) $[x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

3) $[e^x]' = e^x$

4) $[a^x]' = a^x \ln a$

5) $[\ln x]' = \frac{1}{x}$

6) $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$

7) $[\sin x]' = \cos x$

8) $[\cos x]' = -\sin x$

9) $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10) $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11) $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$

14) $[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{-1}{1+x^2}$

Pravidlá:

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Integračné vzorce:

1) $\int 1 dx = x + c$

2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ pre $\alpha \neq -1$

3) $\int e^x dx = e^x + c$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ pre $a > 0, a \neq 1$

5) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

6) $\int \cos x dx = \sin x + c$

7) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$

9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c, \\ -\arccos \frac{x}{a} + c \end{cases}$

11) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$

12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c \end{cases}$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + c$

Pravidlá:

$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$, kde $c \neq 0$

$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$

$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$