

Vzorová zápočtová písomka z predmetu Diskrétna matematika - opakujúci

1. Je daná množina $A = \{2, 4, 8, 10, 12\}$. Zistite, ktoré z vlastností reflexívnosť, symetrickosť, antisymetrickosť, tranzitívnosť platia v binárnej relácii

- (a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in A \times A; y - x \leq 4\}$
 (b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in A \times A; y > x\}$
 (c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in A \times A; |x - y| \leq 3\}$.
 (d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in A \times A; x \mid y \text{ alebo } y \mid x\}$,

Ku každej vlastnosti je potrebné napísať jej definíciu, rozhodnúť, či daná vlastnosť platí a svoje tvrdenie odôvodniť.

2. (a) Nech $A = \{2, 4, 6, 10, 12, 30, 60\}$.

- Znázornite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(A, |)$.
- Určte nasledovné priesečky a spojenia

$$\begin{array}{l} 2 \wedge 10 \\ 2 \vee 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 \wedge 10 \\ 4 \vee 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12 \wedge 30 \\ 12 \vee 30 \end{array}$$

- Ku každému prvku nájdite všetky komplementy, ak existujú. Rozhodnite, či $(A, |)$ je komplementárny zväz.

- (b) Nech $A = \{1, 2, 4, 5, 20, 25, 50, 100\}$.

- Znázornite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(A, |)$.
- Určte: $\sup\{2, 25, 50\}$, $\sup\{2, 4, 20\}$, $\sup\{2, 5\}$, $\inf\{4, 20, 50\}$, $\inf\{5, 25, 50\}$, $\inf\{20, 50\}$.
- Rozhodnite, či $(A, |)$ je zväz.

- (c) Rozhodnite, ktoré zo zväzov $(D_{12}, |)$, $(D_{32}, |)$, $(D_{50}, |)$ sú izomorfné. Ak sú zväzy izomorfné, popíšte izomorfizmus.

- (d) Rozhodnite, či zväz $(A, |)$, kde $A = \{1, 2, 4, 9, 12, 18, 36\}$ je podzväzom zväzu $(D_{36}, |)$.

3. Rozhodnite, či množina M je splniteľná a či formula α vyplýva z množiny formúl M , ak

(a) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z, x \Leftrightarrow \bar{z}, (x \wedge y) \Rightarrow z, \bar{y} \wedge z\}, \quad \alpha : (x \vee y) \Rightarrow z$

(b) $M = \{(x \Leftrightarrow y) \vee z, x \Rightarrow \bar{z}, (x \wedge y) \Rightarrow z, \bar{y} \wedge z\}, \quad \alpha : (x \wedge y) \Rightarrow z$.

4. (a) Daná je formula v úplnom disjunktívnom tvare:

$$(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$$

- Napíšte úplný konjunktívny normálny tvar.
- Napíšte minimálny konjunktívny normálny tvar a minimálny disjunktívny normálny tvar.

- (b) Daná je formula v úplnom konjunktívnom tvare:

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$

- Napíšte úplný disjunktívny normálny tvar.
- Napíšte minimálny konjunktívny normálny tvar a minimálny disjunktívny normálny tvar.

- (c) Nájdite úplný disjunktívny normálny tvar a úplný konjunktívny normálny tvar boolovskej funkcie realizovanej formulou

$$[x \vee (y \wedge z)] \Rightarrow \overline{(y \Leftrightarrow \bar{z})}$$

Obidva tvary minimalizujte.