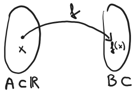
DOBRÉ RÁNO ☺

FUNKCIA (REÁLNEJ PREMENNEJ)

$f : A \rightarrow B$



$f : y = f(x)$

$D(f) = A$

POZN: x – nezávislá premenná

$y = f(x)$ … závislá premenná

URČENIE FUNKCIE:

PREDPIS + DEFINIČNÝ OBOR

(napr. analyticky)

Pr. $f : y = x^3$

$D(f) = \mathbb{R}$

buď je určený

nie je určený
(MUSÍME HO URČIŤ TAK, ABY BOL
V PREDPISE VÝRAZ DEFINOVANÝ)

Pr1) $f : y = \frac{2}{x^4}$

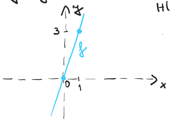
PODM.: $x^4 \neq 0$
$x \neq 0$
$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Pr2) $f : y = \sqrt{3x}$

PODM.: $3x \geq 0$
$x \geq 0$
$D(f) = \langle 0 ; \infty)$

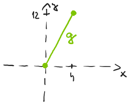
ROZŠÍRENIE a ZÚŽENIE

Pr3) $f : y = 3x \rightarrow D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \mathbb{R}$



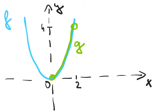
Pr4 $g: y = 3x$ ↝ $D(g) = \langle 0; 4 \rangle$

$H(g) = \langle 0; 12 \rangle$



Pr5 $f: y = x^2$ $\longrightarrow$ $D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \langle 0; \infty)$

$g: y = x^2$ ↝ $D(g) = (0; 2)$
$H(g) = (0; 4)$

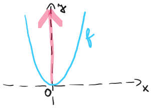


OHRANIČENOSŤ FUNKCIE

Pr6

$f: y = x^4$ $D(f) = \mathbb{R}$

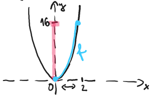
a)



$H(f) = \langle 0; \infty)$
↳ nie je zhora ohraničená
⇙
funkcia f nie je zhora ohraničená

b) JE FUNKCIA f OHRANIČENÁ NA $M = \langle 0; 2 \rangle$?

$f: y = x^4$ na $M = \langle 0; 2 \rangle$
$M \subset D(f)$
↳ ÁNO JE OHRANIČENÁ, LEBO
$f(M) = \langle 0; 16 \rangle$ JE OHRANIČENÁ



c) JE FUNKCIA f ZDOLA OHRANIČENÁ ?

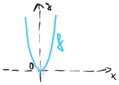
$f: y = x^4$ $\rightarrow$ $D(f) = \mathbb{R}$

ÁNO JE ZDOLA OHRANIČENÁ, LEBO
$H(f) = \langle 0; \infty)$ JE ZDOLA OHRANIČENÁ

MINIMUM a MAXIMUM FUNKCIE

Pr7 $f: y = x^6$ $\longrightarrow$ $D(f) = \mathbb{R}$

a)

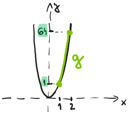


$\min\limits_{x \in D(f)} f(x) = 0$

$\max\limits_{x \in D(f)} f(x)$ – nemá

$H(f) = \langle 0; \infty)$

b) $g: y = x^6$ nech $M = \langle 1; 2 \rangle$
$M \subset D(f)$ ⟶ $f(M) = \langle 1; 64 \rangle$



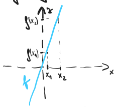
$\min\limits_{x \in M} g(x) = 1$

$\max\limits_{x \in M} g(x) = 64$

MONOTÓNNOSŤ FUNKCIE

Pr8 RASTÚCOSŤ NA CELOM DEFINIČNOM OBORE

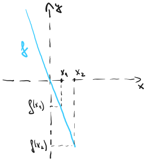
a) $f: y = 2x$ $D(f) = \mathbb{R}$



$\forall x_1, x_2 \in D(f): \; x_1 < x_2 \; \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

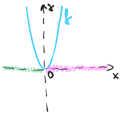
b) KLESAJÚCOSŤ NA CELOM DEFINIČNOM OBORE

$f: y = -3x$ $D(f) = \mathbb{R}$



$\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Pr9 $f: y = x^8$



$D(f) = \mathbb{R}$

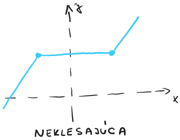
NIE JE RASTÚCA, ANI KLESAJÚCA NA $D(f)$

RASTIE NA $\langle 0; \infty)$

KLESÁ NA $(-\infty; 0\rangle$

Pr10

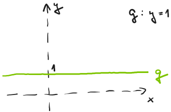
a)



NEKLESAJÚCA

b)

$g: y = 1 \quad D(g) = \mathbb{R}$



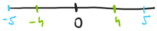
NEKLESAJÚCA a NERASTÚCA

PÁRNOSŤ a NEPÁRNOSŤ FUNKCIE

Pr11 $f(x) = x^2 \quad D(f) = \mathbb{R}$

1, podmienka pre $D(f)$:

$\forall x \in D(f) \quad -x \in D(f)$



2, podmienka pre symetriu:

$\forall x \in D(f) \quad f(x) = f(-x)$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f(-x) = (-x)^2 = x^2 \end{array}\right\} \checkmark$

ÁNO, $y = x^2$ JE PÁRNA $\boxed{\text{(graf je súmerný podľa } o_y\text{)}}$

Pr15 $f(x) = x^5 \quad D(f) = \mathbb{R}$

1, podmienka pre $D(f)$:

$\forall x \in D(f) \quad -x \in D(f)$

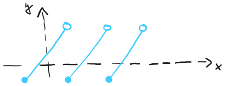
2, podmienka pre symetriu:

$\forall x \in D(f): \quad f(-x) = -f(x)$

$\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^5 = -x^5 \\ -f(x) = -x^5 \end{array}\right\} \checkmark$

ÁNO, $y = x^5$ je NEPÁRNA $\boxed{\text{(graf je súmerný podľa bodu } [0,0]\text{)}}$

PERIODICKÉ FUNKCIE

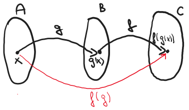


GONIOMETRICKÉ FUNKCIE:

$\left.\begin{array}{l} f_1: y = \sin x \\ f_2: y = \cos x \end{array}\right\}$ perióda $p = 2\pi$

$\left.\begin{array}{l} f_3: y = \operatorname{tg} x \\ f_4: y = \operatorname{cotg} x \end{array}\right\}$ perióda $p = \pi$

ZLOŽENÁ FUNKCIA



$g : A \to B$
$f : B \to C$

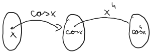
$f(g(x)) : A \to C$

$g(x)$ → vnútorná zložka

f → vonkajšia zložka

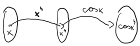
Pv_{13}

a) $y = (\cos x)^4 = \cos^4 x$



vnútorná zložka $\cos x$
vonkajšia zložka $(\,)^4$

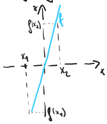
b) $y = \cos(x^4) = \cos x^4$



vnútorná zložka x^4
vonkajšia zložka $\cos(\,)$

PROSTÁ FUNKCIA

Pv_{14} $f : y = 4x$



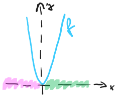
$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ÁNO ✓

AK RASTIE, TAK JE PROSTÁ
AK KLESÁ, TAK JE PROSTÁ
} RÝDZOMONOTÓNNE SÚ PROSTÉ

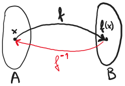
Pv_{15}

a) $f : y = x^6$ $D(f) = \mathbb{R}$



nie je prostá na $D(f)$
je prostá na $(-\infty; 0\rangle$
je prostá na $\langle 0; \infty)$

INVERZNÁ FUNKCIA



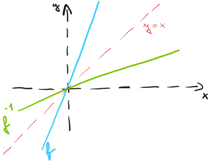
ak by f nebola prostá,
tak : $x_1 \neq x_2$ a $f(x_1) = f(x_2)$

f musí byť prostá!

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$$

Pv_{16} $f : y = 3x$

$D(f) = \mathbb{R}$
f je prostá → ex. f^{-1}: $x = 3y$
$y = \frac{x}{3}$

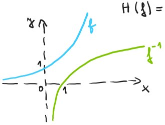


grafy navzájom inverzných funkcií
sú súmerné podľa priamky $y = x$

Pv_{17} $f : y = e^x$

$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = (0; \infty)$

INVERZNÁ K EXPONENCIÁLNEJ
JE LOGARITMICKÁ FUNKCIA



$f^{-1} : x = e^y$
$y = \ln x$

$D(f^{-1}) = (0; \infty)$
$H(f^{-1}) = \mathbb{R}$

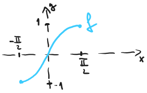
PRIRODZENÝ LOGARITMUS

CYKLOMETRICKÉ FUNKCIE

- INVERZNÉ FUNKCIE KU GONIOMETRICKÝM FUNKCIÁM

$\sin x$, $\cos x$, $\text{tg}\, x$, $\text{cotg}\, x$ nie sú prosté na svojom definičnom obore

1) $f: y = \sin x$ pre $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$



↳ je rastúca, teda je prostá

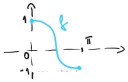
$H(f) = \langle -1; 1 \rangle$

inverzná funkcia sa nazýva

$f^{-1}: y = \arcsin x$ $D(f^{-1}) = \langle -1; 1 \rangle$

$H(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

2) $f: y = \cos x$ pre $x \in \langle 0; \pi \rangle$



↳ je klesajúca, teda je prostá

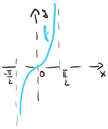
$H(f) = \langle -1; 1 \rangle$

inverzná funkcia sa nazýva

$f^{-1}: y = \arccos x$ $D(f^{-1}) = \langle -1; 1 \rangle$

$H(f^{-1}) = \langle 0; \pi \rangle$

3) $f: y = \mathrm{tg}\, x$ pre $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$



↳ je rastúca, teda je prostá

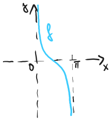
$H(f) = \mathbb{R}$

inverzná funkcia sa nazýva

$f^{-1}: y = \mathrm{arctg}\, x$ $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

$H(f^{-1}) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

4) $f: y = \mathrm{cotg}\, x$ pre $x \in (0; \pi)$



↳ je klesajúca, teda je prostá

$H(f) = \mathbb{R}$

inverzná funkcia sa nazýva

$f^{-1}: y = \mathrm{arccotg}\, x$ $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

$H(f^{-1}) = (0; \pi)$