Matematická logika

Emília Draženská – Helena Myšková

Košice 2014

Recenzenti: RNDr. Ján Buša, CSc.
RNDr. Daniela Kravecová, PhD.

Tretie rozšírene a opravené vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Technická univerzita v Košiciach, Letná 9,
04200 Košice, 2014

ISBN 978-80-553-1821-9

Obsah

Úvod **4**

1 Množiny a binárne relácie **5**
1.1 Základné pojmy teórie množín 5
1.2 Binárne relácie 10

2 Výroková logika **15**
2.1 Výrok a formula 15
2.2 Sémantika výrokovej logiky 21
2.3 Úplné systémy logických spojok 35
2.4 Normálny konjunktívny a normálny disjunktívny tvar 38
2.5 Syntax výrokovej logiky 50
2.6 Rezolučná metóda vo výrokovej logike 64
2.6.1 Zrýchlená rezolučná metóda 66

3 Predikátová logika **73**
3.1 Základné pojmy predikátovej logiky 73
3.1.1 Neformálne zavedenie predikátovej logiky 73
3.1.2 Term a formula 76
3.1.3 Substituovateľnosť termov 82
3.2 Sémantika predikátovej logiky 95
3.2.1 Štruktúra a realizácia termu 96
3.2.2 Pravdivosť formuly 97
3.2.3 Splniteľnosť množiny formúl 100
3.3 Syntax predikátovej logiky 112
3.3.1 Teória a model 112
3.3.2 Axiómy predikátovej logiky 113
3.4 Rezolučná metóda v predikátovej logike 120
3.4.1 Prenexný tvar formuly 121
3.4.2 Skolemovský variant formuly 123
3.4.3 Klauzulárny tvar 124
3.4.4 Rezolventy 125
3.4.5 Použitie rezolučnej metódy 130

Úvod

Táto vysokoškolská učebnica je určená predovšetkým študentom prvého ročníka bakalárskeho štúdia odboru informatika Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Má slúžiť ako pomôcka pri štúdiu predmetu Matematická logika.

To, čo sme uviedli v skriptách, je iba úvod do matematickej logiky. Vzhľadom na rozsah skrípt sme uvádzali len dôkazy niektorých tvrdení, čitateľ si môže doplniť vedomosti z danej problematiky z uvedenej literatúry.

Skriptá sú rozdelené do troch kapitol. Prvá sa venuje množinám a binárnym reláciám, druhá výrokovej logike a posledná kapitola predikátovej logike. Každá z nich má niekoľko podkapitol. Preberané učivo je ilustrované na riešených príkladoch. Na konci každej podkapitoly sú uvedené úlohy na samostatné riešenie spolu s ich výsledkami.

Naše poďakovanie patrí RNDr. Jánovi Bušovi, CSc. za cenné pripomienky, ktoré prispeli k skvalitneniu textu a za pomoc pri písaní skrípt v programe LaTEX, RNDr. Daniele Kravecovej, PhD. za starostlivé prečítanie textu a návrhy na jeho zlepšenie a Mgr. Jánovi Bušovi, PhD. za vytvorenie obrázkov v LaTEX-u.

Autori

Kapitola 1

Množiny a binárne relácie

1.1 Základné pojmy teórie množín

Pojem množiny nedefinujeme, chápeme ho intuitívne. Pod **množinou** rozumieme súbor navzájom rôznych objektov, ktoré nazývame **prvky** množiny. Množiny označujeme veľkými písmenami

$$A, B, \dots, X, Y, \dots$$

a prvky množín označujeme malými písmenami

$$a, b, \dots, x, y, \dots$$

Ak x patrí do množiny A, zapisujeme

$$x \in A.$$

Ak x nepatrí do množiny A, zapisujeme

$$x \notin A.$$

Množinu, ktorá nemá žiaden prvok nazývame **prázdna množina** a označujeme ju symbolom $\emptyset$. Hovoríme, že dve **množiny sú rovnaké**, ak majú rovnaké všetky prvky, t.j. ak každý prvok prvej množiny je súčasne prvkom druhej množiny a naopak. Niektoré množiny majú zaužívané označenie:

$\mathbb{N}$	označuje množinu prirodzených čísel (číslo 0 nepovažujeme za prirodzené číslo),
$\mathbb{Z}$	označuje množinu celých čísel,
$\mathbb{Q}$	označuje množinu racionálnych čísel,
$\mathbb{R}$	označuje množinu reálnych čísel,
$\mathbb{C}$	označuje množinu komplexných čísel.

Množinu môžeme zadať vymenovaním prvkov. Ak množina A obsahuje konečný počet prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$, zapisujeme $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Najčastejšie množinu zadávame pomocou nejakej vlastnosti, ktorou sú charakterizované jej prvky.

Napríklad, nech V je vlastnosť „byť párnym číslom“. Ak množina A obsahuje prvky z množiny B, ktoré majú vlastnosť V, tak zapisujeme $A = \{x \in B;\ V(x)\}$.

Príklad 1.1.1 Množinu prvočísel, nie väčších ako 20, vieme zapísať $A = \{x \in \mathbb{N};\ x \leqq 20$ a x je prvočíslo$\}$ alebo vymenovaním všetkých prvkov A=$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. □

Niekedy, ak množina má nekonečne veľa prvkov, nevieme vypísať všetky prvky množiny, môžeme ich „naznačiť“. Napríklad, ak chceme vyjadriť množinu párnych prirodzených čísel, zapíšeme A=$\{2, 4, 6, 8, \ldots, 2k, \ldots;\ k \in \mathbb{N}\}$.

Definícia 1.1.1 *Majme množiny A, B. Hovoríme, že množina A je **podmnožinou** množiny B práve vtedy, keď každý prvok množiny A je prvkom množiny B. Píšeme*[1] $A \subseteq B$.

Ak A nie je podmnožinou B, píšeme $A \nsubseteq B$.

Je zrejmé, že $A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a súčasne $B \subseteq A$. Pre ľubovoľnú množinu A platí, že $\emptyset \subseteq A$ a tiež $A \subseteq A$.

Definícia 1.1.2 ***Potenčná množina*** *množiny A je množina $\mathcal{P}(A)$ všetkých podmnožín množiny A.*

Príklad 1.1.2 Nech $A = \{a, b, c\}$. Potom
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. □

Ak $A = \emptyset$, tak $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.

Potenčná množina ľubovoľnej množiny je vždy neprázdna, keďže vždy obsahuje prvok $\emptyset$.

Predpokladajme, že prvky množiny sú prvkami nejakej univerzálnej množiny U. Definujme nasledujúce operácie s množinami.

Definícia 1.1.3 ***Zjednotenie*** *dvoch množín A a B je množina*

$$A \cup B = \{x \in U;\ x \in A \text{ alebo } x \in B\}.$$

Definícia 1.1.4 ***Prienik*** *dvoch množín A a B je množina*

$$A \cap B = \{x \in U;\ x \in A \text{ a } x \in B\}.$$

Definícia 1.1.5 ***Rozdiel*** *dvoch množín A a B je množina*

$$A - B = \{x \in U;\ x \in A \text{ a } x \notin B\}.$$

Definícia 1.1.6 ***Doplnok*** *(komplement) množiny A je množina*

$$\overline{A} = \{x \in U;\ x \notin A\}.$$

Platí: $\overline{A} = U - A$.

[1] Niektorí autori používajú na označenie podmnožiny symbol $\subset$.

Definícia 1.1.7 ***Symetrická diferencia*** *dvoch množín A a B je množina*

$$A \div B = \{x \in U;\ x \in (A \cup B)\ a\ x \notin (A \cap B)\}.$$

Platí: $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$.

Definícia 1.1.8 ***Karteziánsky súčin*** *$A \times B$ dvoch množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$, teda*

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A\ a\ y \in B\}.$$

Poznamenajme, že v usporiadanej dvojici je dôležité vedieť, ktorý prvok je prvý a ktorý druhý. Usporiadané dvojice $(1, 2)$ a $(2, 1)$ sú navzájom rôzne. Ale pokiaľ by 1 a 2 boli prvkami množiny, vtedy nezáleží na poradí, píšeme {1,2} alebo aj {2,1}.

Definícia 1.1.9 *Hovoríme, že dve* ***usporiadané dvojice*** (a, b) ***a*** (c, d) ***sa rovnajú*** *práve vtedy, keď $a = c$ a $b = d$.*

Pojem karteziánskeho súčinu dvoch množín $A \times B$ môžeme zovšeobecniť. Karteziánsky súčin množín $A_1,\ A_2,\ \cdots A_n$, zapisujeme $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, je množina všetkých usporiadaných n-tíc $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in A_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$. Dve usporiadané n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sa rovnajú práve vtedy, keď $x_i = y_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definícia 1.1.10 *Ak $A \cap B = \emptyset$, tak množiny A, B nazývame* ***disjunktné****.*

Nech A, B, C sú podmnožiny univerzálnej množiny U. Potom platí nasledujúca veta.

Veta 1.1.1 *Pre ľubovoľné množiny A, B, C platí*

1. *Komutatívnosť*
   $A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A,$

2. *Asociatívnosť*
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$

3. *Distributívnosť*
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

4. *Absorpcia*
   $A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup U = U,$

5. *Involúcia*
   $\overline{(\overline{A})} = A,$

6. *De Morganove pravidlá*
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$

7. *Identita*
   $A \cap U = A, \qquad A \cup \emptyset = A,$

8. *Idempotentnosť*
   $A \cap A = A, \qquad A \cup A = A,$

9. *Zákon vylúčenia tretieho*
   $A \cup \overline{A} = U,$

10. *Zákon sporu*
    $A \cap \overline{A} = \emptyset.$

Nech I je množina indexov. Pre každé $i \in I$ nech existuje množina $A_i \subseteq U$. Množinu $\{A_i; i \in I\}$ nazývame **systém množín**. Definujme prienik a zjednotenie pre takýto systém množín.

Definícia 1.1.11 *Množinu $\bigcup_{\{i\in I\}} A_i$, ktorá obsahuje všetky prvky z U patriace do niektorej množiny A_i, nazývame **zjednotenie systému množín**.*
*Množinu $\bigcap_{\{i\in I\}} A_i$, ktorá obsahuje všetky prvky z U patriace do každej množiny A_i, nazývame **prienik systému množín**.*

Definícia 1.1.12 ***Rozkladom** neprázdnej množiny A nazývame systém neprázdnych množín $\{A_i; i \in I\}$, pre ktorý platí*

$$\bigcup_{\{i\in I\}} A_i = A$$

a

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pre ľubovoľné } i, j \in I, i \neq j.$$

Definícia 1.1.13 *Nech $a, b \in \mathbb{Z}$. Hovoríme, že číslo b je **deliteľné** číslom a práve vtedy, keď existuje číslo $q \in \mathbb{Z}$ také, že $b = aq$. Zapisujeme: $a \mid b$ (čítame a delí b).*

Hovoríme tiež, že a je deliteľ čísla b, resp. b je násobok čísla a.

Veta 1.1.2 *Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Potom existuje práve jedna dvojica čísel $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqq r < |b|$ také, že $a = bq + r$.*

Definícia 1.1.14 *Ak dve celé čísla a, b po delení prirodzeným číslom m majú rovnaký zvyšok r, nazývame ich **kongruentnými podľa modulu** m. Zapisujeme: $a \equiv b \pmod{m}$.*

Ak a je kongruentné s b podľa modulu m, teda a a b majú rovnaký zvyšok po delení číslom m, môžeme písať

$$a = mq_1 + r, \qquad b = mq_2 + r, \qquad \text{pričom } 0 \leqq r < |m|, \quad q_1,\ q_2 \in \mathbb{Z}.$$

Z toho dostávame $a - b = m(q_1 - q_2)$. Keďže $q_1 - q_2$ je celé číslo, platí, že číslo $a - b$ je násobkom čísla m, teda $m \mid (a - b)$.

Úlohy

1.1 Vypíšte prvky množín:

a) $A = \{x \in \mathbb{N};\ -13 < -2x - 1 \leqq 3 \text{ a } x \text{ je párne}\}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{Z};\ x \equiv 0 \pmod 4\}$,

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ x^2 = y \text{ a } y < 11\}$.

1.2 Nech $A = \{x \in \mathbb{Z};\ x \equiv 0 \pmod 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N};\ x \leqq 5\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Nájdite prvky množiny:

a) $A \cup B \cup C$,

b) $A \cap B \cap C$,

c) $A \cap (C - B)$,

d) $(A \cap B) \div C$,

e) $C \div (C \div B)$.

1.3 Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{1, 2\}$. Napíšte prvky množín $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$.

1.4 Napíšte prvky potenčnej množiny $\mathcal{P}(A)$ pre množinu:

a) $A = \{1, 2\}$,

b) $A = \{a, b, c, d\}$.

1.5 Nájdite všetky rozklady množiny:

a) $A = \{1, 2\}$,

b) $B = \{a, b, c\}$.

Výsledky

1.1 a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

b) $\{4k;\ k \in \mathbb{Z}\}$,

c) $\{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), (-3, 9), (3, 9)\}$.

1.2 a) A,

b) $\{2\}$,

c) $\{-2, 0\}$,

d) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 3\}$,

e) $\{1, 2, 3\}$.

1.3 $A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$,
$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$,
$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$.

1.4 a) $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$,
b) $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},$
$\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$.

1.5 a) $\{\{\emptyset,\{1,2\}\},\{\{1\},\{2\}\}\}$,
b) $\{\{\emptyset,\{a,b,c\}\},\{\{a\},\{b\},\{c\}\},\{\{a\},\{b,c\}\},\{\{b\},\{a,c\}\},\{\{c\},\{a,b\}\}\}$.

1.2 Binárne relácie

Definícia 1.2.1 ***Binárna relácia*** $\mathcal{R}$ ***z množiny*** A ***do množiny*** B *je ľubovoľná podmnožina karteziánskeho súčinu* $A \times B$.
Ak $A = B$, *teda* $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, *hovoríme, že* ***relácia*** $\mathcal{R}$ ***je na množine*** A.
Ak $(a,b) \in \mathcal{R}$, *hovoríme, že* ***prvok*** a ***je v relácii*** $\mathcal{R}$ ***s prvkom*** b *a zapisujeme* $a\mathcal{R}b$. *Ak* $(a,b) \notin \mathcal{R}$, *zapisujeme* $a\overline{\mathcal{R}}b$.

V ďalšom sa budeme zaoberať iba binárnymi reláciami *na množine*.

Definícia 1.2.2 *Relácia* $\mathcal{R}$ *na množine* A *sa nazýva*

- ***reflexívna*** *práve vtedy, keď*
  pre všetky $a \in A$ *platí* $a\mathcal{R}a$,
- ***symetrická*** *práve vtedy, keď*
  pre všetky $a, b \in A$ *platí, že ak* $a\mathcal{R}b$, *tak* $b\mathcal{R}a$,
- ***antisymetrická*** *práve vtedy, keď*
  pre všetky $a, b \in A$ *platí, že ak* $a\mathcal{R}b$ *a zároveň* $b\mathcal{R}a$, *tak* $a = b$,
- ***tranzitívna*** *práve vtedy, keď*
  pre všetky $a, b, c \in A$ *platí, že ak* $a\mathcal{R}b$ *a zároveň* $b\mathcal{R}c$, *tak* $a\mathcal{R}c$.

Príklad 1.2.1 Relácia „$\leqq$“ na množine $\mathbb{Z}$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. □

Definícia 1.2.3 *Relácia* $\mathcal{R}$ *na množine* A *sa nazýva* ***ekvivalencia*** *práve vtedy, keď je reflexívna, symetrická a tranzitívna.*

Nech $\mathcal{E}$ je ekvivalencia na množine A.

Veta 1.2.1 *Každá ekvivalencia* $\mathcal{E}$ *určuje rozklad množiny* A *a každý rozklad množiny* A *určuje nejakú ekvivalenciu.*

Ak $a \in A$, tak **trieda ekvivalencie** $\mathcal{E}$ prislúchajúca prvku a je množina $[a]_{\mathcal{E}}$, ktorá obsahuje všetky prvky množiny A, ktoré sú v relácii $\mathcal{E}$ s daným prvkom a, teda $[a]_{\mathcal{E}} = \{x \in A;\ x\mathcal{E}a\}$.

Príklad 1.2.2 Nech $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Relácia $\mathcal{R}$ na množine A je definovaná takto: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = 2x$. Vymenujme prvky relácie $\mathcal{R}$ a určme, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická a/alebo tranzitívna. Jedná sa o ekvivalenciu? Ak nie, určme najmenšiu ekvivalenciu $\mathcal{E}$ na množine A, ktorej podmnožinou je relácia $\mathcal{R}$ a určme rozklad množiny A určený ekvivalenciou $\mathcal{E}$.

Riešenie: Ľahko vieme určiť, že prvkami množiny $\mathcal{R}$ sú usporiadané dvojice (0,0), (1,2) a (2,4), teda $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$. Keďže napríklad $(1, 1) \notin \mathcal{R}$, relácia $\mathcal{R}$ nie je reflexívna. Relácia $\mathcal{R}$ nie je ani symetrická, pretože $(1, 2) \in \mathcal{R}$, ale $(2, 1) \notin \mathcal{R}$. Je antisymetrická, pretože predpoklad $(a, b) \in \mathcal{R}$ a zároveň $(b, a) \in \mathcal{R}$ platí iba pre $a = b = 0$. Relácia $\mathcal{R}$ nie je tranzitívna, lebo $(1, 2) \in \mathcal{R}$ a tiež $(2, 4) \in \mathcal{R}$, ale $(1, 4) \notin \mathcal{R}$. Relácia $\mathcal{R}$ nie je ekvivalencia, lebo nie je reflexívna ani tranzitívna.

Najmenšiu ekvivalenciu $\mathcal{E}$ nájdeme pridaním minimálneho počtu usporiadaných dvojíc tak, aby vzniknutá relácia mala vlastnosti ekvivalencie. Aby relácia $\mathcal{E}$ bola reflexívna, musíme reláciu $\mathcal{R}$ rozšíriť o usporiadané dvojice (1,1), (2,2), (3,3), (4,4). Pridaním usporiadaných dvojíc (2,1), (4,2) vzniknutá relácia bude aj symetrická. A aby bola aj tranzitívna, pridáme usporiadané dvojice (1,4) a (4,1). Teda relácia $\mathcal{E} = \mathcal{R} \cup \{(1, 1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,4), (4, 1)\}$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Jedná sa o najmenšiu reláciu obsahujúcu reláciu $\mathcal{R}$ s týmito vlastnosťami.

Teraz nájdeme rozklad množiny A podľa ekvivalencie $\mathcal{E}$. Trieda rozkladu $[1]_{\mathcal{E}}$ prislúchajúca prvku 1 obsahuje všetky prvky množiny A, ktoré sú v relácii s prvkom 1, teda $[1]_{\mathcal{E}} = \{1, 2, 4\}$. Pre prvky 2 a 4 platí $[2]_{\mathcal{E}} = [4]_{\mathcal{E}} = [1]_{\mathcal{E}}$. Prvok 0 je v relácii iba sám so sebou a podobne to platí aj pre prvok 3, teda $[0]_{\mathcal{E}} = \{0\}$, $[3]_{\mathcal{E}} = \{3\}$. Rozklad množiny A podľa ekvivalencie $\mathcal{E}$ je množina $\{\{0\}, \{3\}, \{1, 2, 4\}\}$. □

Príklad 1.2.3 Určme, či relácia $\mathcal{R}$ na množine $\mathbb{Z}$, definovaná $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| > 1$, je reflexívna, symetrická, antisymetrická a/alebo tranzitívna.

Riešenie: Nech $x \in \mathbb{Z}$. Relácia $\mathcal{R}$ nie je reflexívna, lebo $|x - x| = 0 \not> 1$.

Nech $x, y \in \mathbb{Z}$. Ak $|x - y| > 1$, tak na základe vlastnosti absolútnej hodnoty platí aj $|y - x| > 1$. Relácia $\mathcal{R}$ je symetrická. Ak $|x - y| > 1$ a zároveň $|y - x| > > 1$, tak nemusí byť $x = y$. Stačí zobrať $x = 1$ a $y = 9$. Teda relácia $\mathcal{R}$ nie je antisymetrická.

Nech $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Ak $|x - y| > 1$ a zároveň $|y - z| > 1$, tak z toho nemusí vyplývať, že $|x - z| > 1$. Stačí vziať $x = -3$, $y = 0$, $z = -2$. Teda relácia $\mathcal{R}$ nie je tranzitívna. □

Príklad 1.2.4 Zistime, či relácia $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ a \equiv b \pmod 4\}$ je ekvivalencia. Ak áno, nájdime rozklad množiny $\mathbb{Z}$ určený touto reláciou.

Riešenie: Podľa definície 1.2.3, ak chceme zistiť, či relácia je ekvivalencia, musíme zistiť, či je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Ak relácia nemá niektorú z týchto vlastností, nie je ekvivalenciou. Dve celé čísla x a y sú v relácii $\mathcal{R}$ práve vtedy, keď x a y majú rovnaký zvyšok po delení štyrmi.

Relácia $\mathcal{R}$ je reflexívna, lebo pre každé celé číslo x platí, že x a x majú rovnaký zvyšok po delení číslom štyri.

Relácia $\mathcal{R}$ je symetrická, lebo pre ľubovoľné dve celé čísla x, y platí, že ak x aj y majú rovnaký zvyšok po delení číslom štyri, tak aj y a x majú rovnaký zvyšok po delení číslom štyri.

Relácia $\mathcal{R}$ je tranzitívna, lebo pre všetky celé čísla x, y, z platí, že ak x a y majú rovnaký zvyšok po delení číslom štyri a zároveň y a z majú rovnaký zvyšok po delení číslom štyri, tak aj x a z majú rovnaký zvyšok po delení číslom štyri.

Keďže sa jedná o ekvivalenciu, určme rozklad množiny $\mathbb{Z}$. Najprv napíšeme triedu ekvivalencie $[k]_\mathcal{R}$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$.

$$[k]_\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{Z};\ x\mathcal{R}k\} = \{x \in \mathbb{Z};\ x \equiv k \pmod 4\}.$$

V tejto množine sú teda všetky celé čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení štyrmi ako číslo k. Teda $[k]_\mathcal{R} = \{\dots, k-12,\ k-8,\ k-4,\ k,\ k+4,\ k+8,\ k+12, \dots\}$. Označme túto množinu $\overline{k}$.

Dosaďme za k konkrétne čísla.

$[0]_\mathcal{R} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\} = \{4l;\ l \in \mathbb{Z}\} = \overline{0}$.

$[1]_\mathcal{R} = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\} = \{4l + 1;\ l \in \mathbb{Z}\} = \overline{1}$.

$[2]_\mathcal{R} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\} = \{4l + 2;\ l \in \mathbb{Z}\} = \overline{2}$.

$[3]_\mathcal{R} = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\} = \{4l + 3;\ l \in \mathbb{Z}\} = \overline{3}$.

Množiny $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ tvoria rozklad množiny $\mathbb{Z}$. Označme množinu tried ekvivalencie $\mathbb{Z}_4 = \{\ \overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3}\}$. Množina $\mathbb{Z}_4$ sa nazýva množinou všetkých zvyškových tried množiny $\mathbb{Z}$ podľa modulu 4. □

Vo všeobecnosti, ak $m \in \mathbb{N}$, tak množina $\mathbb{Z}_m = \{\ \overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \dots,\ \overline{m-1}\}$, kde $\overline{k} = \{\dots, k-3m,\ k-2m,\ k-m,\ k,\ k+m,\ k+2m,\ k+3m, \dots\}$, sa nazýva množina všetkých zvyškových tried množiny $\mathbb{Z}$ podľa modulu m.

Úlohy

1.6 Majme reláciu $\mathcal{R}$ na množine $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ definovanú nasledovne:

a) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 4 \mid (x + y)$,

b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \leqq 1$,

c) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x - y \equiv 0 \pmod{2}$.

Vymenujte prvky množiny $\mathcal{R}$ a zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. Jedná sa o ekvivalenciu? Ak nie, nájdite najmenšiu ekvivalenciu $\mathcal{E}$ na množine M, ktorej podmnožinou je relácia $\mathcal{R}$.

1.7 Majme reláciu $\mathcal{R} = \{x, y) \in A \times A;\ x \mid (x - y)\}$, kde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická a/alebo tranzitívna.

1.8 Zistite, či nasledujúce binárne relácie sú reflexívne, symetrické, antisymetrické a/alebo tranzitívne:

a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ x \mid y\}$,

b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ y = x^2\}$,

c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x \mid y\}$,

d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ x \cdot y \equiv 1 \pmod{2}\}$,

e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x + 3y \leqq 12\}$,

f) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ |x - y| \geqq 4\}$,

g) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ x + y \text{ je párne}\}$,

h) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 4x \equiv y \pmod{3}\}$,

i) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ x \equiv y \pmod{4}\}$,

j) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \text{nsd}(x, y) = 1\}$,

k) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ y = x - 5\}$.

1.9 Zistite, či relácie $\mathcal{R}$ na množine $\mathbb{N}$ sú ekvivalencie. Ak áno, nájdite príslušný rozklad množiny $\mathbb{N}$ určený touto reláciou:

a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leqq y$,

b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y^2$,

c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3 \mid (x + y)$,

d) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{5}$,

e) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ je párne,

f) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid (y + 3)$.

Výsledky

1.6 a) $\mathcal{R}$ nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická ani tranzitívna, $\mathcal{E} = \mathcal{R} \cup \{(-1, -1), (1, 1)\}$,

b) $\mathcal{R}$ nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická ani tranzitívna, $\mathcal{E} = \mathcal{R} \cup \{(2{,}0), (0{,}2), (2{,}1), (1{,}2), (2{,}2), (1{,}1), (1{,}2), (2{,}1)\}$,

c) $\mathcal{R}$ je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna, $\mathcal{E} = \mathcal{R}$.

1.7 Je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna.

1.8 a) je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

b) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna,

c) je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, je tranzitívna,

d) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

e) nie je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická a ani tranzitívna,

f) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,

g) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

h) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

i) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

j) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,

k) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna.

1.9 a) nie je ekvivalencia,

b) nie je ekvivalencia,

c) nie je ekvivalencia,

d) je ekvivalencia, $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{4}\{2k + i, k \in \mathbb{N}\}$,

e) je ekvivalencia, $\mathbb{N} = \{2k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$,

f) nie je ekvivalencia.

Kapitola 2

Výroková logika

2.1 Výrok a formula

Výroková logika sa zaoberá výrokmi, ich pravdivosťou a odvodzovaním. Pojem výroku nedefinujeme. Pod pojmom **výrok** rozumieme tvrdenie v tvare oznamovacej vety, pri ktorej má zmysel sa pýtať, či je alebo nie je pravdivé. Nemusíme byť ale schopní rozhodnúť o pravdivosti. Napríklad nevieme, či veta „Na svete je viac brunetiek ako blondínok.“ je pravdivá. Výrokom nie sú napríklad vety: „Prší?“, „Neber si dáždnik!“.

Elementárny výrok je tvrdenie, ktorého žiadna časť nie je výrokom. Označujeme ich pomocou výrokových premenných p, q, r, $\dots, x$, y, z, $\dots$

Zložený výrok je tvrdenie, ktoré obsahuje v svojej štruktúre výroky. Inak povedané, zložený výrok obsahuje elementárne výroky spojené tzv. logickými spojkami, ktoré bežne používame v prirodzenom jazyku pomocou slov „Nie je pravda, že …“, „ … a …“, „ … alebo …“, „Ak …, tak …“, „ … práve vtedy, keď …“ Uveďme príklad. Majme tri elementárne výroky:

- *„Prší.“*
- *„Mám v taške dáždnik.“*
- *„Je jeseň.“*

Vytvorme nasledujúce zložené výroky:

- *„Nie je pravda, že prší.“*
- *„Prší a v taške mám dáždnik.“*
- *„Je jeseň alebo prší.“* [1]
- *„Ak je jeseň, tak prší.“*
- *„Prší práve vtedy, keď mám v taške dáždnik.“*

[1] Na rozdiel od bežného jazyka sa tieto dve možnosti nevylučujú, t.j. môže súčasne pršať aj byť jeseň.

Každý z uvedených zložených výrokov používa práve jednu logickú spojku. Sú to tieto logické spojky:

- **negácia**, označujeme ju symbolom $\neg$
  Dostaneme ju z akéhokoľvek výroku pomocou slov „Nie je pravda, že ...“.
- **konjunkcia**, označujeme ju symbolom $\wedge$
  Dostaneme ju, ak spojíme dva výroky slovom „a“.
- **disjunkcia**, označujeme ju symbolom $\vee$
  Dostaneme ju, ak spojíme dva výroky slovom „alebo“.
- **implikácia**, označujeme ju symbolom $\Rightarrow$
  Dostaneme ju, ak spojíme dva výroky slovami „ak ..., tak ...“.
- **ekvivalencia**, označujeme ju symbolom $\Leftrightarrow$
  Dostaneme ju, ak spojíme dva výroky slovami „práve vtedy, keď“.

Negácia je unárna logická spojka, ostatné logické spojky sú binárne.

Ak predchádzajúce tri elementárne výroky označíme pomocou výrokových premenných p – „Prší.“, q – „Mám v taške dáždnik.“, r – „Je jeseň.“, tak predchádzajúce zložené výroky zapíšeme postupne takto:

- $\neg p$,
- $p \wedge q$,
- $r \vee p$,
- $r \Rightarrow p$,
- $p \Leftrightarrow q$.

Vo výrokovej logike nás zaujíma, či zložené výroky sú pravdivé alebo nepravdivé, na základe pravdivosti alebo nepravdivosti základných výrokov. Vnútornú štruktúru elementárnych výrokov, kroré nahrádzame výrokovými premennými, už ďalej neskúmame.

Definícia 2.1.1 ***Abecedou výrokovej logiky*** *nazývame množinu, ktorá obsahuje symboly pre*

i) výrokové premenné*:* $p,\ q,\ r,\ \dots,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,$

ii) logické spojky*:* $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,$

iii) pomocné symboly*: zátvorky.*

Ľubovoľnú konečnú postupnosť symbolov abecedy výrokovej logiky nazývame ***slovo*** *nad abecedou výrokovej logiky.*

Definícia 2.1.2 *Slovo α nad abecedou výrokovej logiky sa nazýva* ***formula výrokovej logiky (výroková formula*** *resp.* ***formula****) práve vtedy, keď existuje postupnosť slov $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$ taká, že α_n je slovo α a pre ľubovoľné $i \leqq n$ je splnená práve jedna z týchto podmienok:*

a) α_i *je výroková premenná,*

b) α_i *je negácia niektorého prvku množiny* $\{\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_{i-1}\}$*,*

c) α_i *je tvaru* $(\alpha_j \wedge \alpha_k)$*,* $(\alpha_j \vee \alpha_k)$*,* $(\alpha_j \Rightarrow \alpha_k)$*,* $(\alpha_j \Leftrightarrow \alpha_k)$ *pre nejaké* $j,\ k\ <\ i$*.*

Postupnosť slov $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$ *nazývame* ***vytvárajúca postupnosť formuly*** α*.*

Výrokové formuly budeme označovať písmenami gréckej abecedy α, β, γ, ... alebo písmenami f, g, h, ...

V ďalšom texte vonkajšie (posledné) zátvorky vo formulách budeme vynechávať. Napríklad, budeme písať $\neg x \wedge (y \Rightarrow z)$ namiesto $(\neg x \wedge (y \Rightarrow z))$. Výrokovú premennú, pred ktorú píšeme negáciu (aj viackrát), nedávame do zátvoriek. Píšeme $\neg p$ namiesto $\neg(p)$, a tiež $\neg\neg\neg p$ namiesto $\neg(\neg(\neg p))$.

Definícia 2.1.3 ***Podformulou*** *formuly* α *nazývame formulu výrokovej logiky, ktorá sa vyskytuje vo všetkých vytvárajúcich postupnostiach formuly* α*.*

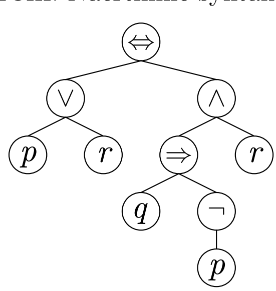
Príklad 2.1.1 Postupnosť symbolov abecedy výrokovej logiky $\wedge()\neg q \neg \Rightarrow \neg p))$ je slovo nad abecedou výrokovej logiky, ktoré nie je formulou výrokovej logiky.

Postupnosť symbolov abecedy výrokovej logiky $q \Rightarrow p \Rightarrow r$ tiež nie je formulou výrokovej logiky, nakoľko zápis nie je dobre uzátvorkovaný. Mohli by sme to čítať $(q \Rightarrow p) \Rightarrow r$ ale tiež $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, teda nevieme napísať príslušnú vytvárajúcu postupnosť.

Postupnosť symbolov abecedy výrokovej logiky $(p \vee r) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow \neg p) \wedge r)$ je formula výrokovej logiky. Jej vytvárajúce postupnosti sú napríklad tieto tri postupnosti:

$p,\ r,\ q,\ \neg p,\ p \vee r,\ q \Rightarrow \neg p,\ (q \Rightarrow \neg p) \wedge r,\ (p \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p);$
$p,\ \neg p,\ q,\ r,\ p \vee r,\ \neg(p \vee r),\ \neg r,\ q \Rightarrow \neg p,\ (q \Rightarrow \neg p) \wedge r,\ (p \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p);$
$r,\ p,\ q,\ \neg r,\ \neg p,\ \neg p \Rightarrow q,\ p \vee r,\ q \Rightarrow \neg p,\ p \Leftrightarrow r,\ (q \Rightarrow \neg p) \wedge r,\ (p \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p).$

Jej podformulami sú všetky členy prvej z uvedených vytvárajúcich postupností. Každú výrokovú formulu môžeme reprezentovať pomocou grafického útvaru nazývaného **syntaktický strom**. Načrtnime syntaktický strom tejto formuly.



Koncové vrcholy syntaktického stromu reprezentujú výrokové premenné a ostatné vrcholy sú priradené logickým spojkám. Formulu prechádzame zľava doprava a strom načrtávame zdola nahor a zľava doprava. □

Úlohy

2.1 Zistite, či nasledujúca postupnosť symbolov je výroková formula. Ak áno, nájdite jej vytvárajúcu postupnosť a načrtnite jej syntaktický strom:

a) $\neg(\neg x \wedge \neg\neg y)$,

b) $(\neg z \wedge y) \Rightarrow (z \vee x)$,

c) $x \Leftarrow y$,

d) $z \Leftrightarrow \neg \wedge x$,

e) $x \wedge \neg z \Rightarrow y$,

f) $\neg\neg(x \Leftrightarrow y)(y \vee \neg\neg z)$,

g) $((\neg(x \Rightarrow y) \wedge z) \Leftrightarrow z) \vee y$,

h) $x \Rightarrow (y \vee x)$.

2.2 Nasledujúce výroky napíšte vo formálnom jazyku výrokovej logiky:

a) Moja starká nie je vzdelaná, ale je múdra žena. [2]

b) Ak urobím skúšku, budem šťastný.

c) Ak dnes je štvrtok a ak 2+2 nie je 8, tak dostanem päťku z matematiky.

d) Na výlet pôjdu Janko aj Marienka, ak pôjde Peter a nepôjde Blažena.

e) Pán Petruška si kúpi nové auto, ak si kúpi auto jeho sused Mrkvička.

f) Pani Nováková pôjde na dovolenku práve vtedy, keď pôjde aj pán Novák.

g) Ak bude slnečno, pôjdem sa okúpať a ak bude pršať, ostanem doma.

h) Mária Terézia bola panovníčka, ale Michelangelo nebol panovník, on bol maliar.

i) Janko, hoci nie je múdry študent, je veľmi usilovný a cieľavedomý.

j) Dom si postavím a pôjdem na dovolenku na Floridu práve vtedy, keď vyhrám v lotérii.

k) Tento obraz nenamaľoval ani Picasso ani Renoir.

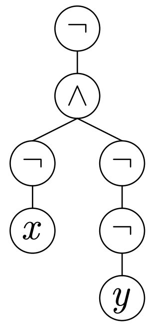
l) Dám ti facku, ak ma oklameš.

m) Ak bude krásne počasie a nepokazí sa nám auto, pôjdeme na výlet a budeme sa kúpať.

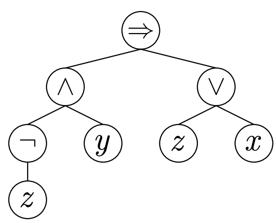
[2] Spojku „ale“ je potrebné chápať ako „a“.

Výsledky

2.1 a) vytvárajúca postupnosť: $x,\ \neg x,\ y,\ \neg y,\ \neg\neg y,\ \neg x \wedge \neg\neg y,\ \neg(\neg x \wedge \neg\neg y)$
syntaktický strom:

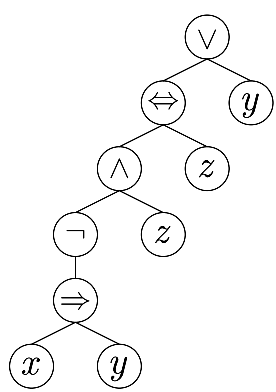


b) vytvárajúca postupnosť: $z,\ y,\ x,\ \neg z,\ \neg z \wedge y,\ z \vee x,\ (\neg z \wedge y) \Rightarrow (z \vee x)$
syntaktický strom:

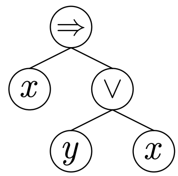


c) nie je výroková formula,
d) nie je výroková formula,
e) nie je výroková formula,
f) nie je výroková formula.

g) vytvárajúca postupnosť: $x,\ y,\ z,\ x \Rightarrow y,\ \neg(x \Rightarrow y),\ \neg(x \Rightarrow y) \wedge$ $\wedge\, z, (\neg(x \Rightarrow y) \wedge z) \Leftrightarrow z,\ ((\neg(x \Rightarrow y) \wedge z) \Leftrightarrow z) \vee y$
syntaktický strom:



h) vytvárajúca postupnosť: $x,\ y,\ y \vee x,\ x \Rightarrow (y \vee x)$
syntaktický strom:



2.2 a) Označme: v – „Starká je vzdelaná.“, m – „Starká je múdra.“. Potom danému výroku odpovedá formula $\neg v \wedge m$.

b) Označme: s – „Urobím skúšku.“, t – „Som šťastný.“. Potom danému výroku odpovedá formula $s \Rightarrow t$.

c) Označme: s – „Je štvrtok.“, o – „2+2 je 8.“, p – „Dostanem päťku z matematiky.“. Potom danému výroku odpovedá formula $(s \wedge \neg o) \Rightarrow p$.

d) Označme: j – „Janko pôjde.“, m – „Marienka pôjde.“, p – „Peter pôjde.“, b – „Blažena pôjde.“. Potom danému výroku odpovedá formula $(p \wedge \neg b) \Rightarrow (j \wedge m)$.

e) Označme: p – „Petruška kúpi auto.“, m – „Mrkvička kúpi auto.“. Potom danému výroku odpovedá formula $m \Rightarrow p$.

f) Označme: n – „Nováková pôjde na dovolenku.“, m – „Novák pôjde na dovolenku.“. Potom danému výroku odpovedá formula $n \Leftrightarrow m$.

g) Označme: s – „Bude slnečno.“, o – „Pôjdem sa okúpať.“, p – „Bude pršať.“, d – „Ostanem doma.“. Potom danému výroku odpovedá formula $(s \Rightarrow o) \wedge (p \Rightarrow d)$.

h) Označme: t – „Mária Terézia bola panovníčka.“, p – „Michelangelo bol panovník.“, m – „Michelangelo bol maliar.“. Potom danému výroku odpovedá formula $(t \wedge \neg p) \wedge m$.

i) Označme: m – „Janko je múdry.“, u – „Janko je usilovný.“, c – „Janko je cieľavedomý.“. Potom danému výroku odpovedá formula $(\neg m \wedge u) \wedge c$.

j) Označme: p – „Postavím dom.“, f – „Pôjdem na Floridu.“, v – „Vyhrám v lotérii.“. Potom danému výroku odpovedá formula $(p \wedge f) \Leftrightarrow l$.

k) Označme: p – c, r – „Obraz namaľoval Renoir.“. Potom danému výroku odpovedá formula $\neg p \wedge \neg r$.

l) Označme: f – „Dám facku.“, o – „Oklameš ma.“. Potom danému výroku odpovedá formula $o \Rightarrow f$.

m) Označme: k – „Počasie bude krásne.“, p – „Pokazí sa auto.“, v – „Pôjdeme na výlet.“, o – „Budeme sa kúpať.“. Potom danému výroku odpovedá formula $(k \wedge \neg p) \Rightarrow (v \wedge u)$.

2.2 Sémantika výrokovej logiky

V sémantike výrokovej logiky budeme skúmať pravdivostnú hodnotu zloženého výroku v závislosti na pravdivostných hodnotách jeho zložiek. Budeme vytvátať tabuľku pravdivostných hodnôt, v ktorej ohodnotíme výrokové premenné vyskytujúce sa vo formule, nájdeme pravdivostné ohodnotenie podformúl danej formuly a nakoniec samotnej formuly.

Definícia 2.2.1 ***(Pravdivostné) ohodnotenie*** *u* ***výrokových premenných*** *je priradenie hodnoty 0 alebo 1 každej z týchto výrokových premenných.*

„1“ budeme označovať pravdu a „0“ nepravdu.

Definícia 2.2.2 *Nech* $D = \{0, 1\}$*. Funkciu* $f : D^n \to D$ *nazývame* ***booleovská*** [3] ***funkcia*** *n premenných.*

Každá booleovská funkcia priradí n-tici núl a jednotiek hodnotu nula alebo jedna.

Príklad 2.2.1 Existuje 16 rôznych booleovských funkcií dvoch premenných:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1

Jednotlivé funkcie môžeme zapísať takto:

$$
\begin{array}{llll}
f_1 = x & f_5 = x \wedge y & f_9 = x \vee y & f_{13} = x \wedge \neg x \\
f_2 = y & f_6 = x \wedge \neg y & f_{10} = x \vee \neg y & f_{14} = x \vee \neg x \\
f_3 = \neg x & f_7 = \neg x \wedge y & f_{11} = \neg x \vee y & f_{15} = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \\
f_4 = \neg y & f_8 = \neg x \wedge \neg y & f_{12} = \neg x \vee \neg y & f_{16} = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)
\end{array}
$$

Funkcia f_3 reprezentuje logickú spojku negáciu, funkcia f_9 reprezentuje disjunkciu, funkcia f_5 konjunkciu, funkcia f_{11} implikáciu a funkcia f_{16} ekvivalenciu.

Definujme ďalšie binárne logické spojky:

Definícia 2.2.3

- ***Shefferova*** [4] ***operácia****, označujeme ju symbolom* $\uparrow$
  $x \uparrow y$ *je vyjadriteľná formulou* $\neg(x \wedge y)$*, (t. j. „Neplatí súčasne* x *aj* y*.“),*
- ***Peirceova*** [5] ***operácia****, označujeme ju symbolom* $\downarrow$
  $x \downarrow y$ *je vyjadriteľná formulou* $\neg(x \vee y)$*, (t. j. „Ani* x *ani* y*.“),*
- ***vylučovacia operácia****, označujeme ju symbolom* $\oplus$
  $x \oplus y$ *je vyjadriteľná formulou* $\neg(x \Leftrightarrow y)$*, (t. j. „Buď* x *alebo* y*.“).*

[3] George Boole - anglický matematik a logik
[4] Henry Maurice Sheffer - americký logik
[5] Charles Sanders Peirce - americký filozof a logik

V predchádzajúcom príklade booleovské funkcie f_{12}, f_8 a f_{15} postupne reprezentujú binárne spojky $\uparrow$, $\downarrow$ a $\oplus$.

O každej formule výrokovej logiky vieme povedať, či je pravdivá alebo nepravdivá na základe nasledujúcich pravidiel:

- $\neg\alpha$ je pravdivá práve vtedy, keď výroková formula α je nepravdivá,
- $\alpha \wedge \beta$ je pravdivá práve vtedy, keď súčasne obe výrokové formuly α aj β sú pravdivé,
- $\alpha \vee \beta$ je nepravdivá práve vtedy, keď súčasne α aj β sú nepravdivé,
- $\alpha \Rightarrow \beta$ je nepravdivá práve vtedy, keď α je pravdivá a β nepravdivá,
- $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je pravdivá práve vtedy, keď obe α aj β sú pravdivé alebo obe α aj β sú nepravdivé.

Definícia 2.2.4 ***Pravdivostná hodnota*** $u(\alpha)$ ***výrokovej formuly*** α *pri ohodnotení u výrokových premenných je priradenie hodnoty 0 alebo 1 pre formulu* α *v súlade s predchádzajúcimi pravidlami.*

Ohodnotením všetkých výrokových premenných, ktoré sa vo formule vyskytujú, je jednoznačne určená pravdivostná hodnota celej formuly. Vlastnosti pravdivostných ohodnôt formúl zapisujeme pomocou **tabuliek pravdivostných hodnôt**, ktoré zaviedol Charles Sanders Peirce.

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Uvedomme si, že slovo „alebo“ má v bežnom jazyku dva rôzne významy. Ak disjunkcia nemá vylučovací význam, tak disjunkcia dvoch výrokov je pravdivá práve vtedy, keď aspoň jeden výrok je pravdivý. Vo vylučovacom význame disjunkcia dvoch výrokov je pravdivá práve vtedy, keď jeden výrok je pravdivý a druhý je nepravdivý. Vo vete „Zákazníci, ktorí sú učitelia alebo študenti, majú 50% zľavu.“ ani učitelia ani študenti nie sú vylúčení zo získania zľavy. Naproti tomu, vo vete „Zajtra večer budem doma alebo pôjdem do divadla.“ vylučujeme, že môžeme byť zajtra večer na oboch miestach.

V matematickej logike používame „alebo“ vo význame, ktorý nie je vylučovací.

V bežnom jazyku sa môžeme vyhnúť použitiu slova „alebo“, ak máme na mysli jeho vylučovací význam, použitím slov „buď ... alebo ...“.

V bežnom jazyku spájame dva výroky slovom „alebo“, ak medzi nimi existuje obsahová súvislosť. Ten, kto nepozná matematickú logiku pravdepodobne by vetu „Mám chrípku alebo medzi Košicami a Prešovom je diaľnica.“ nepovažoval za zmysluplnú, a už vôbec nie za pravdivý výrok. Bežne používame disjunkciu vtedy, keď vieme, že jeden z výrokov je pravdivý, len nie sme si istí, ktorý. Povieme: „Skúška z matematickej logiky je 26. alebo 27. mája.“ No nepovieme „Trávnik je zelený alebo modrý.“, lebo vieme určite, že je zelený.

V bežnom jazyku spájame dva výroky slovami „ak ..., tak ...“ tiež, iba ak medzi nimi existuje obsahová súvislosť. Všimnime si, že implikácia $\alpha \Rightarrow \beta$ je nepravdivá len v jedinom prípade. A to, ak predpoklad (formula α) je pravdivá a záver (formula β) je nepravdivá. Majme nasledujúce štyri výroky:

„Ak 2+2=4, tak Vianoce sú v decembri.“

„Ak 2+2=5, tak Vianoce sú v decembri.“

„Ak 2+2=4, tak Vianoce nie sú v decembri.“

„Ak 2+2=5, tak Vianoce nie sú v decembri.“

V bežnom jazyku by sme nepokladali predchádzajúce výroky za zmysluplné, nie to ešte za pravdivé. Z hľadiska matematickej logiky sú všetky zmysluplné, pričom tretí je nepravdivý a ostatné sú pravdivé. Ale aj v bežnom jazyku sú prípustné výnimky. Ak poviem priateľovi: „Ak vyriešiš tento problém, tak ja zjem klobúk.“, vyjadrujem svoje presvedčenie, že on problém nevyrieši.

Uvedomme si, že ak poviem „Ak zajtra bude pršať, tak sa budem učiť.“ a druhý deň vonku prší a ja sa neučím, tak som klamal; ak prší a ja sa učím, tak som hovoril pravdu; ak svieti slniečko, tak môžem robiť čokoľvek a vždy som hovoril pravdu, pretože o tom, čo budem robiť, keď bude pekne, som nič netvrdil.

Definícia 2.2.5 *Ak $u(\alpha) = 1$ hovoríme, že formula α je **pravdivá** pri ohodnotení u výrokových premenných. Ak $u(\alpha) = 0$ hovoríme, že formula α je **nepravdivá** pri ohodnotení u výrokových premenných.*

Definícia 2.2.6 *Formula sa nazýva **tautológia** (označujeme $\boldsymbol{T}$) práve vtedy, keď je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných. Formula sa nazýva **kontradikcia** (označujeme $\boldsymbol{F}$) práve vtedy, keď je nepravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných.*

V predchádzajúcom príklade booleovská funkcia f_{14} reprezentuje tautológiu $\boldsymbol{T}$ a booleovská funkcia f_{13} kontradikciu $\boldsymbol{F}$. Kontradikcie sú negácie tautológii.

Definícia 2.2.7 ***Formula** sa nazýva **splniteľná** práve vtedy, keď existuje ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je formula pravdivá. **Systém formúl** $\mathcal{S}$ sa nazýva **splniteľný** práve vtedy, keď existuje také ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula systému $\mathcal{S}$. Ak **systém formúl** $\mathcal{S}$ nie je splniteľný, nazýva sa **nesplniteľný**.*

Príklad 2.2.2 Rozhodnime, či formula $(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \neg x)$ je tautológia, kontradikcia alebo splniteľná formula.

Riešenie: Pre danú formulu vytvorme tabuľku pravdivostných hodnôt, v ktorej každý riadok odpovedá jednému jednému ohodnoteniu dvojice výrokových premenných x, y a v každom políčku tejto tabuľky sa nachádza pravdivostná hodnota formuly uvedenej na začiatku príslušného stĺpca pri ohodnotení výrokových premenných v príslušnom riadku. Existujú štyri rôzne ohodnotenia dvojice výrokových premenných x, y, teda tabuľka má štyri riadky. Vo všeobecnosti, tabuľka pravdivostných hodnôt formuly obsahujúcej n výrokových premenných má 2^n riadkov.

x	y	$y \Rightarrow x$	$y \vee \neg x$	$(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \neg x)$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Keďže existuje ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je daná formula pravdivá, ale tiež existuje ohodnotenie, pri ktorom je nepravdivá, tak formula je splniteľná, ale nie je tautológia. $\square$

Príklad 2.2.3 Johnson, Middleton a Smith sú podozriví z vraždy. Pod prísahou svedčili takto:

- Johnson: „Middleton je vinný a Smith je nevinný.“
- Middleton: „Ak je vinný Johnson, tak je vinný aj Smith.“
- Smith: „Ja som nevinný, ale najmenej jeden z ostatných je vinný.“

Kto je vinný?

Riešenie: Označme výrokovými premennými j, m, s postupne výroky „Johnson je vinný.“, „Middleton je vinný.“, „Smith je vinný.“. Výpovede všetkých troch podozrivých zapíšeme pomocou nasledujúcich formúl výrokovej logiky: $m \wedge \neg s$, $j \Rightarrow s$, $\neg s \wedge (j \vee m)$. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt zistíme, či tieto výrokové formule, ktoré odpovedajú daným výpovediam troch podozrivých, tvoria splniteľný systém formúl.

j	m	s	$m \wedge \neg s$	$j \Rightarrow s$	$\neg s \wedge (j \vee m)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0

Všetky formuly vytvorené z výpovedí podozrivých sú pravdivé v treťom riadku, v ktorom je ohodnotenie výrokových premenných $u(j) = 0,\ u(m) = 1,\ u(s) = 0$. Teda vinný je iba Middleton. $\square$

Na určenie pravdivostných hodnôt výrokovej formuly môžeme používať okrem tabuľky pravdivostných hodnôt aj **binomický strom**. Výrokové premenné sú postupne nahradené konštantami nula a jedna, pre ktoré môže byť formula zjednodušená až na poslednú konštantu, ktorá určuje pravdivostnú hodnotu formuly.

Príklad 2.2.4 Pomocou binomického stromu overme, že formula $(x \Rightarrow y) \vee$ $\vee((y \wedge \neg z) \Leftrightarrow y)$ je tautológiou.

Riešenie: Načrtneme binomický strom pre danú formulu.

$$(x \Rightarrow y) \vee ((y \wedge \neg z) \Leftrightarrow y)$$

$y = 1$:

$$(x \Rightarrow 1) \vee ((1 \wedge \neg z) \Leftrightarrow 1)$$
$$1 \vee (\neg z \Leftrightarrow 1)$$
$$1$$

$y = 0$:

$$(x \Rightarrow 0) \vee ((0 \wedge \neg z) \Leftrightarrow 0)$$
$$(x \Rightarrow 0) \vee (0 \Leftrightarrow 0)$$
$$(x \Rightarrow 0) \vee 1$$
$$1$$

Teda ľavá aj pravá vetva ukazujú, že pravdivostná hodnota formuly $(x \Rightarrow y) \vee$ $\vee((y \wedge \neg z) \Leftrightarrow y)$ je 1 v prípade, že y nahradíme 1 a aj v prípade, že y nahradíme 0 pre ľubovoľné pravdivostné ohodnotenie výrokových premenných x a z. Teda táto formula je tautológiou. $\square$

Zaujíma nás, či nejaká formula vyplýva z daného systému formúl. Uveďme príklad. Majme nasledujúce dva výroky. „Ak je slnečný deň, tak mám dobrú náladu.“ a „Je slnečný deň.“ Ak sú oba výroky pravdivé, je pravdivý aj výrok „Mám dobrú náladu.“ Označme výrokovou premennou p elementárny výrok „Je slnečný deň.“ a výrokovou premennou q výrok „Mám dobrú náladu.“ Potom predchádzajúce tvrdenie môžeme nahradiť tvrdením, že ak sú pravdivé formuly $p \Rightarrow q$ a p, tak je pravdivá aj formula q.

Definícia 2.2.8 *Hovoríme, že formula φ je* ***sémantickým dôsledkom*** *systému formúl $\mathcal{S}$ (**vyplýva** zo systému formúl $\mathcal{S}$) práve vtedy, keď je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$. Zapisujeme $\mathcal{S} \models \varphi$.*

Definícia 2.2.9 *Hovoríme, že systém formúl $\mathcal{F}$ je* ***sémantickým dôsledkom*** *systému formúl $\mathcal{S}$ práve vtedy, keď všetky formuly zo systému $\mathcal{F}$ sú pravdivé pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$. Zapisujeme $\mathcal{S} \models \mathcal{F}$.*

Nech φ, ψ sú formuly výrokovej logiky, a nech $\mathcal{S} \models \varphi$. Ak systém formúl $\mathcal{S}$ je jednoprvkový resp. neobsahuje žiaden prvok, pre jednoduchosť budeme zapisovať:

- $\psi \models \varphi$ namiesto $\{\psi\} \models \varphi$,
- $\models \varphi$ namiesto $\emptyset \models \varphi$.

Platí: $\{\varphi_1,\ \varphi_2, \cdots,\ \varphi_k\} \models \psi$ práve vtedy, keď $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \wedge \neg\psi$ je kontradikcia.

Príklad 2.2.5 Doplňme množinu predpokladov tak, aby uvedený záver vyplýval z množiny predpokladov.
Predpoklady:

- Podozrivý je vinný práve vtedy, keď 1. januára tohto roku bol o deviatej hodine ráno v Košiciach.
- Bolo zistené, že podozrivý bol o deviatej ráno uvedeného dňa v Poprade.
- ?

Záver: Podozrivý je nevinný.

Riešenie: Zaveďme nasledujúce označenia: „Podozrivý je vinný.“ výrokovou premennou v, „Podozrivý bol 1. januára tohto roku o deviatej hodine ráno v Košiciach.“ výrokovou premennou k, „Podozrivý bol 1. januára tohto roku o deviatej hodine ráno v Poprade.“ výrokovou premennou p.

Potom predpoklady zapíšeme množinou $\{v \Leftrightarrow k,\ p,\ ?\}$ a záver formulou $\neg v$. Teda ide o nasledujúce vyplývanie $\{v \Leftrightarrow k,\ p,\ ?\} \models \neg v$.

v	k	p	$v \Leftrightarrow k$	$\neg v$		$p \Rightarrow \neg k$
0	0	0	1	1		1
0	0	1	1	1		1
0	1	0	0	1		1
0	1	1	0	1		0
1	0	0	0	0		1
1	0	1	0	0		1
1	1	0	1	0		1
1	1	1	1	0		0

Na základe definície 2.2.8, z tejto tabuľky pravdivostných hodnôt vidíme, že $\neg v$ nie je sémantickým dôsledkom množiny formúl $\{v \Leftrightarrow k,\ p\}$, nakoľko pri ohodnotení výrokových premenných v poslednom riadku tabuľky sú formuly $\{v \Leftrightarrow k,\ p\}$ pravdivé, ale formula $\neg v$ nie. Takže k predpokladom chceme pridať takú formulu, ktorá nadobúda v tomto ohodnotení výrokových premenných pravdivostnú hodnotu 1 a pri ohodnotení výrokových premenných v druhom riadku, pravdivostnú hodnotu 1. Pridajme do tejto množiny namiesto otáznika napríklad formulu $p \Rightarrow \neg k$, ktorej odpovedá výrok „Ak bol podozrivý 1. januára tohto roku o deviatej hodine ráno v Poprade, tak podozrivý nebol 1. januára tohto roku o deviatej hodine ráno v Košiciach.“. Z doplnenej tabuľky pravdivostných hodnôt vidíme, že platí $\{v \Leftrightarrow k,\ p,\ p \Rightarrow \neg k\} \models \neg v$. □

Veta 2.2.1 *Ak $\mathcal{S}$ je systém formúl a $\varphi \in \mathcal{S}$, tak $\mathcal{S} \models \varphi$.*

Dôkaz: Ak existuje pravdivostné ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$, tak pre toto ohodnotenie výrokových premenných je pravdivá aj formula φ. □

Veta 2.2.2 *Tautológia je sémantickým dôsledkom každého systému formúl $\mathcal{S}$.*

Dôkaz: Neexistuje ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom by bola pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$ a tautológia nie, keďže tautológia je formula pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných. $\square$

Veta 2.2.3 *Formula φ je tautológia práve vtedy, keď $\models \varphi$.*

Dôkaz: Vzhľadom na predchádzajuce tvrdenie stačí ukázať, že ak $\models \varphi$, tak φ je tautológia. Nech φ nie je tautológia. Potom existuje také ohodnotenie u výrokových premenných, že $u(\varphi) = 0$. Ale keďže pri tomto ohodnotení výrokových premenných sú všetky formuly z prázdnej množiny pravdivé a súčasne $u(\varphi) = 0$, teda neplatí $\models \varphi$. $\square$

Veta 2.2.4 *Každá formula je sémantickým dôsledkom systému formúl $\mathcal{S} = \{\varphi, \neg\varphi\}$.*

Dôkaz: Nech ψ je ľubovoľná formula. Keby ψ nebola sémantickýn dôsledkom systému $\mathcal{S}$, tak by existovalo pravdivostné ohodnotenie u výrokových premenných, pri ktorom je každá formula z $\mathcal{S}$ pravdivá a formula ψ je nepravdivá. Ale to nemôže nastať, keďže formuly φ a $\neg\varphi$ nemôžu byť pravdivé súčasne. $\square$

Veta 2.2.5 *Pre ľubovoľné systémy formúl $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ platí*

a) ak $\mathcal{S}$ je podsystém systému $\mathcal{T}$, tak $\mathcal{T} \models \mathcal{S}$,

b) ak $\mathcal{T} \models \mathcal{S}$ a $\mathcal{S} \models \mathcal{R}$, tak $\mathcal{T} \models \mathcal{R}$.

Veta 2.2.6 *Pre ľubovoľný systém formúl $\mathcal{S}$ a formulu φ platí*

$$\mathcal{S} \models \varphi \quad \textit{práve vtedy, keď množina} \quad \mathcal{S} \cup \{\neg\varphi\} \quad \textit{je nesplniteľná.}$$

Dôkaz: Nech platí $\mathcal{S} \models \varphi$. Potom pre každé ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula z $\mathcal{S}$, je pravdivá aj formula φ. Teda pri tomto ohodnotení výrokových premenných je formula $\neg\varphi$ nepravdivá. Teda $\mathcal{S} \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplniteľná.

Teraz predpokladajme, že $\mathcal{S} \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplniteľná. Potom pre každé ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula z $\mathcal{S}$, je formula $\neg\varphi$ nepravdivá. Teda formula φ je pravdivá. Potom platí $\mathcal{S} \models \varphi$. $\square$

Príklad 2.2.6 Ukážme, že z daných predpokladov vyplýva záver.
Predpoklady:

- Ján je učiteľ.
- Neplatí, že Ján je učiteľ a zároveň je bohatý.
- Ak Ján je majiteľ prosperujúcej firmy, je bohatý.

Záver: Ján nie je majiteľ prosperujúcej firmy.

Riešenie: Označme výrok „Ján je učiteľ." výrokovou premennou x, „Ján je bohatý." výrokovou premennou y a výrok „Ján je majiteľ prosperujúcej firmy." výrokovou premennou z. Potom predpoklady môžeme zapísať množinou formúl $\{x,\ \neg(x\wedge \wedge\, y),\ z \Rightarrow y\}$ a záver formulou $\neg z$. Podľa vety 2.2.6 musíme ukázať, že množina formúl $\{x,\ \neg(x \wedge y),\ z \Rightarrow y,\ z\}$ je nesplniteľná. Vytvorme tabuľku pravdivostných hodnôt.

x	y	z	$\neg(x \wedge y)$	$z \Rightarrow y$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Keďže neexistuje pravdivostné ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom by bola každá formula z uvedenej množiny pravdivá, táto množina je nesplniteľná. Teda na základe vety 2.2.6 platí $\{x,\ \neg(x \wedge y),\ z \Rightarrow y\} \models \neg z$. $\square$

Veta 2.2.7 *Pre ľubovoľný systém formúl $\mathcal{S}$ a pre ľubovoľné formuly φ a ψ platí*

$$\mathcal{S} \cup \{\varphi\} \models \psi \text{ práve vtedy, keď } \mathcal{S} \models \varphi \Rightarrow \psi.$$

Dôkaz: Nech platí $\mathcal{S} \cup \{\varphi\} \models \psi$. Majme ohodnotenie u výrokovych premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula z $\mathcal{S}$. Ak $u(\varphi) = 0$, tak $u(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$. Ak $u(\varphi) = 1$, tak každá formula z $\mathcal{S} \cup \{\varphi\}$ je pravdivá, a teda aj formula ψ, opäť $u(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$. Dostávame $\mathcal{S} \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Teraz predpokladajme, že $\mathcal{S} \models \varphi \Rightarrow \psi$. Majme ohodnotenie v výrokovych premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula z $\mathcal{S} \cup \{\varphi\}$. Pri tomto ohodnotení je pravdivá každá formula z $\mathcal{S}$, teda aj formula $\varphi \Rightarrow \psi$. Keďže $v(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$ a $v(\varphi) = 1$, tak $v(\psi) = 1$. Teda $\mathcal{S} \cup \{\varphi\} \models \psi$. $\square$

Definícia 2.2.10 *Hovoríme, že formuly φ a ψ sú* ***sémanticky ekvivalentné*** *práve vtedy, keď $\varphi \models \psi$ a zároveň $\psi \models \varphi$. Zapisujeme $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$.*

Platí, že formuly φ a ψ sú sémanticky ekvivalentné práve vtedy, keď pre každé ohodnotenie u výrokových premenných platí $u(\varphi) = u(\psi)$.

Veta 2.2.8 *Pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky φ a ψ platí*

$$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi \text{ práve vtedy, keď } \varphi \Leftrightarrow \psi \text{ je tautológia.}$$

Veta 2.2.9 *Pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ platí*

1. *Idempotentnosť konjunkcie a disjunkcie*
   $\alpha \wedge \alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \alpha, \qquad \alpha \vee \alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \alpha,$

2. *Komutatívnosť konjunkcie a disjunkcie*
   $\alpha \wedge \beta \;\models\!\!\!\dashv\; \beta \wedge \alpha, \qquad \alpha \vee \beta \;\models\!\!\!\dashv\; \beta \vee \alpha,$

3. *Asociatívnosť konjunkcie a disjunkcie*
   $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \;\models\!\!\!\dashv\; (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma, \qquad \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \;\models\!\!\!\dashv\; (\alpha \vee \beta) \vee \gamma,$

4. *Absorpcia konjunkcie a disjunkcie*
   $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \;\models\!\!\!\dashv\; \alpha, \qquad \alpha \vee (\beta \wedge \alpha) \;\models\!\!\!\dashv\; \alpha,$

5. *Zákon dvojitej negácie*
   $\neg\neg\alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \alpha,$

6. *De Morganovo pravidlo pre konjunkciu a disjunkciu*
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \;\models\!\!\!\dashv\; (\neg\alpha \vee \neg\beta), \qquad \neg(\alpha \vee \beta) \;\models\!\!\!\dashv\; (\neg\alpha \wedge \neg\beta),$

7. *Distributívnosť konjunkcie a disjunkcie*
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \;\models\!\!\!\dashv\; (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), \qquad \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \;\models\!\!\!\dashv\; (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma),$

8. *Zákon nahradenia implikácie*
   $\alpha \Rightarrow \beta \;\models\!\!\!\dashv\; \neg\alpha \vee \beta.$

Ak naviac $\boldsymbol{T}$ *je ľubovoľná tautológia a* $\boldsymbol{F}$ *je ľubovoľná kontradikcia, tak platí*

9. $\boldsymbol{T} \wedge \alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \alpha, \qquad \boldsymbol{F} \wedge \alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \boldsymbol{F},$

10. $\boldsymbol{T} \vee \alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \boldsymbol{T}, \qquad \boldsymbol{F} \vee \alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \alpha,$

11. $\alpha \wedge \neg\alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \boldsymbol{F}, \qquad \alpha \vee \neg\alpha \;\models\!\!\!\dashv\; \boldsymbol{T}.$

Platnosť všetkých týchto zákonov môžeme ukázať pomocou tabuliek pravdivostných hodnôt.

Poznámka: Keďže pre logické spojky $\wedge$ a $\vee$ platia asociatívne zákony, v ďalšom budeme vynechávať zátvorky pre viac ako dva členy v konjunkcii resp. disjunkcii.

Úlohy

2.3 Jedná sa o tautológie?

a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$,

b) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$,

c) $(\neg y \Rightarrow \neg x) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$.

2.4 Určte, či dané formuly sú tautológie, kontradikcie alebo splniteľné formuly:

a) $((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)) \Leftrightarrow ((\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y))$,

b) $((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \wedge y) \Rightarrow z)$,

c) $((x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$,

d) $((x \vee y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow (\neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg z)$,

e) $(x \Leftrightarrow y) \wedge (x \Leftrightarrow z) \wedge (y \Leftrightarrow z)$,

f) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Leftrightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$.

2.5 Pri ktorých pravdivostných ohodnoteniach u výrokových premenných je formula

a) $x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ nepravdivá,

b) $x \wedge (y \Rightarrow (z \vee x))$ pravdivá.

2.6 Z definície určte, či daná množina formúl M je splniteľná:

a) $M = \{x \vee \neg y,\ y \Leftrightarrow \neg x,\ y \Rightarrow x\}$,

b) $M = \{(x \wedge y) \Rightarrow z,\ (x \wedge \neg y) \Rightarrow z,\ x \Rightarrow z\}$,

c) $M = \{x \wedge y,\ \neg x \vee \neg y\}$,

d) $M = \{x \wedge y,\ x \Rightarrow z,\ x \Leftrightarrow \neg y\}$,

e) $M = \{x \vee \neg y,\ y \wedge \neg x,\ y \Rightarrow x\}$,

f) $M = \{(x \vee y) \Rightarrow z,\ (x \wedge \neg y) \Rightarrow z,\ x \Rightarrow z\}$,

g) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z,\ x \Leftrightarrow \neg z,\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \neg y \wedge z\}$,

h) $M = \{x \wedge y,\ x \Rightarrow z,\ x \Leftrightarrow \neg y,\ x \vee z\}$.

2.7 Rozhodnite, či platí $M \models \alpha$:

a) $M = \{p \Rightarrow q,\ p \vee q\}, \quad \alpha :\ p \wedge q$,

b) $M = \{p \vee q,\ p \wedge q\}, \quad \alpha :\ p \Rightarrow q$,

c) $M = \{p \vee \neg q,\ \neg q \Leftrightarrow \neg r,\ \neg p \Rightarrow r\}, \quad \alpha :\ p \Rightarrow (q \wedge r)$,

d) $M = \{(p \wedge q) \Rightarrow r,\ \neg q \wedge \neg r,\ r \Rightarrow \neg p\}, \quad \alpha :\ q \Rightarrow p$,

e) $M = \{(\neg x \vee y) \wedge z,\ (x \vee y) \Rightarrow z,\ x \Leftrightarrow \neg z\}, \quad \alpha :\ y \Rightarrow x$,

f) $M = \{z \Rightarrow \neg x,\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \neg y \wedge \neg z\}, \quad \alpha :\ y \Rightarrow x$,

g) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z,\ x \Leftrightarrow \neg z,\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \neg y \wedge z\}, \quad \alpha :\ (x \vee y) \Rightarrow z$,

h) $M = \{x \Rightarrow (y \wedge z),\ x \Leftrightarrow y,\ \neg x \vee (y \Rightarrow z)\}, \quad \alpha :\ \neg y \wedge \neg x$,

i) $M = \{p \vee \neg q,\ p \Rightarrow q\}, \quad \alpha :\ p \Leftrightarrow q$,

j) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z,\ x \Leftrightarrow \neg z,\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \neg y \wedge z\}, \quad \alpha :\ (x \vee y) \Rightarrow z$,

k) $M = \{x \Rightarrow y,\ \neg y \vee z,\ \neg x \wedge \neg y\}, \quad \alpha :\ y \Leftrightarrow z$,

l) $M = \{x \wedge y,\ x \Rightarrow z,\ x \Leftrightarrow \neg y,\ x \vee z\}, \quad \alpha:\ x \Leftrightarrow z,$

m) $M = \{z \Rightarrow \neg x,\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \neg y \wedge \neg z\}, \quad \alpha:\ y \Leftrightarrow x.$

2.8 Preformulujte nasledujúce vety do formúl výrokovej logiky a rozhodnite, či formula pod čiarou je sémantickým dôsledkom formúl nad čiarou:

a) Mrzne a nesneží.
Ak sneží, tak svieti slnko.

Mrzne alebo nesvieti slnko.

b) Nie je pravda, že Anka vie spievať aj tancovať.
Anka nevie spievať.

Anka vie tancovať.

c) Peter má vodičský preukaz, ale nemá auto.
Peter ide do práce, ak má auto.

Peter má vodičský preukaz alebo nepôjde do práce.

d) Ak je pod mrakom a nezoberiem si dáždnik, zmoknem.
Nezoberiem si dáždnik.

Zmoknem.

e) Nebudem sa učiť.
Budem sa iba hrať.
Ak sa budem iba hrať, budem hlúpy.

Ak sa nebudem učiť, budem hlúpy.

f) Ak prečítam sto kníh a nebudem múdry, nepôjdem na vysokú školu.

Ak prečítam sto kníh a budem múdry, pôjdem na vysokú školu.

g) Nie je pravda, že Jano hrá futbal aj hokej.
Jano nehrá futbal.

Jano hrá hokej.

h) Je deň alebo noc.
Ak je deň, na ulici nesvietia lampy.

Ak na ulici svietia lampy, je noc.

i) Ak mám skúšku, oblečiem si oblek,
ale ak idem do školy na cvičenie, oblečiem si rifle.
Buď mám skúšku alebo idem do školy na cvičenie.
Ak si oblečiem oblek, neoblečiem si rifle,
a ak idem do školy na cvičenie, neoblečiem si oblek.

Oblečiem si rifle.

j) Ak prší a vezmem si dáždnik, nezmoknem.
Vezmem si dáždnik.

Nezmoknem.

k) Nebude pršať.
Spadnem do potoka.
Keď spadnem do potoka, budem mokrý.
___
Keď nebude pršať, budem mokrý.

l) Ak nespím, pracujem, ale keď spím, som v posteli.
Pracujem alebo som v posteli.
___
Som v posteli.

2.9 Zistite, či z daných predpokladov vyplýva uvedený záver:

a) Keď sa ohliadol, uvidel ju.
Uvidel ju.
___
Ohliadol sa.

b) Keď sa ohliadol, uvidel ju.
Neuvidel ju.
___
Neohliadol sa.

c) Keď sa ohliadol, uvidel ju.
Neohliadol sa.
___
Neuvidel ju.

d) Keď sa ohliadol, uvidel ju.
Ohliadol sa.
___
Neuvidel ju.

2.10 Doplňte predpoklad (rôzny od záveru) tak, aby úvaha bola správna:

a) Ak sneží, zle sa jazdí.
Ak sa zle jazdí, budem meškať.
?
___
Budem meškať.

b) Ak ma máš rád, pôjdeš dnes so mnou do divadla.
Divadlo dnes nehrá.
?
___
Nemáš ma rád.

2.11 Pomocou binomického stromu určte, či formuly sú tautológie alebo kontradikcie:

a) $p \Rightarrow (p \wedge q)$,

b) $(p \Leftrightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$,

c) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$.

2.12 Štyri priateľky sa rozhodli, že pôjdu na kávu. Nakoľko boli rozhádané, začali si klásť nasledujúce podmienky na spoločníčky:

- Xénia: „Pôjdem, ak nepôjde Zara a pôjde Yvona a pôjdem práve vtedy, keď nepôjde Tamara.“
- Yvona: „Pôjdem, ak nepôjde Tamara alebo pôjdem, ak pôjde Xénia.“
- Zara: „Ak pôjdem, musí ísť Xénia a Yvona.“
- Tamara: „Ak nepôjde Yvona a pôjde Zara, tak pôjdem.“

Určte, v akom zložení môžu ísť na kávu, aby podmienky každej ženy boli splnené.

2.13 Do predajne majú priviezť tovar. Vedúci pozná isté obmedzenia, ktoré charakterizuje takto:

- Ak privezú mlieko a neprivezú zeleninu, tak neprivezú ani pečivo.
- Mlieko privezú, ak privezú pečivo a neprivezú zeleninu.
- Určite privezú aspoň dva druhy tovaru.

Určte, akým spôsobom sa môže rozvoz realizovať.

Výsledky

2.3 a) áno, b) áno, c) áno.

2.4 a) kontradikcia, b) tautológia, c) splniteľná formula. d) splniteľná formula, e) splniteľná formula, f) tautológia.

2.5 a) $u(x) = 1,\ u(y) = 0$,

b) $u(x) = 1,\ u(y)$ aj $u(z)$ je ľubovoľné.

2.6 a) áno, b) áno, c) nie, d) nie, e) nie, f) áno, g) áno, h) nie.

2.7 a) neplatí, b) platí, c) neplatí, d) platí, e) neplatí, f) platí, g) neplatí, h) neplatí, i) platí, j) platí, k) neplatí, l) platí, m) neplatí.

2.8 a) Označme: m – „Mrzne.“, s – „Sneží.“, k – „Svieti slnko.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $m \wedge \neg s,\ s \Rightarrow k$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $m \vee \neg k$. Tento sémantický dôsledok platí.

b) Označme: s – „Anka vie spievať.“, t – „Anka vie tancovať.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $\neg(s \wedge t),\ \neg s$ a výroku pod čiarou odpovedá formula t. Tento sémantický dôsledok neplatí.

c) Označme: v – „Peter má vodičský preukaz.“, a – „Peter má auto.“, p – „Peter ide do práce.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $v \wedge \neg a,\ a \Rightarrow p$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $v \vee \neg p$. Tento sémantický dôsledok platí.

d) Označme q – „Zoberiem dáždnik.“, r – „Zmoknem.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{(p \wedge \neg q) \Rightarrow r,\ \neg q\} \models r$. Neplatí.

e) Označme p – „Budem sa učiť.“, q – „Budem ssa iba hrať.“, r – „Budem hlúpy.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{\neg p,\ q,\ q \Rightarrow r\} \models (\neg p \Rightarrow r)$. Platí.

f) Označme p – „Prečítam sto kníh.“, q – „Budem múdry.“, r – „Pôjdem na vysokú školu.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r\} \models ((p \wedge q) \Rightarrow r)$. Neplatí.

g) Označme p – „Jano hrá futbal.“, q – „Jano hrá hokej.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{\neg(p \wedge q),\ \neg p\} \models q$. Neplatí.

h) Označme p – „Je deň.“, q – „Je noc.“, r – „Svietia lampy.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{p \vee q,\ p \Rightarrow \neg r\} \models (r \Rightarrow q)$. Platí.

i) Označme p – „Mám skúšku.“, q – „Oblečiem si oblek.“, r – „Idem na cvičenie.“, s – „Oblečiem si rifle.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s),\ p \vee r,\ (q \Rightarrow \neg s) \wedge (r \Rightarrow \neg q)\} \models s$. Neplatí.

j) Označme: p – „Prší.“, d – „Vezmem si dáždnik.“, z – „Zmoknem.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $(p \wedge d) \Rightarrow \neg z,\ d$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $\neg z$. Tento sémantický dôsledok neplatí.

k) Označme: p – „Bude pršať.“, s – „Spadnem do potoka.“, m – „Budem mokrý.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $\neg p,\ s,\ s \Rightarrow m$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $\neg p \Rightarrow m$. Tento sémantický dôsledok platí.

l) Označme: p – „Pracujem.“, s – „Spím.“, q – „Som v posteli.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $(\neg s \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow q),\ p \vee q$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $q \vee \neg s$. Tento sémantický dôsledok neplatí.

2.9 a) nie, b) áno, c) nie, d) nie.

2.10 a) Odídem skoro ráno a nebude sa zle jazdiť.

b) Ak dnes pôjdeš so mnou do divadla, tak určite dnes divadlo hrá.

2.11 a) nie je ani tautológia ani kontradikcia,

b) kontradikcia,

c) nie je ani tautológia ani kontradikcia.

2.12 Označme: z – „Zara pôjde.“, y – „Yvona pôjde.“, t – „Tamara pôjde.“, x – „Xénia pôjde.“. Systém formúl $M = \{((\neg z \wedge y) \Rightarrow x) \wedge (x \Leftrightarrow t),\ (\neg t \Rightarrow y) \vee \vee (x \Rightarrow t),\ z \Rightarrow (x \wedge y),\ (\neg y \wedge z) \Rightarrow t$ je splniteľný. Formuly z tejto množiny sú pravdivé v 3 ohodnoteniach výrokových premenných, ktorým odpovedajú vety:

- pôjde Tamara,
- pôjdu všetky okrem Tamary,

- pôjde iba Xénia s Yvonou.

2.13 Označme: m – „Privezú mlieko.“, z – „Privezú zeleninu.“, p – „Privezú pečivo.“. Systém formúl $M = \{(m \wedge \neg z) \Rightarrow \neg p,\ (p \wedge \neg z) \Rightarrow m,\ (m \wedge z) \vee (m \wedge p) \vee \vee (p \wedge z)\}$ je splniteľný. Formuly z tejto množiny sú pravdivé v 3 ohodnoteniach výrokových premenných, ktorým odpovedajú vety:

- privezú zeleninu a pečivo a neprivezú mlieko,
- privezú zeleninu a mlieko a neprivezú pečivo,
- privezú všetky tri druhy tovaru.

2.3 Úplné systémy logických spojok

Poznáme päť základných typov logických spojok, a to negáciu, konjunkciu, disjunkciu, implikáciu a ekvivalenciu. Okrem nich sme v predchádzajúcej kapitole zaviedli ďalšie tri, a to Shefferovu operáciu, Peirceovu operáciu a vylučovaciu operáciu. V tejto kapitole nás budú zaujímať najmenšie množiny logických spojok, pomocou ktorých vieme realizovať všetky booleovské funkcie odpovedajúce formulám výrokovej logiky. Vieme, že každá výroková formula predstavuje booleovskú funkciu. Dve formuly sú sémanticky ekvivalentné práve vtedy, keď predstavujú rovnakú booleovskú funkciu. Pokiaľ v nejakej formule nahradíme jej podformulu formulou s ňou sémanticky ekvivalentnou, tak získaná formula bude sémanticky ekvivalentná s pôvodnou formulou. Uveďme príklad.

Príklad 2.3.1 Majme formulu $\alpha = (\neg x \Leftrightarrow y) \vee \neg(z \wedge \neg y)$. Jej podformula $\varphi = = \neg x \Leftrightarrow y$ je sémanticky ekvivalentná s formulou $\psi = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$. Nahradením podformuly φ formulou ψ vo formule α, získame formulu $\beta = = ((x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee \neg(z \wedge \neg y)$, ktorá je s formulou α sémanticky ekvivalentná a obsahuje iba tri rôzne logické spojky. Vo formule α sme nahradili logickú spojku $\Leftrightarrow$ logickými spojkami $\wedge, \vee, \neg$ využitím sémanticky ekvivalentných formúl $x \Leftrightarrow y \models\!\!\!\dashv (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ a $x \Rightarrow y \models\!\!\!\dashv \neg x \vee y$.

Je zrejmé, že nielen pre danú formulu, ale pre ľubovoľnú výrokovú formulu, vieme nájsť výrokovú formulu, ktorá je s ňou sémanticky ekvivalentná a obsahuje iba logické spojky $\wedge, \vee, \neg$. Zaujíma nás, ktoré iné množiny logických spojok Δ majú tú vlastnosť, že pre ľubovoľnú výrokovú formulu vieme nájsť formulu s ňou sémanticky ekvivalentnú, obsahujúcu iba logické spojky z množiny Δ.

Definícia 2.3.1 *Hovoríme, že množina logických spojok Δ tvorí **úplný systém logických spojok** práve vtedy, keď pre každú formulu α existuje formula β taká, že $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$ a formula β obsahuje iba logické spojky z množiny Δ.*

Množina $\Delta = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow\}$ tvorí úplný systém logických spojok. Existujú aj iné množiny, ktoré tvoria úplné systémy logických spojok. Na to, aby sme dokázali, že nejaká množina logických spojok tvorí úplný systém logických spojok, stačí formuly obsahujúce logické spojky nejakého známeho úplného systému logických spojok nahradiť sémanticky ekvivalentnými formulami obsahujúcimi iba logické spojky nového systému logických spojok. Ukážeme, že aj množina $\Delta_1 = \{\neg, \wedge\}$ tvorí úplný systém logických spojok. Stačí nájsť formuly sémanticky ekvivalentné s formulami $\neg x$, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \Rightarrow y$, $x \Leftrightarrow y$ používajúce iba negáciu a konjunkciu.

- $x \vee y \;\Dashv\vDash\; \neg(\neg x \wedge \neg y)$,
- $x \Rightarrow y \;\Dashv\vDash\; \neg x \vee y \;\Dashv\vDash\; \neg(x \wedge \neg y)$,
- $x \Leftrightarrow y \;\Dashv\vDash\; (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \;\Dashv\vDash\; \neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(y \wedge \neg x)$.

Teda $\Delta_1 = \{\neg, \wedge\}$ tvorí úplný systém logických spojok.

Obdobne vieme ukázať, že aj množina $\Delta_2 = \{\neg, \vee\}$ tvorí úplný systém logických spojok.

- $x \wedge y \;\Dashv\vDash\; \neg(\neg x \vee \neg y)$,
- $x \Rightarrow y \;\Dashv\vDash\; \neg x \vee y$,
- $x \Leftrightarrow y \;\Dashv\vDash\; (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \;\Dashv\vDash\; (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \wedge x) \;\Dashv\vDash\; \neg(\neg((\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \wedge x)$.

Na základe príkladu zo začiatku kapitoly, aj množina $\Delta_3 = \{\neg, \wedge, \vee\}$ tvorí úplný systém logických spojok.

Uvedieme ďalšie príklady množín, ktoré tvoria úplné systémy logických spojok:

1. $\Delta_4 = \{\neg, \Rightarrow\}$

   $x \wedge y \;\Dashv\vDash\; \neg(x \Rightarrow \neg y)$,
   $x \vee y \;\Dashv\vDash\; \neg x \Rightarrow y$,
   $x \Leftrightarrow y \;\Dashv\vDash\; (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \;\Dashv\vDash\; \neg((x \Rightarrow y) \Rightarrow \neg(y \Rightarrow x))$.

2. $\Delta_5 = \{\uparrow\}$

   $\neg x \;\Dashv\vDash\; \neg(x \wedge x) \;\Dashv\vDash\; x \uparrow x$,
   $x \wedge y \;\Dashv\vDash\; \neg\neg(x \wedge y) \;\Dashv\vDash\; \neg(x \uparrow y) \;\Dashv\vDash\; (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$.
   Keďže Δ_1 tvorí úplný systém logických spojok, aj Δ_5 tvorí úplný systém logických spojok.

Teda existuje aj jednoprvková množina, ktorá tvorí úplný systém logických spojok.

Na druhej strane, ak chceme o nejakej množine ukázať, že netvorí úplný systém logických spojok, stačí ukázať, že niektorá z formúl $\neg x$, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \Rightarrow y$, $x \Leftrightarrow y$ sa nedá vyjadriť pomocou spojok z danej množiny.

Uvedieme príklad množiny, ktorá netvorí úplný systém logických spojok.

Príklad 2.3.2 Množina $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ netvorí úplný systém logických spojok.

Riešenie: Ukážeme, že neexistuje formula φ výrokovo ekvivalentná s $\neg x$ obsahujúca iba logické spojky z množiny $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Ak by taká formula existovala, tak pre ľubovoľné pravdivostné ohodnotenie u výrokových premenných by platilo $u(\varphi) = u(\neg x)$. Majme pravdivostné ohodnotenie v výrokových premenných, v ktorom sú všetky výrokové premenné pravdivé. Teda $v(x) = 1$. Ale ak y je výroková premenná, tak aj $v(y) = 1$. Potom $v(x \wedge y) = v(x \vee y) = v(x \Rightarrow y) = v(x \Leftrightarrow y) = 1$. Ale keďže $v(\neg x) = 0$, tak φ nie je sémanticky ekvivalentná s $\neg x$. $\square$

Úlohy

2.14 Ukážte, že daná množina tvorí úplný systém logických spojok:

a) $\{\Rightarrow, \oplus\}$,

b) $\{\vee, \Leftrightarrow, \oplus\}$,

c) $\{\wedge, \Leftrightarrow, \oplus\}$,

d) $\{\downarrow\}$.

2.15 Ukážte, že množina $\{\wedge, \vee, \oplus\}$ netvorí úplný systém logických spojok:

2.16 Napíšte formulu, ktorá obsahuje iba logické spojky $\Rightarrow, \boldsymbol{F}$ a je sémanticky ekvivalentná s tautológiou $\boldsymbol{T}$.

Výsledky

2.14 Keďže množiny $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$ tvoria úplné systémy logických spojok, stačí pre množiny v a) – d) nájsť formulu sémanticky ekvivalentnú s $\neg x$, ktorá používa iba logické spojky z danej množiny.

a) $\neg x \models\!\!\!\dashv x \Leftrightarrow (x \oplus x)$,

b) $\neg x \models\!\!\!\dashv x \Leftrightarrow (x \oplus x)$,

c) $\neg x \models\!\!\!\dashv x \Rightarrow (x \oplus x)$,

d) $\neg x \models\!\!\!\dashv x \downarrow x$, $x \vee y \models\!\!\!\dashv (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$.

2.15 Stačí uvažovať pravdivostné ohodnotenie u výrokových premenných, pri ktorom sú všetky výrokové premenné nepravdivé. Potom všetky formuly obsahujúce iba logické spojky z danej množiny sú nepravdivé pri tomto ohodnotení výrokových premenných.

2.16 $\boldsymbol{T} \models\!\!\!\dashv \boldsymbol{F} \Rightarrow \boldsymbol{F}$.

2.4 Normálny konjunktívny a normálny disjunktívny tvar

Definícia 2.4.1 *Hovoríme, že formula φ, obsahujúca n premenných p_1, p_2, ..., p_n, je* ***realizáciou booleovskej funkcie*** *f n premenných ($n \in \mathbb{N}$) práve vtedy, keď pre každé ohodnotenie u výrokových premenných platí $u(\varphi) = f(u(p_1), u(p_2), \ldots, u(p_n))$.*

Je zrejmé, že dve formuly sú sémanticky ekvivalentné práve vtedy, keď sú realizáciou tej istej booleovskej funkcie.

Definícia 2.4.2 ***Literálom*** *l nazývame logickú premennú alebo negáciu logickej premennej.* ***Elementárnou disjunkciou*** *nazývame disjunkciu literálov $l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$.* ***Elementárnou konjunkciou*** *nazývame konjunkciu literálov $l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$. Hovoríme, že formula je v* ***normálnom disjunktívnom tvare*** *(NDT) práve vtedy, keď je disjunkciou elementárnych konjunkcií. Hovoríme, že formula je v* ***normálnom konjunktívnom tvare*** *(NKT) práve vtedy, keď je konjunkciou elementárnych disjunkcií. Elementárnu disjunkciu nazývame tiež* ***klauzula*** *a normálny konjunktívny tvar nazývame* ***klauzulárny tvar****.*

Definícia 2.4.3 *Hovoríme, že formula α má* ***úplný normálny disjunktívny tvar*** *a formula β má* ***úplný normálny konjunktívny tvar*** *práve vtedy, keď α je v normálnom disjunktívnom tvare a β je konjunktívnom normálnom tvare, pričom každá elementárna konjunkcia v α a každá elementárna disjunkcia v β obsahuje všetky výrokové premenné danej formuly.*

Príklad 2.4.1 Napíšme v normálnom disjunktívnom tvare formulu

$$r \wedge (\neg p \Rightarrow (r \vee \neg q)).$$

Riešenie: $r \wedge \big(\neg p \Rightarrow (r \vee \neg q)\big) \models\!\!\dashv r \wedge \big(\neg\neg p \vee (r \vee \neg q)\big) \models\!\!\dashv r \wedge \big(p \vee (r \vee \neg q)\big) \models\!\!\dashv$
$\models\!\!\dashv \big(r \wedge p\big) \vee \big(r \wedge r\big) \vee \big(r \wedge \neg q\big) \models\!\!\dashv \big(r \wedge p\big) \vee r \vee \big(r \wedge \neg q\big).$ □

Príklad 2.4.2 Napíšme v klauzulárnom tvare formulu $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow r$.

Riešenie: $\big(p \wedge \neg q\big) \Leftrightarrow r \models\!\!\dashv \big((p \wedge \neg q) \Rightarrow r\big) \wedge \big(r \Rightarrow (p \wedge \neg q)\big) \models\!\!\dashv \big(\neg(p \wedge \neg q) \vee r\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg r \vee (p \wedge \neg q)\big) \models\!\!\dashv \big(\neg p \vee q \vee \big) \wedge \big(\neg r \vee p\big) \wedge \big(\neg r \vee \neg q\big).$ □

Veta 2.4.1 *Ku každej booleovskej funkcii f existuje formula v disjunktívnom normálnom tvare, ktorá je realizáciou funkcie f. Ku každej formule α existuje formula β, ktorá je v disjunktívnom normálnom tvare a platí $\alpha \models\!\!\dashv \beta$.*

Veta 2.4.2 *Ku každej booleovskej funkcii f existuje formula v normálnom konjunktívnom tvare, ktorá je realizáciou funkcie f. Ku každej formule α existuje formula β, ktorá je v normálnom konjunktívnom tvare a platí $\alpha \models\!\!\dashv \beta$.*

Príklad 2.4.3 Nájdime formulu v úplnom normálnom disjunktívnom tvare a formulu v úplnom normálnom konjunktívnom tvare, ktoré sú realizáciou booleovskej funkcie troch premenných $f(x, y, z)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v argumentoch (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0) (jedná sa o usporiadané trojice núl a jednotiek pre postupné ohodnotenie výrokových premenných x, y, z).

Riešenie: K takto danej booleovskej funkcii $f(x, y, z)$ môžeme napísať tabuľku pravdivostných hodnôt. Pre riadky, v ktorých booleovská funkcia $f(x, y, z)$ nadobúda hodnotu 1, napíšeme elementárne konjunkcie $\widetilde{x} \wedge \widetilde{y} \wedge \widetilde{z}$ a to tak, že

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x & \text{ak pravdivostné ohodnotenie u(x)=1} \\ \neg x & \text{ak pravdivostné ohodnotenie u(x)=0} \end{cases}$$

Rovnako postupujeme pre $\widetilde{y}$ aj $\widetilde{z}$.

Pre riadky, v ktorých nadobúda booleovská funkcia $f(x, y, z)$ hodnotu 0, napíšeme elementárne disjunkcie $\widetilde{x} \vee \widetilde{y} \vee \widetilde{z}$ a to tak, že

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x & \text{ak pravdivostné ohodnotenie u(x)=0} \\ \neg x & \text{ak pravdivostné ohodnotenie u(x)=1} \end{cases}$$

Rovnako postupujeme pre $\widetilde{y}$ aj $\widetilde{z}$.

x	y	z	$f(x, y, z)$	elementárna konjunkcia	elementárna disjunkcia
0	0	0	1	$\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$	
0	0	1	0		$x \vee y \vee \neg z$
0	1	0	1	$\neg x \wedge y \wedge \neg z$	
0	1	1	1	$\neg x \wedge y \wedge z$	
1	0	0	0		$\neg x \vee y \vee z$
1	0	1	0		$\neg x \vee y \vee \neg z$
1	1	0	0		$\neg x \vee \neg y \vee z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	

Disjunciou elementárnych konjunkcií dostaneme formulu $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$, ktorá je realizáciou booleovskej funkcie $f(x, y, z)$ a je v úplnom normálnom disjunktívnom tvare.

Konjunciou elementárnych disjunkcií dostaneme formulu $(x \vee y \vee \neg z) \wedge \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$, ktorá je realizáciou booleovskej funkcie $f(x, y, z)$ a je v úplnom normálnom konjunktívnom tvare. □

V ďalšom sa budeme zaoberať určením čo najjednoduchšieho normálneho tvaru formuly, ktorá je realizáciou danej booleovskej funkcie. K tomu budeme používať **Karnaughove mapy**. Ide o prehľadný zápis hodnôt príslušnej booleovskej funkcie (namiesto klasickej tabuľky pravdivostných hodnôt) do tabuľky typu 2×2, v prípade dvoch premenných, do tabuľky typu 2×4, v prípade troch premenných, do tabuľky typu 4×4, v prípade štyroch premenných, do dvoch tabuliek typu 4×4, v prípade piatich premenných a do štyroch tabuliek typu 4×4, v prípade šiestich premenných.

Platí, že dve susedné políčka v jednej tabuľke sa líšia v práve jednej zložke. Podobne aj dve tabuľky vedľa seba sa líšia práve v jednej zložke. Teda za susedné sú považované aj dva (štyri) krajné ľavé (pravé) stĺpce resp. riadky a tiež aj krajné (ľavý s pravým) stĺpce resp. riadky (horný a dolný) mapy. Z takto zapísanej booleovskej funkcie vieme pomerne jednoducho vyjadriť **minimálny disjunktívny tvar** (MDT) a **minimálny konjunktívny tvar** (MKT) booleovskej funkcie. Sú to normálne tvary formuly používajúce najmenší možný počet literálov, elementárnych konjunkcií a elementárnych disjunkcií.

Ako nájdeme minimálny disjunktívny resp. minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie? Najprv hodnoty booleovskej funkcie zapíšeme do príslušnej Karnaughovej mapy. Potom združovaním (krúžkovaním) jednotiek resp. núl určíme príslušné konjunkcie resp. disjunkcie. Uveďme postup pri združovaní jednotiek (pre združovanie núl platia rovnaké pravidlá). Združovanie robíme tak, aby vznikol obdĺžnik (kváder, ak je aspoň 5 premenných), ktorého každý rozmer je mocninou čísla 2 a obsahuje iba jednotky a to, maximálny možný počet. Každému jednému združovaniu odpovedá nejaká konjunkcia, ktorú vytvárame tak, ako sme to uviedli v predchádzajúcom príklade. Rozdiel je iba v tom, že tieto konjunkcie nemusia obsahovať všetky premenné. Čím viac jednotiek naraz združíme, tým menej literálov obsahuje konjunkcia prislúchajúca týmto združeným jednotkám. Samozrejme, môže sa stať, že sa nedá združiť viac ako jedna jednotka. V tomto združovaní je skrytý distributívny zákon. Napríklad jednoduchá disjunkcia $(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$ je sémanticky ekvivalentná s formulou x. V Karnaughovej mape pre booleovskú funkciu dvoch premenných by sme združili dve jednotky s políčkami odpovedajúcich dvojiciam 11 a 10 a napísali by sme namiesto $(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$ formulu x. Združovanie robíme dovtedy, kým každá jednotka nie je niekde združená, ale tiež dbáme na to, aby počet takýchto združovaní bol minimálny. Nakoniec z takto získaných konjunkcií napíšeme minimálny disjunktívny tvar. Poznamenajme, že minimálne tvary nie sú jednoznačné.

Príklad 2.4.4 Nájdime minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie

a) $f(x, y, z)$ z predchádzajúceho príkladu,

b) $f(p, q, r)$, ktorá nadobúda hodnotu jedna iba v argumentoch (1,1,1) a (0,0,1),

c) $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu nula iba v argumentoch (0,0,1,0), (1,0,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1),

d) $f(p, q, r, s, t)$, ktorá nadobúda hodnotu nula iba v argumentoch (0,0,0,1,0), (1,0,1,1,0), (1,1,1,1,0), (0,1,0,1,0), (0,0,0,1,1), (0,1,0,1,1), (1,0,1,1,1), (1,0,0,1,1), (1,1,1,1,1), (1,1,0,1,1),

e) $f(p, q, r, s, t, u)$, ktorej hodnoty sú v Karnaughovej mape nižšie (v riešení tohto zadania).

Riešenie:

a) Najprv vyriešime túto úlohu tak, že pomocou sémanticky ekvivalentných formúl zjednodušíme najprv normálny konjunktívny tvar a potom normálny disjunktívny tvar danej formuly.

$(x \vee y \vee \neg z) \;\wedge\; (\neg x \vee y \vee z) \;\wedge\; (\neg x \vee y \vee \neg z) \;\wedge\; (\neg x \vee \neg y \vee z) \mathrel{\dashv\models}$
$\mathrel{\dashv\models} \big((y \vee \neg z) \;\vee\; (x \wedge \neg x)\big) \;\wedge\; \big((\neg x \vee z) \;\vee\; (y \wedge \neg y)\big) \mathrel{\dashv\models} \big((y \vee \neg z) \;\vee\; \boldsymbol{F}\big) \;\wedge$
$\wedge\; \big((\neg x \vee z) \;\vee\; \boldsymbol{F}\big) \mathrel{\dashv\models} \big(y \vee \neg z\big) \;\wedge\; \big(\neg x \vee z\big)$

Teda $\big(y \vee \neg z\big) \;\wedge\; \big(\neg x \vee z\big)$ je minimálny konjunktívny tvar danej booleovskej funkcie.

$(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \;\vee\; (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \;\vee\; (\neg x \wedge y \wedge z) \;\vee\; (x \wedge y \wedge z) \mathrel{\dashv\models}$
$\mathrel{\dashv\models} \big((\neg x \wedge \neg z) \;\wedge\; (\neg y \vee y)\big) \;\vee\; \big((y \wedge z) \;\wedge\; (\neg x \vee x)\big) \mathrel{\dashv\models} \big((\neg x \wedge \neg z) \;\wedge\; \boldsymbol{T}\big) \;\vee$
$\vee\; \big((y \wedge z) \;\wedge\; \boldsymbol{T}\big) \mathrel{\dashv\models} \big(\neg x \wedge \neg z\big) \;\vee\; \big(y \wedge z\big)$

Teda $\big(\neg x \wedge \neg z\big) \;\vee\; \big(y \wedge z\big)$ je minimálny disjunktívny tvar danej booleovskej funkcie.

Teraz riešme úlohu pomocou Karnaughovej mapy. Hodnoty booleovskej funkcie, ktoré sme v predchádzajúcom príklade zapísali do tabuľky pravdivostných hodnôt, teraz zapíšeme do Karnaughovej mapy. Najprv určíme združovaním núl, podľa predchádzajúceho postupu, minimálny konjunktívny tvar tejto booleovskej funkcie. Vytvoríme dva obdĺžniky rozmerov 1×2, ktorým odpovedajú disjunkcie $y \vee \neg z$ a $\neg x \vee z$.

		y	y, z	z
	000: 1	010: 1	011: 1	001: 0
x	100: 0	110: 0	111: 1	101: 0

Minimálny konjunktívny tvar je $\big(\neg x \vee z\big) \;\wedge\; \big(y \vee \neg z\big)$.

Teraz združovaním jednotiek určme minimálny disjunktívny tvar. Opäť vytvoríme dva obdĺžniky rozmerov 1×2, ktorým odpovedajú konjunkcie $\neg x \wedge \neg z$ a $y \wedge z$.

		y	y, z	z
	1	1	1	0
x	0	0	1	0

Minimálny disjunktívny tvar je $\big(\neg x \wedge \neg z\big) \;\vee\; \big(y \wedge z\big)$.

V predchádzajúcej Karnaughovej mape, a aj v nasledujúcich, budeme pri určovaní minimálnych konjunktívnych resp. disjunktívnych tvaroch rovnakou farbou označovať disjunkcie resp. konjunkcie a im odpovedajúce zakrúžkované oblasti v Karnaughovej mape. V b), v c) a v d) zapíšeme booleovské funkcie do príslušných Karnaughových máp a určíme minimálne disjunktívne a minimálne konjunktívne tvary pre dané booleovské funkcie. V e), keďže funkcia je daná v Karnaughovej mape, prvý krok vynechávame.

b)

		q	q, r	r
	0	0	0	1
p	0	0	1	0

		q	q, r	r
	0	0	0	1
p	0	0	1	0

Minimálny konjunktívny tvar je $(\neg p \vee q) \;\wedge\; (p \vee \neg q) \;\wedge\; r$.
Minimálny disjunktívny tvar je $(p \wedge q \wedge r) \;\vee\; (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$.

c)

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	1	1
10	0	0	0	0
11	0	1	1	0
01	1	1	1	1

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	1	1
10	0	0	0	0
11	0	1	1	0
01	1	1	1	1

Minimálny konjunktívny tvar je $(\neg p \vee q) \;\wedge\; (q \vee \neg r \vee s) \;\wedge\; (\neg p \vee r)$.
Minimálny disjunktívny tvar je $(\neg p \wedge \neg r) \;\vee\; (q \wedge r) \;\vee\; (\neg p \wedge s)$.

d)

t

0

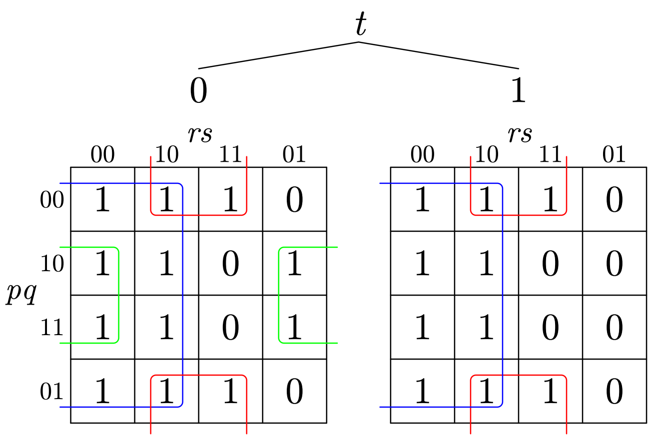
$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	1	1	0
10	1	1	0	1
11	1	1	0	1
01	1	1	1	0

1

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	1	1	0
10	1	1	0	0
11	1	1	0	0
01	1	1	1	0

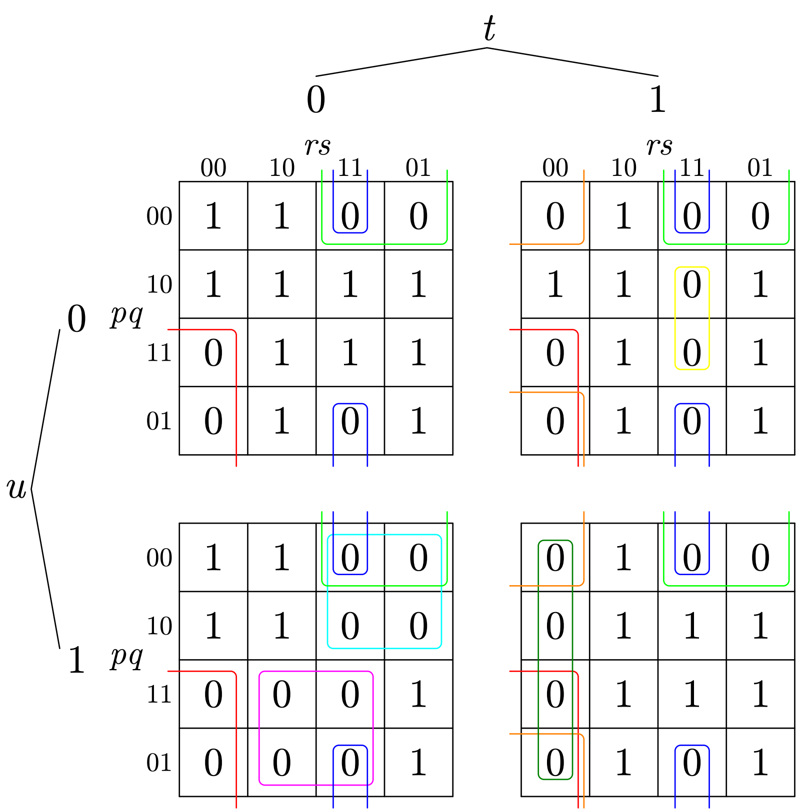
Minimálny konjunktívny tvar je $(\neg p \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (p \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$[6].

[6]Pri združovaní dvoch a dvoch núl v tretích stĺpcoch a v druhom a treťom riadku sme využili susednosť máp.

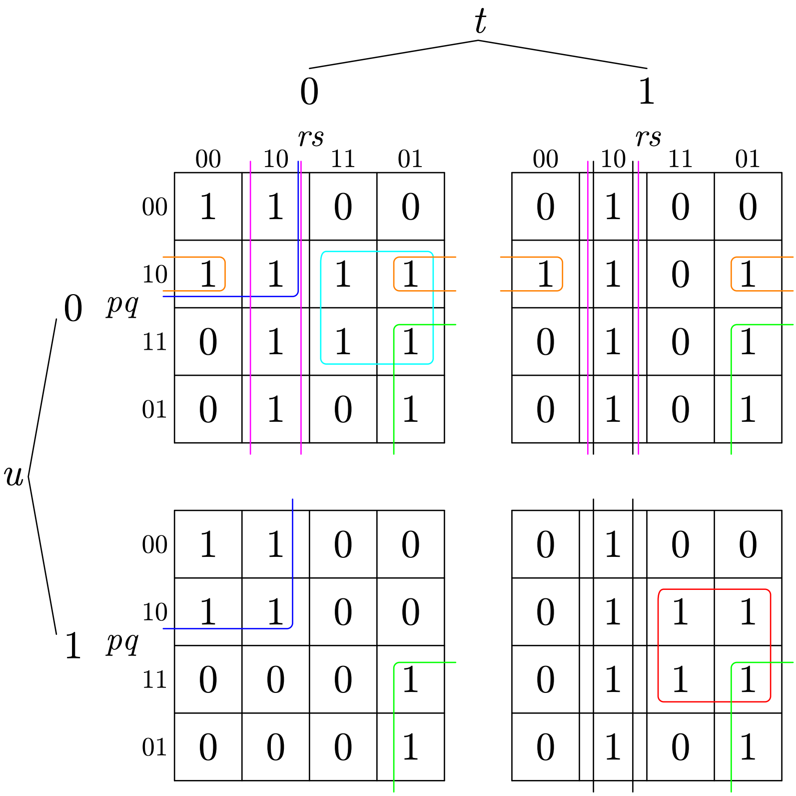


Minimálny disjunktívny tvar je $\neg s \;\vee\; (p \wedge \neg r \wedge \neg t) \;\vee\; (\neg p \wedge r)$.

e)



Minimálny konjunktívny tvar je $(r \vee s \vee \neg t \vee \neg u) \;\wedge\; (\neg q \vee \neg r \vee t \vee \neg u) \;\wedge$
$\wedge\; (p \vee \neg r \vee \neg s) \;\wedge\; (p \vee q \vee \neg s) \;\wedge\; (p \vee r \vee s \vee \neg t) \;\wedge\; (\neg q \vee r \vee s) \;\wedge$
$\wedge\; (q \vee \neg s \vee t \vee \neg u) \;\wedge\; (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t \vee u)$.



Minimálny disjunktívny tvar je $(r \wedge \neg s \wedge \neg u) \vee (r \wedge \neg s \wedge t) \vee (q \wedge \neg r \wedge s) \vee$
$\vee\ (p \wedge s \wedge t \wedge u) \vee (\neg q \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (p \wedge s \wedge \neg t \wedge \neg u) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg u)$. $\square$

Úlohy

2.17 Zistite, či dané formuly sú sémanticky ekvivalentné:

a) $((\neg x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \wedge z)$, $(\neg x \vee \neg z) \Rightarrow (\neg x \wedge \neg y)$,

b) $(x \Rightarrow y) \vee (z \Leftrightarrow \neg x)$, $z \Rightarrow (\neg x \vee y)$.

2.18 Nájdite formuly sémanticky ekvivalentné s formulami $f(x, y) = (\neg x \Rightarrow y) \wedge \neg(\neg x \wedge y)$, $g(x, y, z) = (x \vee y) \Rightarrow (\neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg z)$, $h(p, q, r, s) = (p \vee q \vee \neg r) \Rightarrow \neg s$ tak, aby obsahovali iba:

a) negácie a disjunkcie,

b) negácie a konjunkcie.

2.19 Nájdite úplný normálny disjunktívny tvar a úplný normálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie realizovanej formulou:

a) $(\neg x \Rightarrow y) \wedge x \wedge y \wedge (x \vee \neg y)$,

b) $z \wedge \big(\neg y \vee (\neg z \Rightarrow x)\big)$,

c) $(p \Rightarrow q) \wedge \big((\neg q \Rightarrow r) \vee \neg(p \wedge \neg r)\big)$,

d) $(p \vee q \vee \neg r) \Leftrightarrow \neg s$.

2.20 Nájdite minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar pre funkcie v predchádzajúcom príklade.

2.21 Nájdite úplný normálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie, ktorej úplný normálny konjunktívny tvar je:

a) $\big(x \vee \neg y \vee z\big) \ \wedge\ \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z\big) \ \wedge\ \big(\neg x \vee y \vee \neg z\big)$,

b) $\big(x \vee y \vee z\big) \ \wedge\ \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z\big) \ \wedge\ \big(\neg x \vee \neg y \vee z\big) \ \wedge\ \big(x \vee \neg y \vee \neg z\big)$,

c) $\big(\neg x \vee y \vee z\big) \ \wedge\ \big(x \vee \neg y \vee \neg z\big)$.

2.22 Nájdite úplný normálny konjuktívny tvar booleovskej funkcie, ktorej úplný normálny disjunktívny tvar je:

a) $\big(\neg x \wedge \neg y \wedge z\big) \ \vee\ \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z\big) \ \vee\ \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z\big) \ \vee\ \big(x \wedge y \wedge z\big)$,

b) $\big(x \wedge y \wedge \neg z\big) \ \vee\ \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z\big)$,

c) $\big(x \wedge \neg y \wedge \neg z\big) \ \vee\ \big(\neg x \wedge y \wedge z\big) \ \vee\ \big(x \wedge y \wedge z\big) \ \vee\ \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z\big)$.

2.23 Nech booleovská funkcia $f(x, y, z)$ je daná tabuľkou. Nájdite jej úplný normálny konjunktívny tvar a minimálny disjunktívny tvar.

x	y	z	f
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

2.24 Nájdite úplný normálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie realizovanej formulou φ a minimalizujte ho pomocou Karnaughovej mapy, ak formula φ je:

a) $((x \vee \neg z) \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \wedge z)$,

b) $(x \Leftrightarrow \neg y) \Rightarrow (z \wedge \neg x)$,

c) $\big(\big((\neg x \vee \neg y) \wedge z\big) \Leftrightarrow u\big) \Rightarrow (\neg x \wedge \neg u)$.

2.25 Nájdite úplný normálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie realizovanej formulou φ a minimalizujte ho pomocou Karnaughovej mapy, ak formula φ je:

a) $x \Leftrightarrow (y \Rightarrow (\neg x \vee z))$,

b) $(\neg x \Rightarrow y) \wedge \neg z$,

c) $(\neg x \wedge \neg(z \wedge \neg y)) \vee u$.

2.26 Nájdite minimálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v argumentoch (1,0,1,0), (0,0,0,1), (0,0,1,1), (1,1,0,0), (1,0,1,1), (0,0,0,0), (1,1,1,0).

2.27 Nájdite minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 1 iba v argumentoch (0,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1).

2.28 Nájdite minimálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(p, q, r, s, t)$, ktorá nadobúda hodnotu 1 len v argumentoch: (0,0,0,0,-), (1,1,1,1,-), (0,0,1,0,-), (1,0,1,1,0), (1,0,1,0,0), (1,0,0,1,0), (1,0,0,0,0), (1,1,0,1,-).

2.29 Nájdite minimálny konjunktívny tvar boolovskej funkcie $f(x, y, z, t, u)$, ktorá nadobúda hodnotu 1 len v argumentoch:

a) (0,0,0,0,-), (1,1,1,1,-), (0,0,1,0,-), (1,0,1,1,0), (1,0,1,0,0), (1,0,0,1,0), (1,0,0,0,0), (1,1,0,1,-),

b) (1,0,1,0,0), (1,1,1,0,-), (1,1,0,1,0), (0,0,1,0,1), (1,0,1,0,1), (0,1,0,1,0), (1,1,1,1,1), (1,0,0,1,0), (0,0,0,1,0), (0,0,1,1,0), (1,0,1,1,1),

c) (1,0,1,1,-), (1,0,1,0,-), (0,1,0,0,-), (0,1,1,1,-), (0,0,1,1,0), (0,0,1,0,0), (1,1,1,1,1),

d) (1,0,1,1,-), (1,1,0,0,-), (1,1,0,1,-), (0,1,0,1,0), (0,0,0,1,-), (0,0,1,1,-), (1,0,0,1,1), (1,0,1,0,1).

2.30 Nájdite minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(x, y, z, t)$, resp. $f(x, y, z, t, u)$ ktorá má úplný normálny disjunktívny tvar:

a) $\big(x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t\big) \vee \big(x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge z \wedge t\big) \vee$ $\vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t\big)$,

b) $\big(\neg x \wedge y \wedge z \wedge \neg t\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t\big) \vee$ $\vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t\big)$,

c) $\big(x \wedge y \wedge \neg z \wedge t\big) \vee \big(x \wedge y \wedge z \wedge t\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge z \wedge t\big) \vee$ $\vee \big(\neg x \wedge y \wedge z \wedge \neg t\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t\big)$,

d) $\big(x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t\big) \vee \big(x \wedge y \wedge \neg z \wedge t\big) \vee \big(x \wedge y \wedge z \wedge t\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t\big) \vee$ $\vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge z \wedge t\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t\big) \vee \big(x \wedge y \wedge z \wedge \neg t\big)$,

e) $\big(x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t \wedge u\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t \wedge \neg u\big) \vee \big(x \wedge y \wedge \neg z \wedge t \wedge \neg u\big) \vee$
$\vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t \wedge u\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge z \wedge t \wedge \neg u\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t \wedge u\big) \vee$
$\vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t \wedge \neg u\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t \wedge \neg u\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t \wedge \neg u\big) \vee$
$\vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t \wedge u\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t \wedge u\big)$,

f) $\big(x \wedge y \wedge z \wedge \neg t \wedge u\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t \wedge u\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t \wedge u\big) \vee$
$\vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t \wedge u\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t \wedge \neg u\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge z \wedge \neg t \wedge u\big) \vee$
$\vee \big(x \wedge y \wedge \neg z \wedge t \wedge \neg u\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t \wedge \neg u\big) \vee \big(x \wedge y \wedge z \wedge \neg t \wedge \neg u\big) \vee$
$\vee \big(\neg x \wedge y \wedge z \wedge t \wedge u\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t \wedge \neg u\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t \wedge u\big)$,

g) $\big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t \wedge \neg u\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t \wedge u\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t \wedge u\big) \vee$
$\vee \big(x \wedge y \wedge z \wedge t \wedge u\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t \wedge \neg u\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge z \wedge \neg t \wedge u\big) \vee$
$\vee \big(x \wedge y \wedge \neg z \wedge t \wedge \neg u\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t \wedge \neg u\big) \vee \big(x \wedge y \wedge z \wedge \neg t \wedge \neg u\big) \vee$
$\vee \big(\neg x \wedge y \wedge z \wedge t \wedge u\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t \wedge u\big)$.

2.31 Nájdite minimálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(x, y, z, t)$, resp. $f(x, y, z, t, u)$ ktorá má úplný normálny konjunktívny tvar:

a) $\big(x \vee \neg y \vee z \vee \neg t\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee z \vee t\big) \wedge \big(x \vee y \vee z \vee \neg t\big) \wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee t\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee z \vee t\big) \wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg t\big)$,

b) $\big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee t\big) \wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee t\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge$
$\wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee t\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee t\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee \neg t\big)$,

c) $\big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee t\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee t\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee t\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee t\big)$,

d) $\big(\neg x \vee y \vee z \vee t \vee u\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee t \vee u\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee \neg t \vee u\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee z \vee t \vee u\big) \wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee t \vee u\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee \neg t \vee u\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee t \vee \neg u\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee t \vee \neg u\big) \wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee z \vee t \vee \neg u\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee t \vee \neg u\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee t \vee \neg u\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee t \vee \neg u\big) \wedge$
$\wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee \neg t \vee \neg u\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee \neg t \vee \neg u\big)$,

e) $\big(x \vee y \vee z \vee t \vee u\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee z \vee t \vee u\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee t \vee u\big) \wedge$
$\wedge \big(x \vee y \vee z \vee \neg t \vee u\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee t \vee u\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee z \vee \neg t \vee u\big) \wedge$
$\wedge \big(x \vee y \vee z \vee t \vee \neg u\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee t \vee \neg u\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee z \vee t \vee \neg u\big) \wedge$
$\wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee t \vee \neg u\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg t \vee \neg u\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee \neg t \vee \neg u\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg t \vee \neg u\big) \wedge \big(\neg x \vee \neg y \vee z \vee \neg t \vee \neg u\big)$,

f) $\big(x \vee y \vee z \vee t\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee z \vee \neg t\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee t\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee \neg t\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee t\big)$,

g) $\big(\neg x \vee y \vee z \vee t\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee \neg t\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg t\big) \wedge \big(x \vee y \vee z \vee \neg t\big)$,

h) $\big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg t \vee u\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg t \vee u\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee z \vee \neg t \vee \neg u\big) \wedge$
$\wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg t \vee \neg u\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z \vee t \vee \neg u\big) \wedge \big(x \vee y \vee z \vee \neg t \vee \neg u\big) \wedge$
$\wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee \neg t \vee \neg u\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z \vee t \vee \neg u\big)$.

2.32 Nájdite minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(p,q,r,s,t,u)$, ktorá nadobúda hodnotu 1 len v argumentoch: (0,0,0,0,-,-), (1,1,1,1,1,-), (0,0,1,1,0,0), (1,0,1,1,1,-), (1,0,1,1,0,0), (1,0,0,1,0,1), (1,0,0,0,0,-), (1,1,0,1,-,1), (0,0,0,1,-,-), (1,1,0,0,0,-), (0,1,0,0,-,-), (1,1,1,1,0,0), (0,1,1,1,0,0), (0,1,0,1,-,-), (1,0,0,1,1,1).

Výsledky

2.17 a) nie, b) áno.

2.18 a) $f = \neg\big(\neg(x \vee y) \vee \neg(x \vee \neg y)\big)$, $g = \neg(x \vee y) \vee \neg\big(\neg(\neg x \vee y) \vee z\big)$, $h = \neg\big(p \vee q \vee \neg r\big) \vee \neg s$,

b) $f = \neg(\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg(\neg x \wedge y)$, $g = \neg\Big(\neg(\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg\big(\neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg z\big)\Big)$, $h = \neg(\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \wedge s)$.

2.19 a) $(x \wedge y)$, $(\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$,

b) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$, $(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$,

c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$, $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$,

d) $\big(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge\neg s\big) \vee \big(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\big) \vee \big(p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s\big) \vee \big(p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge\neg s\big) \vee$ $\vee \big(\neg p\wedge q\wedge r\wedge\neg s\big) \vee \big(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\big) \vee \big(\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\big) \vee \big(p\wedge q\wedge r\wedge\neg s\big)$, $\big(p\vee q\vee r\vee\neg s\big) \wedge \big(\neg p\vee\neg q\vee r\vee\neg s\big) \wedge \big(\neg p\vee q\vee\neg r\vee\neg s\big) \wedge \big(\neg p\vee q\vee r\vee\neg s\big) \wedge$ $\wedge \big(p\vee\neg q\vee\neg r\vee\neg s\big) \wedge \big(p\vee q\vee\neg r\vee s\big) \wedge \big(p\vee\neg q\vee r\vee\neg s\big) \wedge \big(\neg p\vee\neg q\vee\neg r\vee\neg s\big)$.

2.20 a) $x \wedge y$,

b) z,

c) $p \wedge \neg q$,

d) $(\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r \vee s)$, $(p \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg s) \vee$ $\vee (\neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s)$.

2.21 a) $\big(x\wedge y\wedge\neg z\big) \vee \big(x\wedge\neg y\wedge\neg z\big) \vee \big(\neg x\wedge y\wedge z\big) \vee \big(\neg x\wedge\neg y\wedge z\big) \vee \big(\neg x\wedge\neg y\wedge\neg z\big)$,

b) $\big(x \wedge \neg y \wedge z\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge \neg z\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z\big)$,

c) $\big(x \wedge y \wedge z\big) \vee \big(x \wedge y \wedge \neg z\big) \vee \big(x \wedge \neg y \wedge z\big) \vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge z\big) \vee$ $\vee \big(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z\big) \vee \big(\neg x \wedge y \wedge \neg z\big)$.

2.22 a) $\big(\neg x \vee \neg y \vee z\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z\big) \wedge \big(x \vee y \vee z\big)$,

b) $\big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee z\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z\big) \wedge$ $\wedge \big(x \vee \neg y \vee z\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z\big)$,

c) $\big(\neg x \vee \neg y \vee z\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z\big) \wedge \big(x \vee y \vee \neg z\big) \wedge \big(x \vee y \vee z\big)$.

2.23 $\big(\neg x \vee \neg y \vee \neg z\big) \wedge \big(\neg x \vee y \vee \neg z\big) \wedge \big(x \vee \neg y \vee \neg z\big)$,
$\big(\neg x \wedge \neg y\big) \vee \neg z$.

2.24 a) $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \ \vee \ (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \ \vee \ (x \wedge \neg y \wedge \neg z)$,
$(\neg y \wedge \neg z) \ \vee \ (\neg x \wedge \neg y)$,

b) $(x\wedge y\wedge \neg z) \vee (\neg x\wedge y\wedge z) \vee (\neg x\wedge \neg y\wedge \neg z) \vee (x\wedge y\wedge z) \vee (\neg x\wedge \neg y\wedge z)$,
$(x \wedge y) \ \vee \ (y \wedge z) \ \vee \ (\neg x \wedge \neg y)$,

c) $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg u) \ \vee \ (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge u) \ \vee \ (\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg u) \ \vee$
$\vee \ (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg u) \ \vee \ (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge u) \ \vee \ (\neg x \wedge y \wedge z \wedge \neg u) \ \vee$
$\vee \ (x\wedge \neg y\wedge \neg z\wedge u) \vee (x\wedge \neg y\wedge z\wedge \neg u) \vee (x\wedge y\wedge \neg z\wedge u) \vee (x\wedge y\wedge z\wedge u)$,
$(\neg x \wedge \neg z) \ \vee \ (\neg z \wedge u) \ \vee \ (\neg x \wedge \neg u) \ \vee \ (x \wedge y \wedge u) \ \vee \ (\neg y \wedge z \wedge \neg u)$.

2.25 a) $(x\vee y\vee z) \wedge (x\vee y\vee \neg z) \wedge (x\vee \neg y\vee z) \wedge (x\vee \neg y\vee \neg z) \wedge (\neg x\vee \neg y\vee z)$,
$x \ \wedge \ (\neg y \vee z)$,

b) $(x\vee y\vee z) \wedge (x\vee y\vee \neg z) \wedge (x\vee \neg y\vee \neg z) \wedge (\neg x\vee y\vee \neg z) \wedge (\neg x\vee \neg y\vee \neg z)$,
$(x \vee y) \ \wedge \ \neg z$,

c) $(\neg x \vee y \vee z \vee u) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg y \vee z \vee u) \ \wedge \ (\neg x \vee y \vee \neg z \vee u) \ \wedge$
$\wedge \ (\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee u) \ \wedge \ (x \vee y \vee \neg z \vee u)$,
$(\neg x \vee u) \ \wedge \ (y \vee \neg z \vee u)$.

2.26 $(\neg p \wedge r \wedge \neg s) \ \vee \ (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \ \vee \ (\neg p \wedge q) \ \vee \ (q \wedge s)$.

2.27 $(\neg p \vee r \vee \neg s) \ \wedge \ (\neg p \vee q) \ \wedge \ (p \vee s) \ \wedge \ (q \vee r)$.

2.28 $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \ \vee \ (p \wedge q \wedge s) \ \vee \ (p \wedge \neg q \wedge \neg t)$.

2.29 a) $(x \vee \neg t) \ \wedge \ (\neg y \vee t) \ \wedge \ (\neg x \vee y \vee \neg u)$,

b) $(z \vee \neg u) \ \wedge \ (x \vee \neg y \vee \neg t) \ \wedge \ (x \vee \neg t \vee \neg u) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z \vee \neg t \vee u) \ \wedge$
$\wedge \ (x \vee t \vee u) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg z \vee \neg t \vee u) \ \wedge \ (z \vee t)$,

c) $(\neg x \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg y \vee \neg u) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z \vee \neg t) \ \wedge \ (x \vee y \vee \neg u) \ \wedge$
$\wedge \ (y \vee z) \ \wedge \ (z \vee \neg t)$,

d) $(x \vee t) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z) \ \wedge \ (y \vee t \vee u) \ \wedge \ (x \vee \neg y \vee \neg u) \ \wedge \ (y \vee z \vee t) \ \wedge$
$\wedge \ (\neg x \vee y \vee z \vee u)$.

2.30 a) $(\neg y \vee \neg z) \ \wedge \ (x \vee t) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg t)$,

b) $(y \vee \neg z) \ \wedge \ (\neg z \vee \neg t) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg y)$,

c) $(y \vee \neg t) \ \wedge \ (z \vee t) \ \wedge \ (\neg x \vee t)$,

d) $(x \vee \neg z \vee t) \ \wedge \ (y \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee y)$,

e) $(x \vee \neg z \vee t) \ \wedge \ (\neg x \vee z \vee t) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg t \vee \neg u) \ \wedge \ (x \vee z \vee \neg t \vee u) \ \wedge$
$\wedge \ (\neg y \vee \neg t) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z)$,

f) $(\neg x\vee \neg z\vee \neg t) \wedge (\neg x\vee \neg t\vee \neg u) \wedge (y\vee t\vee \neg u) \wedge (x\vee u) \wedge (\neg x\vee \neg y\vee z\vee t)$,

g) $(\neg x \vee y \vee \neg u) \ \wedge \ (\neg z \vee \neg t \vee u) \ \wedge \ (x \vee y \vee t) \ \wedge \ (y \vee z \vee \neg t \vee \neg u) \ \wedge$
$\wedge \ (\neg y \vee z \vee t \vee u) \ \wedge \ (\neg x \vee z \vee \neg u) \ \wedge \ (\neg z \vee t \vee \neg u) \ \wedge \ (x \vee u)$.

2.31 a) $(\neg x \wedge z) \;\vee\; (\neg y \wedge \neg t) \;\vee\; (x \wedge \neg z \wedge t)$,

b) $(\neg x \wedge \neg z) \;\vee\; (y \wedge \neg z) \;\vee\; (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg t) \;\vee\; (x \wedge y \wedge t)$,

c) $\neg z \;\vee\; (x \wedge t) \;\vee\; (y \wedge t)$,

d) $(\neg x \wedge \neg z) \;\vee\; (\neg x \wedge \neg t \wedge \neg u) \;\vee\; (y \wedge t) \;\vee\; (x \wedge z \wedge t)$,

e) $(z \wedge t \wedge \neg u) \;\vee\; (\neg x \wedge t \wedge u) \;\vee\; (x \wedge \neg u) \;\vee\; (x \wedge \neg t)$,

f) $(x\wedge y) \vee (x\wedge\neg z\wedge\neg t) \vee (y\wedge\neg z\wedge\neg t) \vee (\neg x\wedge\neg y\wedge t) \vee (\neg x\wedge\neg y\wedge z)$,

g) $(\neg x \wedge \neg t) \;\vee\; (x \wedge y) \;\vee\; (y \wedge \neg z) \;\vee\; (z \wedge \neg t)$,

h) $(\neg z \wedge \neg u) \;\vee\; (\neg z \wedge \neg t) \;\vee\; (y \wedge u) \;\vee\; (\neg t \wedge \neg u) \;\vee\; (\neg y \wedge \neg u)$.

2.32 $(\neg p\wedge\neg r) \vee (p\wedge r\wedge s\wedge t) \vee (\neg r\wedge s\wedge u) \vee (\neg r\wedge\neg s\wedge\neg t) \vee (r\wedge\neg s\wedge\neg t\wedge\neg u)$,
$(\neg p\vee s\vee\neg t) \wedge (p\vee\neg r\vee\neg t) \wedge (\neg p\vee r\vee\neg s\vee u) \wedge (\neg r\vee t\vee\neg u) \wedge (\neg r\vee s)$.

2.5 Syntax výrokovej logiky

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali sémantikou výrokovej logiky, zaujímala nás pravdivostná hodnota formúl.

Najdôležitejším pojmom syntaxe je pojem dôkazu. Našou snahou je z tvrdení, ktoré prijmeme za správne, odvodiť (dokázať) ďalšie.

Uveďme si jednoduchý príklad. Majme nasledujúce výroky:

(1) „Ak bude v sobotu pršať, ostanem doma.“

(2) „Ak ostanem doma, umyjem auto.“

(3) „V sobotu bude pršať.“

Na základe tvrdení (1) a (3) odvodíme, že ostanem doma. Intuitívne totiž vieme, že „Ak prvé, tak druhé. Prvé. Teda aj druhé.“ A na základe tohto tvrdenia a tvrdenia (2) odvodíme, že umyjem auto.

V syntaxi výrokovej logiky budeme študovať jeden z viacerých odvodzovacích systémov, ktorý obsahuje dopredu prijaté pravdivé formuly nazývané axiómy (predpoklady) a odvodzovacie pravidlo. Tento odvodzovací systém nám dovolí odvodiť z danej množiny formúl ďalšie formuly.

Za **axiómy výrokovej logiky** vezmeme všetky formuly, ktoré majú niektorý z tvarov:

VL 1 $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

VL 2 $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta))$

VL 3 $(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

formuly φ, ψ, θ výrokovej logiky.

Keďže axiómy VL 1, VL 2 a VL 3 predstavujú iba schémy, ide vlastne o nekonečne veľa axióm konečne veľa typov.

Za **odvodzovacie pravidlo** vezmeme **modus ponens**, podľa ktorého z dvojice formúl φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ odvodíme formulu ψ.

Budeme to zapisovať nasledovne:

MP

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

Nad čiarou sú predpoklady a pod čiarou je záver.

Pokiaľ prijmeme tieto vyššie uvedené tri axiómy a odvodzovacie pravidlo modus ponens, tak vieme dokázať všetky tautológie výrokovej logiky.

Príklad 2.5.1 Rozhodnime, či v nasledujúcich príkladoch je správne použité odvodzovacie pravidlo modus ponens resp. doplňme chýbajúce časti viet tak, aby bolo správne použité:

a) Anka študuje medicínu.
Ak Anka študuje medicínu, musí sa veľa učiť.
___
Anka sa musí veľa učiť.

b) Ak Janko má 18 rokov, je dospelý.
Janko je dospelý.
___
Jablko má 18 rokov.

c) Marienka má dnes narodeniny.
Ak ..., mama upečie tortu.
___
......

d) ......
Ak je mrazivé počasie, ...
___
Nenaštartujem auto.

Riešenie:

a) Označme: s – „Anka študuje medicínu.“, u – „Anka sa musí veľa učiť.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly s, $s \Rightarrow u$ a výroku pod čiarou odpovedá formula u. Teda odvodzovacie pravidlo modus ponens je správne použité.

b) Označme: o – „Janko má 18 rokov.“, d – „Janko je dospelý.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $o \Rightarrow d$, d a výroku pod čiarou odpovedá formula o. Odvodzovacie pravidlo modus ponens nie je správne použité.

c) Označme: n – „Marienka má dnes narodeniny.“, t – „Mama upečie tortu.“. Ak vieme, že jednému výroku nad čiarou odpovedá formula n, tak druhým predpokladom v úvahe musí byť formula $n \Rightarrow t$ a záverom formula t, aby odvodzovacie pravidlo modus ponens bolo použité správne. Teda doplnením odpovedajúcich výrokov, dostaneme

Marienka má dnes narodeniny.
Ak *má Marienka dnes narodeniny*, mama upečie tortu.
___
Mama upečie tortu.

d) Označme m – „Je mrazivé počasie.“, n – „Naštartujem auto.“. Ak vieme, že výrok nad čiarou, ktorému odpovedá formula v tvare implikácie s predpokladom m a ak vieme, že výroku pod čiarou odpovedá formula $\neg n$, tak záverom implikácie musí byť formula $\neg n$ a druhým predpokladom v úvahe, pri správnom použití odvodzovacieho pravidla modus ponens, musí byť formula n. Teda doplnením odpovedajúcich výrokov, dostaneme

   Je mrazivé počasie.
   Ak je mrazivé počasie, *nenaštartujem auto.*
   ___
   Nenaštartujem auto. □

Definícia 2.5.1 *Ak použijeme odvodzovacie pravidlo práve raz na odvodenie formuly ψ z formúl $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, hovoríme, že formula ψ je* ***bezprostredným dôsledkom*** *formúl $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$.*

Definícia 2.5.2 *Nech $\mathcal{F}$ je ľubovoľný systém formúl výrokovej logiky.* ***Dôkazom*** *zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ nazývame takú postupnosť formúl φ_1, φ_2, …, φ_k výrokovej logiky, že pre každú formulu φ_i platí niektorá z možností:*

a) je axiómou výrokovej logiky,

b) je jedným z predpokladov systému $\mathcal{F}$,

c) je bezprostredným dôsledkom niektorých dvoch predchádzajúcich formúl postupnosti.

Definícia 2.5.3 *Formula φ sa nazýva* ***dokázateľná*** *zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ práve vtedy, keď existuje dôkaz zo systému predpokladov $\mathcal{F}$, ktorého posledným členom je formula φ. Zapisujeme $\mathcal{F} \vdash \varphi$.*

Definícia 2.5.4 *Formula φ sa nazýva* ***dokázateľná vo výrokovej logike*** *práve vtedy, keď je dokázateľná bez predpokladov. Zapisujeme $\vdash \varphi$.*

Definícia 2.5.5 *Formula ψ sa nazýva* ***vyvrátiteľná*** *zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ práve vtedy, keď jej negácia je dokázateľná zo systému predpokladov $\mathcal{F}$.*

Definícia 2.5.6 *Hovoríme, že systém formúl výrokovej logiky je* ***sporný*** *práve vtedy, keď je v ňom dokázateľná každá formula výrokovej logiky. Ak systém nie je sporný, hovoríme, že je* ***konzistentný****.*

Teraz si ukážeme platnosť niektorých ďalších odvodzovacích pravidiel, ktoré napomáhajú pri nájdení potrebných dôkazov.

Veta 2.5.1 (O tranzitívnosti implikácie) *Pre každý systém formúl $\mathcal{F}$ a pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky φ, ψ a θ platí*

$$Ak\ \mathcal{F} \vdash \varphi \Rightarrow \psi\ \ a\ \mathcal{F} \vdash \psi \Rightarrow \theta,\ \ tak\ \mathcal{F} \vdash \varphi \Rightarrow \theta.$$

Ak zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ je dokazateľná formula $\varphi \Rightarrow \psi$ a tiež formula $\psi \Rightarrow \theta$, tak zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ je dokazateľná aj formula $\varphi \Rightarrow \theta$.

Dôkaz: Dôkaz formuly $\varphi \Rightarrow \theta$ zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ získame spojením dôkazov formúl $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\psi \Rightarrow \theta$ zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ a pridaním postupnosti nasledujúcich formúl

1.	$\varphi \Rightarrow \psi$	predpoklad
2.	$\psi \Rightarrow \theta$	predpoklad
3.	$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \theta))$	VL 2
4.	$(\psi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta))$	VL 1
5.	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)$	MP(2,4)
6.	$((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta))$	MP(5,3)
7.	$\varphi \Rightarrow \theta$	MP(1,6)

□

Príklad 2.5.2 Rozhodnime, či v nasledujúcich príkladoch je správne použitá veta o tranzitívnosti implikácie resp. doplňme chýbajúce časti viet tak, aby bola správne použitá:

a) Ak bude pekne, pôjdem von.
Ak pôjdem von, budem hrať futbal.
―――
Ak bude pekne, budem hrať futbal.

b) Ak pracujem, zarábam.
Ak pracujem, som múdrejší.
―――
Ak zarábam, som múdrejší.

c) Ak ..., budem spokojný so svojim životom.
Ak ..., uvidím ako žijú ľudia inde.
―――
Ak budem veľa cestovať, budem spokojný so svojím životom.

d) Ak ráno zazvoní budík, ...
Ak vstanem,....
―――
Ak ..., zistím, aké je vonku počasie.

Riešenie:

a) Označme: p – „Bude pekne.“, v – „Pôjdem von.“, f – „Budem hrať futbal.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $p \Rightarrow v$, $v \Rightarrow f$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $p \Rightarrow f$. Teda veta 2.5.1 je použitá správne.

b) Označme: p – „Pracujem.“, z – „Zarábam.“, m – „Som múdrejší.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $p \Rightarrow z$, $p \Rightarrow m$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $z \Rightarrow m$. Veta 2.5.1 nie je použitá správne.

c) Označme: c – „Budem veľa cestovať.“, u – „Uvidím ako žijú ľudia inde.“, s – „Budem spokojný so svojím životom.“. Výrokom nad čiarou odpovedajú formuly v tvare implikácie, pričom ich závery sú formuly s a u a výroku pod čiarou odpovedá formula $c \Rightarrow s$. Ak má byť správne použitá veta 2.5.1, tak musíme doplniť formuly u a c do chýbajúcich predpokladov implikácii. Teda doplnením odpovedajúcich výrokov, dostaneme

Ak *uvidím ako žijú ľudia inde*, budem spokojný so svojim životom.
Ak *budem veľa cestovať*, uvidím ako žijú ľudia inde.

Ak budem veľa cestovať, budem spokojný so svojím životom.

d) Označme v – „Vstanem.“, z – „Ráno zazvoní budík.“, p – „Zistím, aké je vonku počasie.“. Výrokom nad čiarou odpovedajú formuly v tvare implikácie, pričom ich predpoklady sú formuly z a v a výroku pod čiarou odpovedá tiež formula v tvare implikácie, ktorej záver je formula p. Ak má byť správne použitá veta 2.5.1, tak musíme doplniť formuly v a p do chýbajúcich záverov implikácii a formulu z do chýbajúceho predpokladu. Teda doplnením odpovedajúcich výrokov, dostaneme

Ak ráno zazvoní budík, *vstanem.*
Ak vstanem, *zistím, aké je počasie.*

Ak *ráno zazvoní budík*, zistím, aké je vonku počasie. □

Veta 2.5.2 (Zákon Dunsa Scota [7]) *Pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky φ a ψ platí*

$$\vdash \neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi).$$

Ak prijmeme negáciu formuly φ, tak z predpokladu φ už vyplýva čokoľvek. Ak nie som doma, tak určite z predpokladu, že doma som, už vyplýva čokoľvek.

Dôkaz: Nasledujúca postupnosť formúl je dôkazom formuly $\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ zo systému predpokladov $\mathcal{F}$.

1.	$\neg\varphi \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	VL 1
2.	$(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$	VL 3
3.	$\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$	veta o tranzitívnosti implikácie

□

Dôsledok 2.5.1 *Systém formúl $\mathcal{F}$ je sporný práve vtedy, keď z $\mathcal{F}$ je dokázateľná nejaká formula φ a súčasne aj jej negácia $\neg\varphi$.*

Dôkaz: Ak systém formúl $\mathcal{F}$ je sporný, tak podľa definície 2.5.6, z $\mathcal{F}$ je dokázateľná každá formula. Teda aj formuly φ a $\neg\varphi$. Nech zo systému $\mathcal{F}$ je dokázateľná nejaká formula φ a súčasne aj jej negácia $\neg\varphi$.

Potom dôkaz odvodenia nejakej formuly ψ zo systému $\mathcal{F}$ získame pridaním postupnosti nasledujúcich formúl

[7] John Duns Scot - anglický teológ a logik

1.	φ	predpoklad
2.	$\neg\varphi$	predpoklad
3.	$\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$	zákon DS
4.	$(\varphi \Rightarrow \psi)$	MP (2,3)
5.	ψ	MP (1,4)

□

Pred uvedením ďalších viet poznamenajme, že ak $\mathcal{F}$ je systém formúl a φ je formula výrokovej logiky, tak pod zápisom $\mathcal{F},\ \varphi$ rozumieme systém formúl $\mathcal{F}$ rozšírený o formulu φ, t. j. $\mathcal{F} \cup \{\varphi\}$.

Nasledujúce odvodzovacie pravidlo je najdôležitejšie a najviac používané odvodzovacie pravidlo.

Veta 2.5.3 (O dedukcii) *Pre každý systém formúl $\mathcal{F}$ a pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky φ, ψ platí*

$$\mathcal{F},\ \varphi \vdash \psi \text{ práve vtedy, keď } \mathcal{F} \vdash \varphi \Rightarrow \psi.$$

Zo systému predpokladov $\mathcal{F},\ \varphi$ je dokazateľná formula ψ práve vtedy, keď zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ je dokazateľná formula $\varphi \Rightarrow \psi$. Princíp umožňuje z existencie dôkazu zo systému predpokladov $\mathcal{F},\ \varphi$ obsahujúcich formulu φ odvodiť existenciu dôkazu zo systému predpokladov $\mathcal{F}$, ktorý už formulu φ neobsahuje. A naopak.

Dôkaz: Nech $\mathcal{F} \vdash \varphi \Rightarrow \psi$. Teda existuje dôkaz formuly $\varphi \Rightarrow \psi$ zo systému predpokladov $\mathcal{F}$. K tomuto dôkazu pridáme formulu φ, čo je jeden z predpokladov systému $\mathcal{F}, \varphi$ a formulu ψ, ktorú získame použitím odvodzovacieho pravidla modus ponens na formuly $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ. Pridaním týchto dvoch formúl získame dôkaz formuly ψ zo systému predpokladov $\mathcal{F},\ \varphi$.

Nech $\mathcal{F},\ \varphi \vdash \psi$. Teda existuje dôkaz formuly ψ zo systému predpokladov $\mathcal{F},\ \varphi$. Nech týmto dôkazom je postupnosť formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, pričom φ_k je ψ. Matematickou indukciou ukážeme, že $\mathcal{F} \vdash \varphi \Rightarrow \varphi_i$. Rozoberieme jednotlivé možnosti, akými sa do dôkazu mohla dostať foormula φ_i.

i) Ak φ_i je axióma výrokovej logiky alebo jeden z predpokladov systému $\mathcal{F}$, tak postupnosť formúl

1.	φ_i	
2.	$\varphi_i \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi_i)$	VL1
3.	$\varphi \Rightarrow \varphi_i$	MP(1,2)

je dôkazom formuly $\varphi \Rightarrow \varphi_i$ zo systému predpokladov $\mathcal{F}$.

ii) Ak φ_i je formula φ, teda je jedným z predpokladov systému $\mathcal{F}, \varphi$, tak postupnosť formúl

1. $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$ VL1
2. $(\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi))$ VL2
3. $(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ MP(1,2)
4. $\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ VL1
5. $\varphi \Rightarrow \varphi$ MP(3,4)

je dôkazom formuly $\varphi \Rightarrow \varphi$.

iii) Ak φ_i je bezprostredným dôsledkom formúl φ_j a $\varphi_{j'}$, kde $j, j' < i$, tak formula $\varphi_{j'}$ je tvaru $\varphi_j \Rightarrow \varphi_i$. Podľa indukčného predpokladu, existujú dôkazy formúl $\varphi \Rightarrow \varphi_j$ a $\varphi \Rightarrow (\varphi_j \Rightarrow \varphi_i)$ zo systému predpokladov $\mathcal{F}$. Ak tieto dôkazy spojíme a pridáme k nim formuly

1. $\varphi \Rightarrow \varphi_j$ predchádzajúce
2. $\varphi \Rightarrow (\varphi_j \Rightarrow \varphi_i)$ predchádzajúce
3. $(\varphi \Rightarrow (\varphi_j \Rightarrow \varphi_i)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi_j) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi_i))$ VL2
4. $(\varphi \Rightarrow \varphi_j) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi_i)$ MP(2,3)
5. $(\varphi \Rightarrow \varphi_i)$ MP(1,4),

dostaneme dôkaz formuly $\varphi \Rightarrow \varphi_i$ zo systému predpokladov $\mathcal{F}$. □

Príklad 2.5.3 Použitím vety o dedukcii preformulujme nasledujúcu úvahu:

Viem anglicky.
Mám červený diplom.
―――――――――――――
Získam dobré zamestnanie.

Riešenie: Označme: x – „Viem anglicky.“, y – „Mám červený diplom.“, z – „Získam dobré zamestnanie.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly x, y a výroku pod čiarou odpovedá formula z, čo môžeme zapísať $\{x,\ y\} \vdash z$. Ak použijeme vetu 2.5.3, tak to môžeme prepísať dvoma spôsobmi:

a) $x \vdash y \Rightarrow z$, čomu odpovedá

Viem anglicky.
―――――――――――――
Ak mám červený diplom, získam dobré zamestnanie.

b) $y \vdash x \Rightarrow z$, čomu odpovedá

Mám červený diplom.
―――――――――――――
Ak viem anglicky, získam dobré zamestnanie. □

Použitím vety o dedukcii môžeme preformulovať **Zákon Dunsa Scota:** $\neg\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ resp. $\{\neg\varphi,\ \varphi\} \vdash \psi$, čo môžeme formulovať ako „z nemožného je dokazateľné čokoľvek“.

Príklad 2.5.4 Rozhodnime, či v nasledujúcich príkladoch je správne použitý zákon Dunsa Scota spolu s vetou o dedukcii resp. doplňme chýbajúce časti viet tak, aby bol správne použitý:

a) $\dfrac{\text{Nie je skúškové obdobie.}}{\text{Ak je skúškové obdobie, učím sa.}}$

b) $\dfrac{\text{Sú prázdniny.}}{\text{Ak \ldots, chodím do školy.}}$

c) $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Sneží.}\\ \text{Nesneží.}\end{array}}{\text{Na Marse nie je život.}}$

d) $\dfrac{\begin{array}{l}\ldots\ldots\\ \text{Jozef nemá rád špenát.}\end{array}}{\text{Korytnica je minerálna voda.}}$

Riešenie:

a) Označme: s – „Je skúškové obdobie.“, u – „Učím sa.“. Potom výroku nad čiarou odpovedá formula $\neg s$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $s \Rightarrow u$. Teda veta 2.5.2 spolu s vetou 2.5.3 je použitá správne.

b) Označme: p – „Sú prázdniny.“, s – „Chodím do školy.“. Potom výroku nad čiarou odpovedá formula p a výroku pod čiarou odpovedá formula v tvare implikácie, ktorej záver je s. Aby veta 2.5.2 spolu s vetou 2.5.3 bola správne použitá, predpokladom tejto implikácie musí byť formula $\neg p$. Teda doplnením odpovedajúcich výrokov, dostaneme

$$\frac{\text{Sú prázdniny.}}{\text{Ak } \textit{nie sú prázdniny}\text{, chodím do školy.}}$$

c) Označme: s – „Sneží.“, m – „Na Marse je život.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly s, $\neg s$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $\neg m$. Teda veta 2.5.2 spolu s vetou 2.5.3 je použitá správne.

d) Označme: s – „Jozef má rád špenát.“, v – „Korytnica je minerálna voda.“. Keďže jednému výroku nad čiarou odpovedá formula $\neg s$, tak druhému predpokladu musí odpovedať formula s.

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Jozef má rád špenát.}\\ \text{Jozef nemá rád špenát.}\end{array}}{\text{Korytnica je minerálna voda.}}$$

□

Veta 2.5.4 (O dôkaze sporom) *Pre každý systém formúl $\mathcal{F}$ a pre ľubovoľnú formulu výrokovej logiky φ platí*

$$\mathcal{F} \vdash \varphi \textit{ práve vtedy, keď systém } \mathcal{F},\ \neg\varphi \textit{ je sporný.}$$

Formula φ je dokazateľná zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ práve vtedy, keď systém $\mathcal{F}$, $\neg\varphi$ je sporný.

Príklad 2.5.5 Rozhodnime, či v nasledujúcich príkladoch je správne použitá veta o dôkaze sporom resp. doplňme chýbajúce časti viet tak, aby bola správne použitá:

a) $\dfrac{\text{Hrám hokej.}}{\text{Viem korčuľovať.}}$

b) $\dfrac{\text{Mám chrípku.}}{\text{Mám vysokú teplotu.}}$

c) $\dfrac{\text{Študujem na univerzite.}}{\ldots\ldots}$

Riešenie:

a) Negácia výroku pod čiarou, „Neviem korčuľovať.“ je v spore s výrokom nad čiarou, daná úvaha je správna.

b) Negácia výroku pod čiarou, „Nemám vysokú teplotu.“, je v spore s výrokom nad čiarou, daná úvaha je správna.

c) Keďže negácia výroku pod čiarou má byť v spore s výrokom „Študujem na univerzite.“, môžeme do zadania doplniť napríklad výrok „Zmaturoval som.“. □

Veta 2.5.5 (O dôkaze rozborom prípadov) *Pre každý systém formúl $\mathcal{F}$ a pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky φ, ψ, θ platí*

$$\mathcal{F},\ \varphi \vee \psi \vdash \theta \text{ práve vtedy, keď } \mathcal{F},\ \varphi \vdash \theta \text{ a súčasne } \mathcal{F},\ \psi \vdash \theta.$$

Zo systému predpokladov $\mathcal{F}$, φ je dokazateľná formula θ a zároveň zo systému predpokladov $\mathcal{F}$, ψ je dokazateľná formula θ práve vtedy, keď zo systému predpokladov $\mathcal{F}$, $\varphi \vee \psi$ je dokazateľná formula θ. Niečo je dokazateľné z prvej formuly a aj z druhej práve vtedy, keď je to dokazateľné z ich disjunkcie.

Príklad 2.5.6 Rozhodnime, či v nasledujúcich príkladoch je správne použitá veta o dôkaze rozborom prípadov resp. doplňme chýbajúce časti viet tak, aby bola správne použitá:

a) $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Ak mám narodeniny alebo skúšku, budem oslavovať.}\\ \text{Mám narodeniny.}\end{array}}{\text{Budem oslavovať.}}$

b) $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Ak mrzne alebo sneží, je zima.}\\ \text{Mrzne.}\end{array}}{\ldots\ldots}$

Riešenie:

a) Označme: n – „Mám narodeniny.“, s – „Mám skúšku.“, o – „Budem oslavovať.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $(n \vee s) \Rightarrow o$, n a výroku pod čiarou odpovedá formula o. Veta 2.5.5 bola použitá správne.

b) Označme: m – „Mrzne.“, s – „Sneží.“, z – „Je zima.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $(m \vee s) \Rightarrow z$, m a teda podľa vety 2.5.5, dôsledkom úvahy musí byť formula z. Teda doplnením odpovedajúcich výrokov, dostaneme

Ak mrzne alebo sneží, je zima.
Mrzne.

Je zima. □

Veta 2.5.6 (O neutrálnej formule) *Pre každý systém formúl $\mathcal{F}$ a pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky φ, ψ platí*

$$\mathcal{F} \vdash \varphi \text{ práve vtedy, keď } \mathcal{F},\ \psi \vdash \varphi \text{ a súčasne } \mathcal{F},\ \neg\psi \vdash \varphi.$$

Zo systému predpokladov $\mathcal{F}$, φ je dokazateľná formula θ a zároveň zo systému predpokladov $\mathcal{F}$, $\neg\varphi$ je dokazateľná formula θ práve vtedy, keď zo systému predpokladov $\mathcal{F}$ je dokazateľná formula θ.

Príklad 2.5.7 Rozhodnime, či v nasledujúcich príkladoch je správne použitá veta o neutrálnej formule resp. doplňme chýbajúce časti viet tak, aby bola správne použitá:

a) Ak pôjde Janko, pôjde aj Marienka.
Ak nepôjde Janko, pôjde aj Marienka.

Marienka pôjde.

b) Ak som mladý, ...
Ak ..., teším sa zo života.

......

Riešenie:

a) Označme: j – „Pôjde Janko.“, m – „Pôjde Marienka.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $j \Rightarrow m$, $\neg j \Rightarrow m$ a výroku pod čiarou odpovedá formula m. Veta 2.5.6 je použitá správne.

b) Označme: s – „Som mladý.“, t – „Teším sa zo života.“. Výrokom nad čiarou odpovedajú formuly v tvare implikácie, pričom podľa vety 2.5.6, v jednej z nich je predpokladom nejaká formula, v našom prípade s, a v druhej jej negácia, teda doplníme $\neg s$. Závery v oboch, podľa vety 2.5.6, majú byť rovnaké, v našom prípade t, a tento ich záver je totožný s dôsledkom úvahy, teda doplníme t. Potom doplnením odpovedajúcich výrokov, dostaneme

Ak som mladý, *teším sa zo života.*
Ak *nie som mladý*, teším sa zo života.

Teším sa zo života. □

Veta 2.5.7 (Pravidlo rezu) *Pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky φ, ψ, θ platí*

$$\{\neg\varphi \vee \psi,\ \varphi \vee \theta\} \vdash \psi \vee \theta.$$

Z formúl $\neg\varphi \vee \psi,\ \varphi \vee \theta$ odvodzujeme formulu $\psi \vee \theta$.

Príklad 2.5.8 Rozhodnime, či v nasledujúcich príkladoch je správne použité pravidlo rezu resp. doplňme chýbajúce časti viet tak, aby to bolo správne použité:

a) Podozrivý sa nedotkol predmetu alebo mal rukavice.
Podozrivý sa dotkol predmetu alebo je nevinný.
———————————————
Podozrivý mal rukavice alebo je nevinný.

b) Ráno je zamračené alebo si vezmem dáždnik.
Nevezmem si dáždnik alebo ....
———————————————
Bude pršať alebo ....

Riešenie:

a) Označme: d – „Podozrivý sa dotkol predmetu.“, r – „Podozrivý mal rukavice.“, v – „Podozrivý je vinný.“. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $\neg d \vee r,\ d \vee \neg v$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $r \vee \neg v$. Veta 2.5.7 je použitá správne.

b) Označme: z – „Ráno je zamračené.“, v – „Vezmem si dáždnik.“, p – „Bude pršať.“. Keďže vo formulách, ktoré odpovedajú výrokom nad čiarou, sú podformuly v v jednej a $\neg v$ v druhej, a formula, ktorá odpovedá výroku pod čiarou obsahuje podformulu p, tak je zrejmé, že podľa 2.5.7, chýbajúca formula v jednom z predpokladov úvahy je formula p a vo formule, ktorá je dôsledkom úvahy chýba podformula z. Potom výrokom nad čiarou odpovedajú formuly $z \vee v,\ \neg v \vee p$ a výroku pod čiarou odpovedá formula $p \vee z$. Teda doplnením odpovedajúcich výrokov, dostaneme

Ráno je zamračené alebo si vezmem dáždnik.
Nevezmem si dáždnik alebo *bude pršať.*
———————————————
Bude pršať alebo *je zamračené.* □

Nasledujúca veta vyjadruje rovnocennosť pojmov vyplývania a dokazateľnosti.

Veta 2.5.8 (O úplnosti) *Pre každý systém formúl $\mathcal{F}$ a pre každú formulu φ platí*

$$\mathcal{F} \vdash \varphi \text{ práve vtedy, ak } \mathcal{F} \models \varphi.$$

Dôsledok 2.5.2 *Formula je dokázateľná vo výrokovej logike práve vtedy, keď je tautológia.*

Dôsledok 2.5.3 *Pre dve formuly φ a ψ platí $\varphi \vdash \psi$ a $\psi \vdash \varphi$ práve vtedy, keď φ, ψ sú sémanticky ekvivalentné.*

Dôsledok 2.5.4 *Systém formúl je konzistentný práve vtedy, keď je splniteľný.*

Dôsledok 2.5.5 *Systém formúl je sporný práve vtedy, keď z neho sémanticky vyplýva kontradikcia.*

Vlastnosti výrokovej logiky

Výroková logika je:

- **rozhodnuteľná**, pretože vieme jednoznačne rozhodnúť, či daná výroková formula je tautológia, kontradikcia alebo splniteľná,
- **korektná**, pretože formula dokázaná z axióm je tautológia; rozhodnúť o tom, či výroková logika je korektná znamená rozhodnúť, či pravidlá odvodzovania sú korektné,
- **úplná**, pretože každá tautológia je logickým dôsledkom axióm,
- **konzistentná**, pretože z axióm súčasne nevyplývajú formuly α aj $\neg\alpha$.

Úlohy

2.33 Zistite, či nasledujúca postupnosť formúl je dôkazom (určte pre príslušné formuly, či sa jedná o axiómu, predpoklad alebo bezprostredný dôsledok):

a) bez predpokladov

1. $\alpha \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha))$
3. $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$,

b) z predpokladov $\alpha \Rightarrow \beta$

1. $\alpha \Rightarrow \beta$
2. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$
3. β,

c) z predpokladov $\neg\neg\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha$

1. $\neg\neg\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha$
2. $(\neg\neg\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha)$
3. $\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$,

d) z predpokladov $\alpha, \neg\beta \Rightarrow \neg\neg\alpha$

1. α
2. $\alpha \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \alpha)$
3. $\neg\beta \Rightarrow \neg\neg\alpha$
4. $(\neg\beta \Rightarrow \neg\neg\alpha) \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta)$
5. $\neg\alpha \Rightarrow \beta$.

2.34 Doplňte zadanie tak, aby uvedené odvodzovacie pravidlo alebo princíp spolu s vetou o dedukcii boli použité správne:

a) Modus ponens:

Ak ráno svieti slniečko, nebude pršať.
. . . . . .

Nebude pršať.

b) O tranzitívnosti implikácie:

Ak ma kniha zaujme, tak . . . .
Ak si kúpim knihu, do rána ju prečítam.

. . . . . .

c) Zákon Dunsa Scota:

V sobotu som vysával.
. . . . . .

. . . . . .

d) O dôkaze sporom:

Na Zemi je život.

. . . . . .

e) O neutrálnej formule:

Ak som dobrý, ...
Ak . . . , mama ma tiež miluje.

. . . . . .

f) O dôkaze rozborom prípadov:

Muž opustí svoje sny, ak nechce riskovať alebo sa bojí,
že nestačí na výzvu, ktorá je pred ním.
Muž nechce riskovať.

. . . . . .

g) Modus ponens:

Ak . . . , priznávam si pravdu.
Prežívam zármutok.

. . . . . .

h) Zákon Dunsa Scota:

Rozmýšľam.

. . . . . .

2.35 Aké sú dôsledky uvedených predpokladov?

a) Som informatikom.
Ak som informatikom, mám vysoké IQ.

?

b) Ak je Peter matematikom, študoval v Prahe.
Ak je Peter matematikom alebo informatikom, tak študoval v Prahe.

?

c) Ak študujem, získam dobre zamestnanie.
Ak neštudujem, získam dobre zamestnanie.
____
?

2.36 Overte správnosť resp. nesprávnosť nasledujúcich úsudkov:

a) Ak je Vilma doma alebo je v kaviarni, tak pije kávu.
Ak je doma, pije kávu.
____
Ak pije kávu, tak je v kaviarni.

b) Ak tento študent nevie anglicky, tak nevie ani nemecky.
Študent nevie anglicky.
____
Študent nevie nemecky.

Výsledky

2.33 a) je to dôkaz; VL 1, VL 2, MP(1, 2),
b) nie je to dôkaz,
c) je to dôkaz; predpoklad, VL 3, MP(1, 2),
d) je to dôkaz; predpoklad, VL 1, MP(1, 2), VL 3, MP(3, 4).

2.34 a) Ráno svieti slnko.
b) Kúpim si ju. Ak ma kniha zaujme, do rána ju prečítam.
c) V sobotu som nevysával. Fero nikdy neklame.
d) Človek dýcha.
e) Mama ma miluje. Nie som dobrý. Mama ma miluje.
f) Muž opustí svoje sny.
g) Prežívam zármutok. Priznávam si pravdu.
h) Ak nerozmýšľam, robím hlúposti.

2.35 a) Mám vysoké IQ.
b) Ak je Peter informatikom, študoval v Prahe.
c) Získam dobre zamestnanie.

2.36 a) nesprávny, b) správny.

2.6 Rezolučná metóda vo výrokovej logike

Rezolučná metóda sa používa na rozhodovanie o splniteľnosti konečnej množiny formúl, resp. o dokázateľnosti formuly z konečného systému predpokladov. Vieme, že literál je logická premenná (**pozitívny literál**) alebo jej negácia (**negatívny literál**). **Komplementárne literály** sú dva literály, x a $\neg x$, jeden pozitívny a druhý negatívny. Klauzula je literál alebo disjunkcia konečne veľa literálov. **Prázdna klauzula** je klauzula, ktorá neobsahuje žiaden literál, teda sa jedná o kontradikciu. Označujeme ju $\boldsymbol{F}$. Klauzula je tautológiou práve vtedy, keď obsahuje dvojicu komplementárnych literálov.

Pravidlo rezolúcie:

Z klauzúl $\alpha \vee \neg l$ a $\beta \vee l$ odvodzujeme klauzulu $\alpha \vee \beta$, pričom l je literál a α, β sú ľubovoľné formuly výrokovej logiky. Zapisujeme

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \vee \neg l \\ \beta \vee l\end{array}}{\alpha \vee \beta}$$

Klauzuly $\alpha \vee \neg l$, $\beta \vee l$ nazývame **rodičovské klauzuly** a klauzulu $\alpha \vee \beta$ nazývame **rezolventa**. Ak formuly α a β sú prázdne, rezolventou formúl l a $\neg l$ je prázdna rezolventa (kontradikcia) $\boldsymbol{F}$.

Nech $\mathcal{K}$ je konečný systém klauzúl. Nech $R(\mathcal{K})$ označuje systém $\mathcal{K}$ rozšírený o všetky možné rezolventy. Teda

$$R(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{D;\ D \text{ je rezolventa niektorých klauzúl } z\ \mathcal{K}\}.$$

Položme $R^0(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Skonštruujeme množiny

$$R^{i+1}(\mathcal{K}) = R(R^i(\mathcal{K})), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Platí

$$\mathcal{K} \subseteq R^1(\mathcal{K}) \subseteq R^2(\mathcal{K}) \subseteq \cdots \subseteq R^i(\mathcal{K}) \subseteq \cdots$$

Nech

$$R^*(\mathcal{K}) = \bigcup\{R^i(\mathcal{K}), i \geqq 1\}.$$

$R^*(\mathcal{K})$ nazývame **rezolučný uzáver** systému $\mathcal{K}$. Keďže systém $\mathcal{K}$ obsahuje konečne veľa výrokových premenných, aj počet klauzúl je konečný. Teda určite existuje také prirodzené číslo n, že $R^{n+1}(\mathcal{K}) = R^n(\mathcal{K})$. Potom platí $R^*(\mathcal{K}) = R^n(\mathcal{K})$. Množina $R^*(\mathcal{K})$ obsahuje prázdnu klauzulu $\boldsymbol{F}$ práve vtedy, keď niektorá z množín $R^i(\mathcal{K})$ obsahovala klauzuly $l, \neg l$ pre nejaký literál l. Nasledujúca veta dáva návod ako zistiť, či daný systém klauzúl je splniteľný alebo nesplniteľný.

Veta 2.6.1 (**Robinsonov rezolučný princíp**) *Systém klauzúl $\mathcal{K}$ je splniteľný (konzistentný) práve vtedy, keď rezolučný uzáver $R^*(\mathcal{K})$ neobsahuje prázdnu klauzulu $\boldsymbol{F}$.*

Teda, systém klauzúl je nesplniteľný (sporný) práve vtedy, keď opakovaným použitím pravidla rezolúcie vieme odvodiť prázdnu klauzulu $\boldsymbol{F}$.

Príklad 2.6.1 Zistime, či systém klauzúl $\mathcal{K} = \{p \vee q,\ \neg p \vee q,\ \neg q \vee \neg r,\ r\}$ je konzistentný.

Riešenie: Do tabuľky zapíšeme všetky navzájom rôzne rezolventy, ktoré môžeme získať použitím pravidla rezolúcie. Pre každú získanú rezolventu uvedieme aj čísla riadkov, v ktorých sú príslušné rodičovské klauzuly.

	klauzula	*rezolventa*
1.	$p \vee q$	
2.	$\neg p \vee q$	
3.	$\neg q \vee \neg r$	
4.	r	
5.	q	$1, 2$
6.	$p \vee \neg r$	$1, 3$
7.	$\neg p \vee \neg r$	$2, 3$
8.	$\neg q$	$3, 4$
9.	$q \vee \neg r$	$1, 7$
10.	p	$1, 8$
11.	$\neg p$	$2, 8$
12.	$\neg r$	$3, 5$
13.	$p \vee \neg p$	$6, 7$
14.	$\boldsymbol{F}$	$5, 8$

Teraz zapíšeme množiny $R^i(\mathcal{K})$.

$R^0(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$,

$R^1(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{q,\ p \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg q\}$,

$R^2(\mathcal{K}) = R^1(\mathcal{K}) \cup \{q \vee \neg r,\ p, \neg p,\ \neg r,\ p \vee \neg p,\ \boldsymbol{F}\}$,

$R^3(\mathcal{K}) = R^2(\mathcal{K}) = R^*(\mathcal{K})$.

Keďže $R^*(\mathcal{K})$ obsahuje prázdnu klauzulu $\boldsymbol{F}$, tak na základe vety 2.6.1, systém klauzúl $\mathcal{K}$ nie je konzistentný, teda je sporný. $\square$

Poznámka: Rezolučnou metódou vieme ukázať, že formula ψ je dokazateľná zo systému formúl $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_k\}$, teda, že platí $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_k\} \vdash \psi$. Stačí to previesť na problém, či systém formúl $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_k,\ \neg\psi\}$ je sporný.

Príklad 2.6.2 Rezolučnou metódou ukážeme platnosť pravidla modus ponens. Teda, že platí $\{\varphi,\ \varphi \Rightarrow \psi\} \vdash \psi$.

Riešenie: Nakoľko formula $\varphi \Rightarrow \psi$ nie je klauzula, nahradíme ju formulou $\neg\varphi \vee \psi$. Chceme ukázať, že platí $\{\varphi,\ \neg\varphi \vee \psi\} \vdash \psi$. To znamená preukázať, že systém klauzúl $\{\varphi,\ \neg\varphi \vee \psi,\ \neg\psi\}$ je sporný. Inak povedané, že opakovaným použitím pravidla rezolúcie vieme odvodiť prázdnu klauzulu $\boldsymbol{F}$. Rezolventou klauzúl $\neg\varphi \vee \psi$ a φ je formula ψ. A rezolventou klauzúl ψ a $\neg\psi$ je klauzula $\boldsymbol{F}$. Teda systém klauzúl $\{\varphi,\ \neg\varphi \vee \psi,\ \neg\psi\}$ je sporný. Platí $\{\varphi,\ \varphi \Rightarrow \psi\} \vdash \psi$. $\square$

Ak máme ukázať, že systém formúl $\mathcal{S}$ je splniteľný, najprv každú formulu systému $\mathcal{S}$ prepíšeme na normálny konjunktívny tvar. Systém $\mathcal{S}$ nahradíme systémom $\mathcal{K}$, ktorý bude obsahovať všetky klauzuly vyskytujúce sa vo formulách zapísaných v normálnych konjunktívnych tvaroch. Klauzuly, ktoré sú tautológie môžeme vynechať. Podľa rezolučného princípu postupne vytvoríme množiny $R^i(\mathcal{K})$, až získame rezolučný uzáver $R^*(\mathcal{K})$. Platí, že systém formúl $\mathcal{S}$ je splniteľný práve vtedy, keď je splniteľný systém klauzúl $\mathcal{K}$.

Je ale zrejmé, že konštrukcia celej množiny $R^*(\mathcal{K})$ nie je potrebná. Stačí zistiť, či množina $R^*(\mathcal{K})$ obsahuje prázdnu klauzulu $\boldsymbol{F}$. Ukážeme si algoritmus, ktorý zjednoduší postup uvedený v predchádzajúcom príklade.

2.6.1 Zrýchlená rezolučná metóda

Majme už systém klauzúl neobsahujúci tautológie. Zvoľme výrokovú premennú (označme ju p), ktorej oba literály (p aj $\neg p$) sa vyskytujú v niektorých klauzulách. Klauzuly systému $\mathcal{K}$ rozdelíme do troch disjunktných množín:

i) $\mathcal{K}_0(p)$ obsahuje klauzuly zo systému $\mathcal{K}$ s literálom $\neg p$,

ii) $\mathcal{K}_1(p)$ obsahuje klauzuly zo systému $\mathcal{K}$ s literálom p,

iii) $\mathcal{K}_2(p)$ obsahuje klauzuly zo systému $\mathcal{K}$ bez premennej p.

Nech $\mathcal{K}_{01}(p)$ obsahuje všetky možné rezolventy rodičovských klauzúl, pričom jedna je z množiny $\mathcal{K}_0(p)$ a druhá z množiny $\mathcal{K}_1(p)$. Položme $\widetilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_2(p) \cup \mathcal{K}_{01}(p)$. Táto množina už neobsahuje premennú p.

V ďalšom využijeme tvrdenie nasledujúcej vety.

Veta 2.6.2 *Systém klauzúl $\mathcal{K}$ je splniteľný práve vtedy, keď je splniteľná množina $\widetilde{\mathcal{K}}$.*

Opäť si zvolíme ďalšiu výrokovú premennú a zopakujeme predchádzajúci postup. Týmto algoritmom postupne eliminujeme všetky výrokové premenné, až získame množinu, ktorá

- buď obsahuje klauzuly, v ktorých sa už nenachádzajú komplementárne literály, teda systém $\mathcal{K}$ je splniteľný
- alebo obsahuje prázdnu klauzulu $\boldsymbol{F}$, teda systém $\mathcal{K}$ je nesplniteľný.

V prvom prípade vieme spätným postupom skonštruovať pravdivostné ohodnotenie výrokovýchn premenných, pri ktorom je každá klauzula zo systému $\mathcal{K}$ pravdivá.

Príklad 2.6.3 Zistime, či systém formúl $\mathcal{S}$ je konzistentný, pričom $\mathcal{S} = \{a \vee \neg d, \neg(a \vee c) \Rightarrow d, b \vee d, \neg b \vee (\neg c \wedge \neg e), a \Rightarrow \neg d\}$. V kladnom prípade nájdime pravdivostné ohodnotenie výrokových premenných, v ktorom je každá formula z $\mathcal{S}$ pravdivá.

Riešenie: Všetky formuly, ktoré nie sú v klauzulárnom tvare, prepíšeme na klauzulárne tvary.

$\neg(a \vee c) \Rightarrow d \models\mkern-10mu\dashv a \vee c \vee d$

$\neg b \vee (\neg c \wedge \neg e) \models\mkern-10mu\dashv (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg e)$

$a \Rightarrow \neg d \models\mkern-10mu\dashv \neg a \vee \neg d$

Systém formúl $\mathcal{S}$ nahradíme systémom klauzúl $\mathcal{K} = \{a \vee \neg d,\ \neg b \vee \neg c,\ b \vee d,\ \neg b \vee \neg e,\ a \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg d\}$. Klauzuly zapíšeme do stĺpcov prvého riadka nasledujúcej tabuľky.

	$a\vee\neg d$	$\neg b\vee\neg c$	$b\vee d$	$\neg b\vee\neg e$	$a\vee c\vee d$	$\neg a\vee\neg d$					
c		0			1		$\neg b\vee a\vee d$				
a	1	$\times$			$\times$	0	1	$\neg d$	$\neg d\vee d\vee\neg b$ tautológia		
d	$\times$	$\times$	1		$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	b	
b	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	1	$\neg e$
e	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0
	$\uparrow_3$	$\uparrow_5$	$\uparrow_2$	$\uparrow_1$	$\uparrow_4$	$\uparrow_3$	$\uparrow_4$	$\uparrow_3$	$\times$	$\uparrow_2$	$\uparrow_1$

Najprv eliminujeme výrokovú premennú c. Do stĺpcov, ktoré prislúchajú klauzulám obsahujúcich literál c napíšeme 1 a do stĺpcov, ktoré prislúchajú klauzulám obsahujúcich literál $\neg c$ napíšeme 0. Pridáme nové stĺpce (v našom prípade len jeden) pre všetky možné klauzuly, ktoré vzniknú ako rezolventy dvoch klauzúl vzhľadom na literál c. Množina klauzúl (vrátane tých, ktoré vznikli ako rezolventy), ktorých stĺpce v druhom riadku nie sú označené 1 alebo 0, už neobsahuje výrokovú premennú c.

$\widetilde{\mathcal{K}} = \{a \vee \neg d,\ b \vee d,\ \neg b \vee \neg e,\ \neg a \vee \neg d,\ \neg b \vee a \vee d\}$.

V ďalšom kroku eliminujeme výrokovú premennú a. Do ešte neoznačených (ani nulou ani jednotkou) stĺpcov, ktoré prislúchajú klauzulám obsahujúcich literál a napíšeme v treťom riadku 1 a 0 do stĺpcov s literálom $\neg a$. Pridáme nové stĺpce pre všetky možné klauzuly, ktoré vzniknú ako rezolventy dvoch klauzúl vzhľadom na literál a. Množina klauzúl (tautológie môžeme vynechať), ktorých stĺpce ešte neboli označené 1 alebo 0, už neobsahuje ani výrokovú premennú a.

$\widetilde{\mathcal{K}} = \{b \vee d,\ \neg b \vee \neg e,\ \neg d\}$.

Postup opakujeme a postupne eliminujeme ďalšie výrokové premenné, a to d (získame množinu $\widetilde{\mathcal{K}} = \{\neg b \vee \neg e,\ b\}$) a b (získame $\widetilde{\mathcal{K}} = \{\neg e\}$). Množina $\{\neg e\}$ je splniteľná. Na základe vety 2.6.2 vieme, že aj systém klauzúl K je splniteľný. A teda aj pôvodný systém formúl $\mathcal{S}$ je splniteľný.

Ak chceme nájsť ohodnotenie u výrokových premenných, pri ktorom je každá klauzula z $\mathcal{K}$ pravdivá, môžeme postupovať nasledovne. Na konci tabuľky pridáme jeden riadok, do ktorého šípkami zaznamenáme, v ktorom kroku sa klauzula, ktorej prislúcha daný stĺpec, stane pravdivou. Ohodnocovať výrokové premenné začneme od predposledného riadku tabuľky, na začiatku ktorého je výroková premenná e. Keďže obsahuje 0 pri formule $\neg e$, položíme $u(e) = 0$. Šípkou s indexom 1 označíme všetky stĺpce odpovedajúce klauzulám s negatívnym literálom $\neg e$, pretože sú pravdivé pri tomto pravdivostnom ohodnotení výrokovej premennej e. Prejdeme na predchádzajúci riadok, v ktorom na začiatku je výroková premenná b. Sledujeme stĺpce bez šípiek. Výrokovú premennú b ohodnotíme $u(b) = 1$. Opäť označíme šípkou s indexom 2 všetky stĺpce odpovedajúce klauzulám s pozitívnym literálom

b, pretože sú pravdivé pri tomto ohodnotení výrokovej premennej b. V ďalšom ohodnotíme postupne výrokové premenné d, a a c, $u(d) = 0$, $u(a) = 1$ a $u(c) = 0$ a označíme stĺpce šípkami s indexami 4, 5 a 6, ktorých klauzuly budú pravdivé. □

Príklad 2.6.4 Štyri priateľky sa rozhodli, že pôjdu na kávu. Nakoľko boli rozhádané, niektoré z nich si začali klásť podmienky na spoločníčky:

- Xénia: „Pôjdem, ak nepôjde Yvona a ak nepôjde Tamara, tak nepôjdem ani ja.“
- Yvona: „Ak pôjdem, tak musí ísť Zara.“
- Zara: „Nepôjdem, ak nepôjde Tamara.“

Určte, či z týchto podmienok vyplýva, že na kávu pôjde Tamara.

Riešenie: Označme: z – „Zara pôjde.“, y – „Yvona pôjde.“, t – „Tamara pôjde.“, x – „Xénia pôjde.“. Uvedeným vetám v zadaní odpovedá systém formúl $\mathcal{S} = \{(\neg y \Rightarrow x) \wedge (\neg t \Rightarrow \neg x),\ y \Rightarrow z,\ \neg t \Rightarrow \neg z\}$. Chceme zistiť, či formula $\neg t$ je dokazateľná zo systému formúl $\mathcal{S}$, resp. či systém formúl $\mathcal{S} \cup \{\neg t\}$ je konzistentný.

Formuly prepíšeme na klauzulárne tvary.
$(\neg y \Rightarrow x) \wedge (\neg t \Rightarrow \neg x)\ \models\!\!\!\dashv\ (y \vee x) \wedge (t \vee \neg x)$
$y \Rightarrow z\ \models\!\!\!\dashv\ \neg y \vee z$
$\neg t \Rightarrow \neg z\ \models\!\!\!\dashv\ t \vee \neg z$

Systém formúl $\mathcal{S}$ nahradíme systémom klauzúl $\mathcal{K} = \{y \vee x,\ t \vee \neg x,\ \neg y \vee z,\ t \vee \neg z\}$. Klauzuly systému $\mathcal{K} \cup \{\neg t\}$ zapíšeme do stĺpcov prvého riadka nasledujúcej tabuľky.

	$y \vee x$	$t \vee \neg x$	$\neg y \vee z$	$t \vee \neg z$	$\neg t$				
z			1	0		$\neg y \vee t$			
x	1	0	×	×			$y \vee t$		
y	×	×	×	×		0	1	t	
t	×	×	×	×	0	×	×	1	$\boldsymbol{F}$

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Najprv eliminujeme výrokovú premennú z. V riadku máme jednu 0 a jednu 1. Do tabuľky pridáme rezolventu $\neg y \vee t$.

V ďalšom kroku eliminujeme výrokovú premennú x. Máme dva stĺpce, ktorých klauzuly obsahujú výrokovú premennú x a ktoré ešte neboli označené. Do týchto stĺpcov napíšeme 1 a 0. Do tabuľky pridáme nový stĺpec odpovedajúci rezolvente $y \vee t$.

Eliminujeme výrokovú premennú y. Do ešte neoznačených (ani nulou ani jednotkou) stĺpcov, ktoré prislúchajú klauzulám obsahujúcich literál y napíšeme v treťom riadku 1 a 0 do stĺpcov s literálom $\neg y$. Do tabuľky pridáme nový stĺpec odpovedajúci rezolvente t.

Ako poslednú eliminujeme výrokovú premennú t. Máme dva doteraz neoznačené stĺpce, ktorým odpovedajú klauzuly t a $\neg t$. Ich rezolventou je prázdna klauzula $\boldsymbol{F}$. To znamená, že systém klauzúl $\mathcal{K} \cup \{\neg t\}$, a teda aj systém formúl $\mathcal{S} \cup \{\neg t\}$ je sporný. Teda Tamara na kávu pôjde. □

Úlohy

2.37 Rezolučnou metódou rozhodnite, či je splniteľná množina klauzúl výrokovej logiky $\mathcal{K}$, ak:

a) $\mathcal{K} = \{x \vee y \vee \neg z,\ \neg x,\ x \vee y \vee z,\ x \vee \neg y,\ z \vee t \vee u,\ \neg t \vee \neg u\}$,

b) $\mathcal{K} = \{x \vee y,\ \neg z \vee t,\ \neg x \vee t,\ \neg y \vee z,\ \neg t\}$,

c) $\mathcal{K} = \{x,\ \neg x \vee \neg y \vee z,\ \neg x \vee \neg u \vee v,\ \neg u \vee y,\ \neg z \vee w,\ \neg v \vee w,\ \neg w\}$,

d) $\mathcal{K} = \{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee s \vee t,\ \neg s \vee t,\ \neg t,\ \neg p \vee \neg r,\ \neg q \vee w,\ \neg q \vee \neg w\}$.

2.38 Rezolučnou metódou rozhodnite, či je splniteľná množina formúl výrokovej logiky $\mathcal{S}$, ak:

a) $\mathcal{S} = \{p,\ (p \wedge r) \Rightarrow s,\ \neg t \Rightarrow (\neg p \vee \neg q),\ q \Rightarrow r,\ s \Rightarrow u,\ \neg u \Rightarrow \neg t\}$,

b) $\mathcal{S} = \{x \Rightarrow y,\ y \Rightarrow (\neg x \vee z),\ (\neg t \wedge \neg z) \Rightarrow x,\ t \Rightarrow x,\ \neg z\}$,

c) $\mathcal{S} = \{(x \vee y) \Rightarrow t,\ (z \wedge \neg t) \Rightarrow (u \vee x),\ z \Leftrightarrow u,\ \neg(x \Rightarrow \neg u),\ \neg y \Rightarrow u\}$,

d) $\mathcal{S} = \{q \Leftrightarrow s,\ (p \vee \neg q) \Rightarrow \neg u,\ (u \wedge \neg v) \Rightarrow \neg q,\ (\neg p \wedge v) \Rightarrow \neg q,\ u\}$,

e) $\mathcal{S} = \{x \Leftrightarrow \neg z,\ z \Rightarrow (x \vee y),\ \neg(u \Rightarrow \neg z),\ y \Rightarrow (u \wedge t)\}$,

f) $S = \{p,\ (p \wedge r) \Rightarrow s,\ (p \wedge q) \Rightarrow t,\ q \Rightarrow r,\ (s \vee t) \Rightarrow u\}$,

g) $S = \{x \Rightarrow y,\ y \Rightarrow (\neg x \vee z),\ \neg t \Rightarrow (x \wedge \neg z),\ t \Rightarrow x, \neg z\}$,

h) $S = \{\neg p \Rightarrow q,\ (q \wedge \neg r) \Rightarrow (s \wedge \neg p),\ \neg(\neg p \Rightarrow t),\ s \Rightarrow t,\ s \vee \neg r\}$.

2.39 Rezolučnou metódou rozhodnite, či $\mathcal{S} \models \varphi$, ak:

a) $\mathcal{S} = \{t,\ (s \vee t) \Rightarrow u,\ (p \wedge q) \Rightarrow t,\ t \Rightarrow \neg u,\ q \vee p\}$ a $\varphi : \neg u \wedge \neg s$,

b) $\mathcal{S} = \{x \Rightarrow y,\ y \Rightarrow (z \vee \neg x),\ \neg t \Rightarrow (x \wedge \neg z),\ t \Rightarrow x\}$ a $\varphi : z$,

c) $\mathcal{S} = \{p,\ (p \wedge r) \Rightarrow s,\ (p \wedge q) \Rightarrow t,\ q \Rightarrow r,\ (s \vee t) \Rightarrow w\}$ a $\varphi : w$,

d) $\mathcal{S} = \{x \Leftrightarrow z,\ y \Rightarrow (w \vee x),\ \neg w \wedge (v \vee \neg x),\ v \Rightarrow y\}$ a $\varphi : \neg x$.

2.40 Formalizujte nasledujúce vety a rezolučnou metódou zistite, či veta pod čiarou je sémantickým dôsledkom viet nad čiarou:

a) Na výlet do Tatier pôjde Anka alebo Boris.
Ak pôjde Boris, pôjde Cyril a Danka nepôjde.
Ak pôjde Evka, pôjde aj Danka.
Ak pôjde Cyril, pôjde aj Evka.

Anka pôjde.

b) Ak bude pršať, nepôjdeme na výlet.
Ak nepôjdeme na výlet, pôjdeme do telocvične.
Ak pôjdeme do telocvične a bude pršať, pôjdeme autom.
Ak pôjdeme autom, Fero bude šoférovať.
Bude pršať.

Fero bude šoférovať.

c) Čierne topánky mám len vtedy, ak mám čierny oblek.
Ak mám čierny oblek, nemám biele ponožky ani ružovú košeľu.
Ak mám dobrú náladu, mám ružovú košeľu.
Mám biele ponožky a dobrú náladu.

Nemám čierny oblek.

d) Ak privezú mlieko a neprivezú zeleninu, tak neprivezú pečivo.
Ak neprivezú pečivo, privezú zeleninu a sladkosti.
Ak privezú pečivo, privezú aj zeleninu.

Privezú zeleninu.

e) Pavla alebo Quido pôjdu na oslavu.
Ak pôjde na oslavu Quido, pôjde aj Radka a Štefan.
Ak nepôjde Pavla, pôjde na oslavu Štefan.

Štefan pôjde na oslavu.

f) Na zájazd pôjde Peter alebo Rado.
Ak pôjde Peter, pôjde Slávka.
Ak pôjde Rado alebo Slávka, nepôjde Tamara.

Na zájazd pôjde Rado alebo Slávka.

g) Ak bude pršať, nepôjdeme na prechádzku.
Pôjdeme na prechádzku alebo do kina.
Ak pôjdeme do kina a bude pršať, pôjdeme autobusom.

Ak pôjdeme do kina, nebude pršať.

h) Plánovaný útok bude úspešný vtedy a len vtedy, keď bude nepriateľ prekvapený alebo ak budú jeho pozície nedostatočne bránené.
Nepriateľ nebude prekvapený, ak si nebude príliš istý.
Nebude si príliš istý, ak jeho pozície budú nedostatočne bránené.

Útok nebude úspešný.

i) Ak sa včera v noci Jones nestretok so Smithom, tak buď Smith je vrah alebo Jones klame.
Ak Smith nie je vrahom, Jones sa včera v noci nestretol so Smithom a vrah prišiel po polnoci.
Ak prišiel vrah po polnoci, je Smith vrah alebo Jones klame.
Jones neklame.

Vrahom je Smith.

2.41 Štyria priatelia Martin, Noro Ondrej a Peter sa rozhodli, že pôjdu na túru. Pretože boli trochu rozhádaní, začali si klásť podmienky na spoločníkov.

- Martin: Pôjdem keď nepôjde Ondrej a pôjde Noro a pôjdem práve vtedy, keď nepôjde Peter.
- Noro: Pôjdem, keď nepôjde Peter alebo pôjdem, keď pôjde Martin.
- Ondrej: Ak pôjdem, tak musia ísť Martin a Noro.
- Peter: Ak nepôjde Noro, tak pôjdem keď pôjde Ondrej.

Rozhodnite, či je možné zorganizovať túru tak, aby boli splnené všetky podmienky. Ak áno, nájdite aspoň jedno zloženie účastníkov túry.

Výsledky

2.37 a) nesplniteľná, b) nesplniteľná, c) splniteľná, d) splniteľná.

2.38 a) splniteľná, b) nesplniteľná, c) splniteľná, d) nesplniteľná, e) splniteľná, f) splniteľná, g) nesplniteľná, h) nesplniteľná.

2.39 a) platí, b) platí, c) neplatí, d) neplatí.

2.40 a) Označme a – „Anka pôjde.“, b – „Boris pôjde.“, c – „Cyril pôjde.“, d – „Danka pôjde.“, e – „Evka pôjde.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{a \vee b,\ b \Rightarrow (c \wedge \neg d),\ e \Rightarrow d,\ c \Rightarrow e\} \models a$. Platí.

b) Označme p – „Bude pršať.“, v – „Pôjdeme na výlet.“, t – „Pôjdeme do telocvične.“, a – „Pôjdeme autom.“, f – „Fero bude šoférovať.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{p \Rightarrow \neg v,\ \neg v \Rightarrow t,\ (t \wedge p) \Rightarrow a,\ a \Rightarrow f,\ p\} \models f$. Platí.

c) Označme t – „Mám čierne topánky.“, o – „Mám čierny oblek.“, p – „Mám biele ponožky.“, k – „Mám ružovú košeľu.“, n – „Mám dobrú náladu.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{t \Leftrightarrow o,\ o \Rightarrow (\neg p \wedge \neg k),\ n \Rightarrow k,\ p \wedge n\} \models \neg o$. Platí.

d) Označme m – „Privezú mlieko.“, z – „Privezú zeleninu.“, p – „Privezú pečivo.“,s – „Privezú sladkosti.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{(m \wedge \neg z) \Rightarrow \neg p,\ \neg p \Rightarrow (z \neg s),\ p \Rightarrow z\} \models z$. Platí.

e) Označme p – „Pavla pôjde.“, q – „Quido pôjde.“, r – „Radko pôjde.“, s – „Štefan pôjde.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{p \vee \vee q,\ q \Rightarrow (r \wedge s),\ \neg p \Rightarrow s\} \models s$. Neplatí.

f) Označme p – „Peter pôjde.“, r – „Rado pôjde.“, s – „Slávka pôjde.“, t – „Tamara pôjde.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{p \vee r,\ p \Rightarrow s,\ (r \vee s) \Rightarrow \neg t\} \models (r \vee s)$. Platí.

g) Označme p – „Bude pršať.“, r – „Pôjdeme na prechádzku.“, k – „Pôjdeme do kina.“, a – „Pôjdeme autobusom.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{p \Rightarrow \neg r,\ r \vee k,\ (k \wedge p) \Rightarrow a\} \models (k \Rightarrow \neg p)$. Neplatí.

h) Označme u – „Plánovaný útok bude úspešný.“, p – „Nepriateľ bude prekvapený.“, b – „Jeho pozície budú nedostatočne bránené.“, i – „Nepriateľ si bude príliš istý“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{u \Leftrightarrow (p \vee b),\ \neg i \Rightarrow \neg p,\ b \Rightarrow \neg i\} \models \neg u$. Neplatí.

i) Označme s – „Jones sa včera v noci stretol so Smithom.“, v – „Smith je vrah.“, k – „Jones klame.“, p – „Vrah prišiel po polnoci.“. Formalizáciou daných viet máme zistiť, či platí $\{\neg s \Rightarrow (v \vee k),\ \neg v \Rightarrow (\neg s \wedge p),\ p \Rightarrow (v \vee k),\ \neg k\} \models v$. Platí.

2.41 Označme: m – „Martin pôjde.“, n – „Noro pôjde.“, o – „Ondrej pôjde.“, p – „Peter pôjde.“. Množina formúl $S = \{((\neg o \wedge n) \Rightarrow m) \wedge (m \Leftrightarrow \neg p),\ (\neg p \Rightarrow n) \vee (m \Rightarrow n),\ o \Rightarrow (m \wedge n),\ \neg n \Rightarrow (o \Rightarrow p)\}$ je splniteľná. Formuly z tejto množiny sú pravdivé v 3 ohodnoteniach výrokových premenných, ktorým odpovedajú vety:

- na túru pôjde Martin, Noro a Ondrej,
- na túru pôjde Martin a Noro,
- na túru pôjde iba Peter.

Kapitola 3

Predikátová logika

3.1 Základné pojmy predikátovej logiky

3.1.1 Neformálne zavedenie predikátovej logiky

Existujú úsudky, ktoré považujeme za správne, ale vo výrokovej logike nevieme ich správnosť dokázať. Uvažujme napríklad úsudok:

Adam vie fyziku.
Každý, kto vie fyziku, je múdry.

Adam je múdry.

Zapíšme tento úsudok formálne vo výrokovej logike. Prvá veta predstavuje elementárny výrok p. Druhú vetu môžeme formulovať nasledovne: „Ak človek vie fyziku, potom je múdry. ", a teda má tvar implikácie dvoch výrokov $q \Rightarrow r$, kde q je výrok „Človek vie fyziku." a r výrok „Človek je múdry.". Posledná veta je opäť elementárny výrok t: „Adam je múdry." Vo výrokovej logike neplatí $\{p,\ q \Rightarrow r\} \models t$. My ale vieme, že táto úvaha je správna. Dôvodom, prečo to vo výrokovej logike nevieme dokázať, je fakt, že výroková logika nedokáže popísať vnútornú štruktúru elementárnych výrokov.

Skúsme popísať vety v uvedenom úsudku iným spôsobom. Výrok „Adam vie fyziku." sa týka Adama ako „objektu" a jeho vlastnosti „vedieť fyziku". Podobnú štruktúru má aj tretia veta, v ktorej vlastnosťou je „byť múdry". Druhá veta je všeobecnejšia, hovorí, že každý objekt (jednotlivec), ktorý má vlastnosť „vedieť fyziku", má aj vlastnosť „byť múdry". Ak označíme symbolom F vlastnosť „vedieť fyziku" a symbolom M vlastnosť „byť múdry", môžeme úsudok napísať v tvare

Adam má vlastnosť F.
Každý, kto má vlastnosť F, má vlastnosť M.

Adam má vlastnosť M.

Tento zápis ešte skrátime tak, že prvú vetu napíšeme v tvare $F(\boldsymbol{a})$, kde $\boldsymbol{a}$ označuje Adama, podobne tretia veta bude mať tvar $M(\boldsymbol{a})$. V druhej vete na vyjadrenie toho, že každý má nejakú vlastnosť, použijeme *všeobecný kvantifikátor* $\forall$. Za kvantifikátorom vždy nasleduje *premenná*. Premenné $x, y, \ldots$ zastupujú tzv. „objekty" v prípade, že nie sú konkrétne dané. Množina objektov o ktorých uvažujeme, sa nazýva *univerzum.* [1] Naša úvaha bude mať v predikátovej logike tvar

$$\begin{array}{l} F(\boldsymbol{a}) \\ (\forall x)(F(x) \Rightarrow M(x)) \\ \hline M(\boldsymbol{a}) \end{array}$$

Formalizované vety budeme nazývať *formuly* predikátovej logiky.

Vlastnosti objektov alebo vzťahy medzi nimi budeme nazývať *predikáty*, konkrétne objekty *konštanty.* Uvažujme ešte jednu úvahu:

$$\begin{array}{l} \text{Adam vie fyziku.} \\ \text{Adam je múdry.} \\ \hline \text{Niekto, kto vie fyziku, je múdry.} \end{array}$$

Prvé dve vety sme už sformalizovali, na formalizáciu tretej vety použijeme *existenčný kvantifikátor* $\exists$. Úvaha zapísaná formálne bude mať tvar

$$\begin{array}{l} F(\boldsymbol{a}) \\ M(\boldsymbol{a}) \\ \hline (\exists x)(F(x) \wedge M(x)) \end{array}$$

V časti *Rezolučná metóda v predikátovej logike* sa naučíme, ako zisťovať správnosť uvedených úvah.

Príklad 3.1.1 Sformalizujtm vetu: Druhá mocnina párneho prirodzeného čísla je párne číslo.

Riešenie. Vlastnosť objektov, ktorými sú prirodzené čísla, je „byť párnym číslom“. Označme ju predikátovým symbolom P. Potom je tu ešte „druhá mocnina“, ktorú nechápeme ako vlastnosť, lebo sa nepýtame, či číslo je druhou mocninou nejakého iného čísla. Druhá mocnina prirodzeného čísla bude opäť prirodzené číslo, teda objekt, ktorý je vyjadrený nepriamo pomocou iného objektu. Toto vyjadríme pomocou *funkcie* f, ktorá každému prirodzenému číslu priradí jeho druhú mocninu, t.j. $f:\ x \to x^2$ (resp. $f(x) = x^2$). Našu vetu môžeme potom vyjadriť takto: Ak x má vlastnosť P, potom aj $f(x)$ má vlastnosť P, formálne:

$$P(x) \Rightarrow P(f(x)).$$

□

Príklad 3.1.2 Sformalizujme nasledujúce vety:

a) Peter je Evin predok.

b) Peter má ženského potomka.

c) Peter a Eva sú súrodenci.

Riešenie. Objekty sú ľudia. Vo výrokoch vystupujú dva konkrétne objekty – Peter a Eva, ktoré vyjadríme konštantami $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{e}$. Ďalej tu máme vlastnosť "byť predkom niekoho"(za predkov považujeme rodičov, ich rodičov, atď.), ktorá vyjadruje vzťah medzi dvoma objektami a označíme ju predikátovým symbolom $\triangleright$. Vzťah medzi x a y, že x je predkom y, zapíšeme $x \triangleright y$ namiesto $\triangleright(x, y)$. Ďalšiu vlastnosť „byť ženou“ vyjadríme predikátovým symbolom W (z angl. woman).

[1] Presné definície budú uvedené v nasledujúcej kapitole.

a) Vo vzťahu „byť predkom“ sú Peter a Eva. Pomocou predikátového symbolu $\triangleright$ to zapíšeme nasledovne: $\boldsymbol{p} \triangleright \boldsymbol{e}$

b) Existuje človek, ktorého predkom je Peter a zároveň tento človek je ženského pohlavia, formálne:
$$(\exists x)(\boldsymbol{p} \triangleright x \wedge W(x))$$

c) Znamená to, že existuje človek, ktorý je predkom Evy aj Petra, a súčasne neexistuje človek (vyjadríme pomocou negácie $\neg$), ktorý by bol jeho potomkom a zároveň predkom Evy alebo Petra, formálne:
$$(\exists x)(x \triangleright \boldsymbol{p} \wedge x \triangleright \boldsymbol{e} \wedge \neg(\exists y)(x \triangleright y \wedge (y \triangleright \boldsymbol{p} \vee y \triangleright \boldsymbol{e})))$$

Príklad 3.1.3 Sformalizujme nasledujúce vety:

a) Peter, študent 1. A, sa kamaráti so všetkými dievčatami z 1. A.

b) Niektorí chlapci z 1. A sa kamarátia s Petrom.

c) Nejaké dievča z 1. A sa nekamaráti so žiadnym dievčaťom z 1. A, ale kamaráti sa so všetkými chlapcami z 1. A.

Riešenie. Objekty sú žiaci 1. A. Vo výrokoch vystupuje konkrétny objekt – Peter, ktorý vyjadríme konštantou $\boldsymbol{p}$. Ďalej tu máme vlastnosť "kamarátiť sa s niekým", ktorá vyjadruje vzťah medzi dvoma objektami a označíme ju predikátovým symbolom K, t.j. $K(x, y)$ znamená, že žiak x z 1.A sak kamaráti so žiakom y. Ďalšie vlastnosti „byť dievčaťom“ a „byť chlapcom“ vyjadríme predikátovými symbolmi D a C.

a) Formálne povedané, pre každého žiaka x z 1. A platí, že ak x je dievča, potom Peter sa kamaráti s x. Formálne zapíšeme:
$$(\forall x)(D(x) \Rightarrow K(\boldsymbol{p}, x)).$$

b) Formálne povedané, existuje žiak x z 1. A, ktorý je chlapec a Peter sa kamaráti s x. Formálne zapíšeme:
$$(\exists x)(C(x) \wedge K(\boldsymbol{p}, x)).$$

c) Formálne povedané, existuje žiak x z 1. A, ktorý je dievča a pre ktorého platí, že pre každé y platí, že ak y je dievča, tak x sa nekamaráti s y a ak y je chlapec, tak x sa kamaráti s y. Formálne zapíšeme:
$$(\exists x)[D(x) \wedge (\forall y)((D(y) \Rightarrow \neg K(x, y)) \wedge (C(y) \Rightarrow K(x, y)))].$$

□

Príklad 3.1.4 Sformalizujme nasledujúce vety:

a) Petrov otec je fyzik.

b) Niekto má otca fyzika.

c) Človek je fyzik práve vtedy, ak má otca fyzika.

Riešenie. Objekty sú ľudia. Vo výrokoch vystupuje konkrétny objekt – Peter, ktorý vyjadríme konštantou $\boldsymbol{p}$. Ďalej tu máme vlastnosť "byť fyzikom", ktorú vyjadríme predikátovým symbolom F. Pomocou funkčného symbolu o priradíme človeku x jeho otca $o(x)$.

a) Petrovho otca vyjadríme pomocou funkčného symbolu o ako $o(\boldsymbol{p})$. Petrov otec má vlastnosť F, teda zapíšeme:

$$F(o(\boldsymbol{p})).$$

b) Formálne povedané, existuje človek x, ktorého otec má vlastnosť P. Formálne zapíšeme:

$$(\exists x)(C(x) \wedge K(\boldsymbol{p}, x)).$$

c) Formálne povedané, pre každého človeka x platí, že x je fyzik práve vtedy, keď jeho otec je fyzik. Formálne zapíšeme:

$$(\forall x)(F(x) \Leftrightarrow F(o(x))).$$

□

3.1.2 Term a formula

Vo výrokovej logike sme vytvárali formuly na základe určitých pravidiel výrokovej logiky. V tejto kapitole sa budeme zaoberať spôsobom vytvárania termov a formúl v predikátovej logike a ďalšími súvisiacimi pojmami, ako je voľný a viazaný výskyt premennej vo formule a substituovateľnosť termu za premennú.

Definícia 3.1.1 ***Abeceda*** *predikátovej logiky sa skladá z:*

1. ***logických symbolov****, t. j.*

   a) spočítateľnej množiny premenných: $x,\ y,\ z, \ldots, x_1,\ x_2, \ldots,$
   b) výrokových logických spojok: $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,$
   c) všeobecného kvantifikátora $\forall$ *a existenčného kvantifikátora* $\exists$.

2. ***špeciálnych symbolov****, t. j.*

   a) množiny Pred *predikátových symbolov:* $P,\ Q,\ R, \ldots$ *(nesmie byť prázdna),*
   b) množiny Kons *konštantných symbolov:* $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}, \ldots$ *(môže byť prázdna),*
   c) množiny Func *funkčných symbolov:* $f,\ g,\ h, \ldots$ *(môže byť prázdna).*

3. ***pomocných symbolov*** *ako sú zátvorky* ( ), [ ] *a čiarka.*

Pre každý predikátový a funkčný symbol je dané prirodzené číslo n, ktoré určuje, koľkých objektov sa daný predikát týka alebo na koľko premenných sa daný funkčný symbol vzťahuje. Toto číslo sa nazýva ***arita*** *predikátového alebo funkčného symbolu.*

Slovo *je ľubovoľná postupnosť prvkov abecedy predikátovej logiky.*

Poznamenajme, že aj keď budeme často hovoriť o n-árnych predikátových a funkčných symboloch, v praxi sa stretávame s funkciami a predikátmi arity najviac 3. Predikátové a funkčné symboly arity 1 nazývame *unárne*, arity 2 *binárne* a arity 3 *ternárne*. Symboly pre konštanty sa niekedy interpretujú ako *nulárne* funkčné symboly.

Definícia 3.1.2 *Slovo* t *nad abecedou predikátovej logiky sa nazýva* ***term****, ak existuje taká postupnosť slov*

$$\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2, \ldots, \mathsf{s}_k,$$

že jej posledným členom je t *a pre každé* $i \in \{\ 1,\ 2, \ldots, k\}$ *je splnená práve jedna z týchto podmienok*

a) s_i *je symbolom pre premennú,*

b) s_i *je symbolom pre konštantu,*

c) s_i *má tvar* $f(\mathsf{s}_{i_1}, \mathsf{s}_{i_2}, \ldots, \mathsf{s}_{i_n})$, *kde* f *je* n*-árny funkčný symbol a* $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$ (*t. j. v argumente funkčného symbolu* f *sú predchádzajúce členy postupnosti*).

Postupnosť slov $\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2, \ldots, \mathsf{s}_k$ *sa nazýva* ***vytvárajúca postupnosť termu predikátovej logiky****.*

Definícia 3.1.3 ***Podterm*** *termu* t *je term, ktorý sa vyskytuje vo všetkých vytvárajúcich postupnostiach termu* t.

Príklad 3.1.5 Majme konštantný symbol $\boldsymbol{a}$ a dva funkčné symboly f, g, pričom f je binárny a g je unárny. Rozhodnime, či nasledujúce slová predikátovej logiky predstavujú term. Ak áno, napíšme vytvárajúcu postupnosť termu. Ak nie,vysvetlime dôvod.

a) $\mathsf{t}_1 : \boldsymbol{a}$

b) $\mathsf{t}_2 : f(x, \boldsymbol{a})$

c) $\mathsf{t}_3 : f(g(x))$

d) $\mathsf{t}_4 : f(\boldsymbol{a}, f(g(\boldsymbol{a}), x))$

Riešenie.

a) Slovo t_1 je term podľa definície 3.1.2 b), keďže je to symbol pre konštantu. Vytvárajúca postupnosť pozostáva z jedného člena $\boldsymbol{a}$.

b) Slovo t_2 je term, lebo existuje jeho vytvárajúca postupnosť: x, $\boldsymbol{a}$, $f(x, \boldsymbol{a})$.

c) Slovo $\mathtt{t}_3$ nie je term, lebo f je binárny funkčný symbol a v argumente má len jeden term.

d) Slovo $\mathtt{t}_4$ je term. Vytvárajúca postupnosť termu $\mathtt{t}_4$ je:

$$x, \boldsymbol{a}, g(\boldsymbol{a}), f(g(\boldsymbol{a}), x), f(\boldsymbol{a}, f(g(\boldsymbol{a}), x)).$$

□

Definícia 3.1.4 ***Základná (atomická) formula*** *je predikátový symbol aplikovaný na toľko termov, aká je jeho arita. To znamená, že ak arita predikátového symbolu P je číslo n a $\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2, \dots, \mathtt{t}_n$ sú termy, potom $P(\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2, \dots, \mathtt{t}_n)$ je základná formula.*

Príklad 3.1.6 Majme konštantný symbol $\boldsymbol{a}$, dva funkčné symboly f, g, pričom f je binárny a g je unárny a binárne predikátové symboly P, Q. Rozhodnime, či nasledujúce slová predikátovej logiky predstavujú základnú formulu. Vysvetlime dôvod.

a) $f(x, \boldsymbol{a})$

b) $Q(x, g(\boldsymbol{a}))$

c) $P(Q(x, \boldsymbol{a}), f(x, \boldsymbol{a}))$

d) $P(f(x, \boldsymbol{a}), g(x))$

Riešenie.

a) Slovo $f(x, \boldsymbol{a})$ nie je základná formula, lebo nemá požadovaný tvar, neobsahuje predikátový symbol.

b) Slovo $Q(x, g(\boldsymbol{a}))$ je základná formula, v argumente binárneho predikátového symbolu Q sú dva termy x a $g(\boldsymbol{a})$.

c) Slovo $P(Q(x, \boldsymbol{a}), f(x, \boldsymbol{a}))$ nie je základná formula, lebo prvý argument predikátového symbolu P je $Q(x, \boldsymbol{a})$, čo nie je term, lebo obsahuje predikátový symbol Q.

d) Slovo $P(f(x, \boldsymbol{a}), g(x))$ je základná formula, v argumente binárneho predikátového symbolu P sú dva termy $f(x, \boldsymbol{a})$ a $g(x)$.

□

Definícia 3.1.5 *Slovo α nad abecedou predikátovej logiky je* ***formula predikátovej logiky****, ak existuje taká postupnosť slov*

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

že jej posledným členom je α a pre každé $i \in \{\ 1,\ 2, \dots, n\}$ je splnená práve jedna z týchto podmienok:

a) α_i *je základná formula,*

b) α_i *je negácia niektorého prvku množiny* $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_{i-1}\}$*,*

c) α_i *je tvaru* $(\alpha_j \wedge \alpha_k)$, $(\alpha_j \vee \alpha_k)$, $(\alpha_j \Rightarrow \alpha_k)$, $(\alpha_j \Leftrightarrow \alpha_k)$ *pre nejaké* $j,\ k\ <\ i$*,*

d) α_i *je tvaru* $(\forall x)\alpha_j$ *alebo* $(\exists x)\alpha_j$ *pre nejaké* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$*, pričom na mieste* x *môže byť ľubovoľná premenná.*

Postupnosť slov $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ *sa nazýva* ***vytvárajúca postupnosť formuly predikátovej logiky****.*

V ďalšom texte vonkajšie (posledné) zátvorky vo formulách budeme vynechávať. Napríklad, budeme písať $\neg R(x) \wedge (P(y) \Rightarrow P(z))$ namiesto $(\neg R(x) \wedge (P(y) \Rightarrow$ $\Rightarrow P(z)))$. Základnú formulu, pred ktorú píšeme negáciu (aj viackrát), nedávame do zátvoriek. Píšeme $\neg P(x)$ a nie $\neg(P(x))$, ale tiež $\neg\neg\neg P(x)$ a nie $\neg(\neg(\neg P(x)))$. Pre skrátenie zápisu budeme písať $(\forall x_1, x_2, \dots, x_n)\varphi$ namiesto $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\varphi$, obdobne pre existenčný kvantifikátor.

Definícia 3.1.6 ***Podformula*** *formuly* α *je formula predikátovej logiky, ktorá sa vyskytuje vo všetkých vytvárajúcich postupnostiach formuly* α *(nie je možné ju z postupnosti vynechať).*

Formula $[(\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))] \Rightarrow R(\boldsymbol{a}, x)$ má podformuly $P(x)$, $Q(x,y)$, $R(\boldsymbol{a}, x)$, $P(x) \vee Q(x,y)$, $(\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))$ a nakoniec samu seba.

Definícia 3.1.7 ***Jazyk*** $\mathcal{L}$ *je súbor všetkých formúl a je určený špeciálnymi symbolmi. Jazyk predikátovej logiky často obsahuje binárny predikát rovnosti „=“ (budeme písať* $x = y$ *namiesto* $=(x,y)$*). Vtedy hovoríme o* ***jazyku s rovnosťou****. V opačnom prípade sa jedná o* ***jazyk bez rovnosti****.*

Uveďme príklady niektorých jazykov predikátovej logiky.

1. **Jazyk aritmetiky** je jazyk s rovnosťou bez ďalších predikátových symbolov (okrem rovnosti), $\mathsf{Func} = \{+, \cdot, g\}$ (sčítanie, násobenie a funkcia nasledovníka) a $\mathsf{Kons} = \{\boldsymbol{o}\}$.

2. **Jazyk teórie množín** je jazyk s rovnosťou, okrem predikátu rovnosti má binárny predikátový symbol $\in$, píšeme $x \in y$ namiesto $\in(x,y)$ a čítame „x patrí y“.

3. **Jazyk príbuzenstva** je jazyk s rovnosťou s unárnym predikátovým symbolom W „byť ženou“ a binárnym predikátovým symbolom $\triangleright$ „byť predkom niekoho“, píšeme $x \triangleright y$ a čítame „x je predkom y“.

Príklad 3.1.7 Určme, či nasledujúce slová sú formulami predikátovej logiky v jazyku s $\mathsf{Pred} = \{P,\ Q\}$, $\mathsf{Func} = \{f,\ g\}$ a $\mathsf{Kons} = \{\boldsymbol{a}\}$:

a) $(\forall x)(P(x, \boldsymbol{a}) \wedge P(f(x, \boldsymbol{a}), x))$,

b) $\neg P(x,x) \Rightarrow P(g(x), g(a))$,

c) $(\exists x)(x \wedge y)$,

d) $(\forall x)P(Q(x), \boldsymbol{a})$,

e) $f(x, g(y)) = g(f(x, y))$.

Ak áno, napíšme vytvárajúcu postupnosť danej formuly a jej základné podformuly.

Riešenie.

a) Je to formula predikátovej logiky. Jej základné podformuly sú $P(x, \boldsymbol{a})$ a $P(f(x, \boldsymbol{a}), x)$, vytvárajúca postupnosť: $P(x, \boldsymbol{a})$, $P(f(x, \boldsymbol{a}), x)$, $P(x, \boldsymbol{a}) \wedge \wedge P(f(x, \boldsymbol{a}), x)$, $(\forall x)(P(x, \boldsymbol{a}) \wedge P(f(x, \boldsymbol{a}), x))$.

b) Je to formula predikátovej logiky. Jej základné podformuly sú $P(x, x)$, $P(g(x), g(a))$, vytvárajúca postupnosť: $P(x, x)$, $P(g(x), g(\boldsymbol{a})), \neg P(x, x)$, $\neg P(x, x) \Rightarrow P(g(x), g(\boldsymbol{a}))$.

c) Nie je to formula predikátovej logiky, lebo x, y sú termy, a nie formuly, a teda nie je vytvorené žiadnym zo spôsobov, uvedených v definícii 3.1.5.

d) Nie je to formula predikátovej logiky, lebo v slove $P(Q(x), \boldsymbol{a})$ je v argumente predikátového symbolu opäť predikátový symbol, a nie term.

e) Je to základná formula, lebo $f(x, g(y))$ a $g(f(x, y))$ sú termy a symbol „ = “ je binárny predikátový symbol. □

Príklad 3.1.8 V jazyku s $\mathsf{Pred} = \{P,\ Q, =\}$, $\mathsf{Func} = \{f,\ g\}$ a $\mathsf{Kons} = \{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$, pričom Q, f sú binárne a P, g unárne pre nasledujúce slová určte, či sa jedná o term, alebo formulu predikátovej logiky, alebo to nie je ani term ani formula:

a) $f(x, g(f(\boldsymbol{a}, x)))$,

b) $(\forall x)Q(x, \boldsymbol{a}) \Leftrightarrow P(g(x))$,

c) $f(\boldsymbol{a}, x) = g(f(x, y))$,

d) $(x \wedge g(y)) \vee f(z, \boldsymbol{b})$,

e) $(\exists y)[P(Q(\boldsymbol{a}, g(y))) \vee P(f(x))]$,

f) $(\exists x)g(x) \Rightarrow Q(f(x), y)$.

Riešenie.

a) Je to term s vytvárajúcou postupnosťou $\boldsymbol{a}$, x, $f(\boldsymbol{a}, x)$, $g(f(\boldsymbol{a}, x))$, $f(x, g(f(\boldsymbol{a}, x)))$.

b) Je to formula s vytvárajúcou postupnosťou $Q(x, \boldsymbol{a})$, $P(g(x))$, $(\forall x)Q(x, \boldsymbol{a})$, $(\forall x)Q(x, \boldsymbol{a}) \Leftrightarrow P(g(x))$.

c) Je to základná formula, lebo „=“ je binárny predikátový symbol a $f(\boldsymbol{a}, x)$, $g(f(x, y))$ sú termy.

d) Nie je to term, lebo term neobsahuje logické spojky a nie je to ani formula, lebo logické spojky „spájajú“ formuly, nie termy, ako je to v tomto slove.

e) Nie je to term, lebo obsahuje predikátové symboly a logické spojky a nie je to ani formula, lebo podslovo $P(Q(\boldsymbol{a}, g(y)))$ nie je základnou formulou, v argumente predikátového symbolu je predikátový symbol.

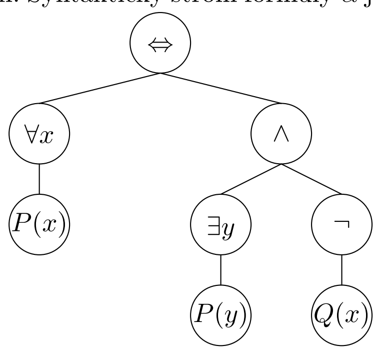
f) Nie je to term ani formula, kvantifikátory sa musia viazať na formuly, nie na termy.

Príklad 3.1.9 Napíšme vytvárajúcu postupnosť a znázornime syntaktický strom pre formulu

$$\alpha : (\forall x)P(x) \Leftrightarrow [(\exists y)P(y) \wedge \neg Q(x)]$$

Riešenie. Vytvárajúca postupnosť je: $P(x)$, $P(y)$, $Q(x)$, $(\forall x)P(x)$, $(\exists y)P(y)$, $\neg Q(x)$, $(\exists y)P(y) \wedge \neg Q(x)$, $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow [(\exists y)P(y) \wedge \neg Q(x)]$.

Syntaktický strom formuly predikátovej logiky vytvárame obdobne ako vo výrokovej logike s tým rozdielom, že koncové vrcholy prislúchajú základným formulám, nie výrokovým premenným a vnútorné vrcholy môžu prislúchať okrem logických spojok aj kvantifikátorom. Syntaktický strom formuly α je znázornený na obrázku.



Veta 3.1.1 (O substitúcii)

a) Ak nahradíme v terme príslušného jazyka akýkoľvek jeho podterm iným termom, dostaneme opäť term.

b) Ak nahradíme vo formule akúkoľvek jej podformulu inou formulou, dostaneme opäť formulu.

c) Ak nahradíme vo formule term, ktorý sa nenachádza bezprostredne za kvantifikátorom, iným termom, dostaneme opäť formulu.

Príklad 3.1.10

a) Ak v terme $f(g(x), f(y, \boldsymbol{a}))$ nahradíme term x termom $f(\boldsymbol{a}, x)$ dostaneme $f(g(f(\boldsymbol{a}, x)), f(y, \boldsymbol{a}))$, čo je opäť term.

b) Vo formule $\neg P(x, x) \Rightarrow P(g(x), g(a))$ nahradíme podformulu $P(x, x)$ formulou $P(x, y) \Rightarrow \neg Q(x)$, dostaneme formulu $\neg(P(x, y) \Rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow P(g(x), g(\boldsymbol{a}))$.

c) Ak vo formule $(\forall x)P(x, y) \Rightarrow \neg Q(f(x, y))$ nahradíme všetky výskyty premennej (termu) x, okrem výskytu bezprostredne za kvantifikátorom, termom $g(\boldsymbol{a})$ dostaneme formulu $(\forall x)P(g(\boldsymbol{a}), y) \Rightarrow \neg Q(f(g(\boldsymbol{a}), y))$.

d) Ak vo formule $(\forall x)P(x)$ nahradíme všetky výskyty premennej x termom $f(x)$, dostaneme slovo $\forall f(x)P(f(x))$, ktoré nie je formulou predikátovej logiky, lebo za kvantifikátorom musí nasledovať premenná. $\square$

3.1.3 Substituovateľnosť termov

V jazyku príbuzenstva majme formulu $\varphi: (\exists y)(x \triangleright y)$, ktorá v bežnej reči znamená, že človek x má nejakého potomka y. Táto formula vypovedá len o premennej x, kým y je pomocná premenná. Budeme hovoriť o voľnom výskyte (premenná x) a viazanom výskyte (premenná y) premenných vo formule.

Definícia 3.1.8

*a) V základnej formule sú všetky výskyty všetkých premenných **voľné**.*

b) Logické spojky nemenia charakter výskytu premenných.

*c) Vo formule $(\forall x)\varphi$ resp. $(\exists x)\varphi$ je každý výskyt premennej x vo formule φ **viazaný**. Každý voľný (resp. viazaný) výskyt premennej rôznej od x je voľný (resp. viazaný) aj vo formule $(\forall x)\varphi$ resp. $(\exists x)\varphi$.*

*Formula je **uzavretá**, keď v nej žiadna premenná nemá voľný výskyt. Formula je **otvorená**, keď v nej žiadna premenná nemá viazaný výskyt.*

***Uzáverom** formuly φ nazývame formulu tvaru $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_k)\varphi$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú všetky premenné, ktoré majú vo formule φ voľný výskyt. Uzáver formuly budeme označovať symbolom $\boldsymbol{cl(\varphi)}$.*

Definícia 3.1.9 *Term $\mathtt{t}$ je **substituovateľný za premennú** x vo formule φ práve vtedy, keď sa žiadna premenná termu $\mathtt{t}$ nestane viazanou po nahradení každého voľného výskytu premennej x termom $\mathtt{t}$ vo formule φ.*

Ak vo formule φ nemá premenná x voľný výskyt, prípadne sa vo formule nenachádza, potom každý term $\mathtt{t}$ je substituovateľný za premennú x vo formule φ .

Budeme písať $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, keď žiadna premenná okrem premenných $x_1, x_2, \ldots x_k$ nemá vo formule φ voľný výskyt.

Nech $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú navzájom rôzne premenné. Budeme označovať symbolom $\varphi(x_1/\mathtt{t}_1, x_2/\mathtt{t}_2, \ldots, x_k/\mathtt{t}_k)$ formulu, ktorá vznikne z formuly φ súčasným nahradením každého voľného výskytu každej z premenných x_i pre $i \leqq k$ termom $\mathtt{t}_i$.

Príklad 3.1.11 V nasledujúcich formulách označme všetky voľné a viazané výskyty premenných. Určme, či je formula uzavretá, otvorená alebo nie je ani uzavretá ani otvorená:

a) $(\forall x)[x \in y \Leftrightarrow (\exists y)\, y \notin x]$ [2],

[2] Píšeme $y \notin x$ namiesto $\neg(y \in x)$

b) $(\forall x)[Q(x) \Rightarrow (\exists y)P(y, f(\boldsymbol{b}, x))]$,

c) $\neg Q(x) \vee (P(x, \boldsymbol{a}) \Rightarrow Q(y))$.

Riešenie. Voľný výskyt premennej budeme označovať písmenom f (z angl. *free*), viazaný písmenom b (z angl. *bounded*), napr. $f(x)$, $b(y), \ldots$

a) Všetky výskyty premennej x sú viazané, lebo sú vo formule $(\forall x)\varphi$, kde $\varphi :\ x \in y \Leftrightarrow (\exists y)\, y \notin x$. U premennej y je prvý výskyt voľný (nevzťahuje sa na ňu kvantifikátor) a druhý výskyt je viazaný, lebo je vo formule $(\exists y)\psi$, kde $\psi :\ y \notin x$. Môžeme to zapísať nasledovne: $b(x)$, $b(x)$, $f(y)$, $b(y)$, $b(y)$, $b(x)$. Formula nie je uzavretá, lebo premenná y má aj voľný výskyt, ale nie je ani otvorená, lebo existujú premenné s viazaným výskytom.

b) Všetky výskyty premenných x, y sú viazané. Formula je uzavretá.

c) Vo formule nie je žiaden kvantifikátor, teda obidve premenné majú len voľné výskyty. Formula je otvorená. $\square$

Príklad 3.1.12 Určme, či vo formule $\varphi :\ (\forall x)(x \in y \Leftrightarrow (\exists y) y \notin x)$ je:

a) term $f(\boldsymbol{a}, y)$ substituovateľný za premennú y,

b) term $f(\boldsymbol{a}, x)$ substituovateľný za premennú y.

Riešenie. Nezabúdajme na to, že nahrádzame len voľné výskyty premenných. V našom príklade má premenná y voľný len prvý výskyt, druhý výskyt je viazaný.

a) Dostaneme formulu $\varphi(y/f(\boldsymbol{a}, y)) : (\forall x)(x \in f(\boldsymbol{a}, y) \Leftrightarrow (\exists y) y \notin x)$. Žiadna premenná s voľným výskytom sa nestala viazanou, a teda term $f(\boldsymbol{a}, y)$ je substituovateľný za premennú y vo formule φ.

b) Dostaneme formulu $\varphi(y/f(\boldsymbol{a}, x)) : (\forall x)(x \in f(\boldsymbol{a}, x) \Leftrightarrow (\exists y) y \notin x)$. Na mieste premennej y s voľným výskytom sme dostali premennú x s viazaným výskytom. Term $f(\boldsymbol{a}, x)$ nie je substituovateľný za premennú y vo formule φ. $\square$

Úlohy

3.1 Napíšte formuly predikátovej logiky zodpovedajúce nasledujúcim vetám. Použite predikátové symboly uvedené v texte:

a) Niekto má matematické nadanie (M) a niekto nie.

b) Nie každý usilovný študent (U) má na vysvedčení samé jednotky (J).

c) Len deti (D) majú vstup do bábkového divadla zdarma (Z).

d) Nie každý človek (C), ktorý vyštudoval medicínu (M), je dobrý lekár (L).

e) Mliečnu desiatu (M) nedostávajú len žiaci (Z).

3.2 Pre nasledujúce vety uveďte predikáty, konštantné symboly a funkčné symboly, ktoré potrebujete na formalizáciu a napíšte zodpovedajúce formuly:

a) Adam vie matematiku aj fyziku.

b) Každý, kto vie fyziku, vie aj chémiu.

c) Niekto vie matematiku alebo chémiu.

d) Nikto, kto vie fyziku aj chémiu, nevie súčasne aj matematiku.

e) Každý, kto vie matematiku alebo chémiu, vie aj fyziku.

f) Nikto nevie matematiku aj fyziku.

3.3 Pre nasledujúce vety uveďte predikáty, konštantné symboly a funkčné symboly, ktoré potrebujete na formalizáciu a napíšte zodpovedajúce formuly:

a) Všetky sladké potraviny sú nezdravé.

b) Niektoré mliečne výrobky sú zdravé, aj keď sú sladké.

c) Jedlo je zdravé práve vtedy, keď nie je sladké alebo keď je to mliečny výrobok.

d) Nie všetky mliečne výrobky sú zdravé.

e) Tento sladký jogurt je zdravý.

3.4 Použite jazyk určený unárnymi predikátovými symbolmi : $S(x) - x$ je študentom, $U(x) - x$ je usilovný $A(x) - x$ vie hovoriť po anglicky na sformalizovanie výrokov, pričom univerzom je množina ľudí:

a) Nie každý človek je študentom.

b) Každý usilovný študent vie po anglicky.

c) Niektorí ľudia, ktorí vedia po anglicky, nie sú študenti.

d) Každý človek vie po anglicky práve vtedy, keď je usilovný.

e) Človek vie po anglicky, keď je usilovný alebo je študent.

f) Žiaden človek, ktorý nevie po anglicky, nie je usilovný študent.

3.5

Použite jazyk určený unárnymi predikátovými symbolmi : $S(x) - x$ vie strieľať, $Z(x) - x$ má zbraň, $P(x) - x$ je policajt a unárnym funkčným symbolom $m(x) -$ priradí človeku x jeho matku na sformalizovanie výrokov:

a) Matka žiadneho policajta nemá zbraň.

b) Nie všetci policajti majú zbraň.

c) Nie každý, kto vie strieľať a má zbraň, musí byť policajt.

d) Každý policajt, ktorý má zbraň, vie strieľať.

e) Nejaký policajt má matku policajtku.

f) Matka žiadneho policajta nevie strieľať.

g) Človek je policajt práve vtedy ak vie strieľať alebo jeho matka je policajtka.

h) Nejaká policajtka nemá syna policajta.

3.6 Použite jazyk určený unárnymi predikátmi: $M(x) - x$ je maliarom, $H(x) - x$ je hudobníkom, $W(x) - x$ je ženou a unárnymi funkčnými symbolmi: $m(x) -$ priradí človeku x matku, $o(x) -$ priradí človeku x otca na formalizáciu výrokov:

a) Evina matka je maliarka.

b) Niečí otec je hudobník.

c) Niekto má matku maliarku a otca hudobníka.

d) Nie každý má otca hudobníka alebo matku maliarku.

e) Niekto nemá obidvoch rodičov maliarov.

f) Žiadny maliar nemá otca hudobníka.

g) Každý, kto nemá otca hudobníka, má matku maliarku.

h) Niektorí maliari majú oboch rodičov maliarov.

3.7 Vyjadrite výrokmi v jazyku z predchádzajúceho príkladu nasledujúce formuly:

a) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg H(o(x)) \wedge \neg H(m(x)))$,

b) $(\forall x)(M(x) \Rightarrow (M(m(x)) \vee M(o(x))))$,

c) $(\exists x)(H(o(x)) \vee H(m(x)))$,

d) $(\forall x)[M(x) \Rightarrow (\neg H(o(x)) \vee \neg H(m(x)))]$,

e) $(\exists x)[(H(o(x)) \wedge M(m(x))) \vee (M(o(x)) \wedge H(m(x)))]$,

f) $(\exists x)[(H(x) \vee M(x)) \wedge [(\neg H(o(x)) \wedge \neg M(o(x)) \vee (\neg H(m(x)) \wedge \neg M(m(x)))]]$.

3.8 V jazyku, s binárnym predikátom $P(x, y) -$ človeku x sa páči človek y, unárnymi predikátmi $D(x) - x$ je dievča a $C(x) - x$ je chlapec nájdite výroky zodpovedajúce nasledujúcim formulám:

a) $(\exists x)[D(x) \wedge (\forall y)(C(y) \Rightarrow P(x, y))]$,

b) $(\exists x)[D(x) \wedge (\forall y)(C(y) \Rightarrow P(y, x))]$,

c) $(\forall x)[D(x) \Rightarrow (\exists y)(C(y) \wedge P(x, y))]$,

d) $(\forall x)[D(x) \Rightarrow (\exists y)(C(y) \wedge P(y, x))]$,

e) $(\exists x)[C(x) \wedge (\forall y)(D(y) \Rightarrow P(x, y))]$,

f) $(\exists x)[C(x) \wedge (\forall y)(D(y) \Rightarrow P(y, x)]$,

g) $(\forall x)[C(x) \Rightarrow (\exists y)(D(y) \wedge P(x, y))]$,

h) $(\forall x)[C(x) \Rightarrow (\exists y)(D(y) \wedge P(y, x))]$.

3.9 Nájdite formulu v jazyku príbuzenstva, ktorá zodpovedá nasledujúcim výrokom:

a) Každý človek má nejakého mužského predka.
b) Eva má dieťa.
c) Eva a Peter sú súrodenci. (Majú aspoň jedného spoločného rodiča)
d) Eva je Petrova stará mama.
e) Niektorí ľudia majú spoločného ženského predka.
f) Každý človek má aspoň dvoch potomkov.(Neuvažujeme len deti)
g) Niekto má len mužských potomkov.
h) Každý má mužského aj ženského predka.

3.10 V jazyku príbuzenstva nájdite zodpovedajúce k formulám:

a) $(\forall x)(\neg W(x) \Rightarrow (\exists y)(x \rhd y))$
b) $(\forall x)(W(x) \Rightarrow (\exists y)((x \rhd y) \wedge \neg W(y)))$
c) $(\forall x)(\exists y)[((y \rhd x) \wedge \neg W(y)) \wedge (\forall z)(\neg(y \rhd z) \vee \neg(z \rhd x))]$
d) $(\exists x, y, z)(x \neq y \wedge z \rhd x \wedge z \rhd y \wedge \neg W(z))$
e) $(\exists x)(\forall y)((x \rhd y) \Rightarrow W(y))$
f) $(\forall x)(\exists y, z)(y \rhd x \wedge z \rhd x \wedge y \neq z)$

3.11 Použite jazyk určený s unárnymi predikátmi $O(x) - x$ je opera a $C(x) - x$ je človek, binárnymi predikátmi $N(x, y) -$ človek x napísal operu y a $V(x, y) -$ človek x videl operu y na formalizáciu nasledujúcich výrokov a zadefinujte potrebné konštanty:

a) Adam videl všetky Dvořákove opery.
b) Niekto videl operu Rusalka.
c) Každý videl nejakú Dvořákovu operu.
d) Nie každý videl všetky Dvořákove opery.
e) Niekto nevidel žiadnu operu.
f) Adam nevidel všetky opery.

3.12 Nájdite výroky zodpovedajúce nasledujúcim formulám v jazyku s binárnym predikátom $R(x, y) - x$ má rád y, unárnym predikátom $M(x) - x$ má modré oči a unárnou funkciou $m(x) -$ priradí človeku x matku:

a) $M(m(\boldsymbol{e}))$,
b) $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$,

c) $(\exists x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow M(y))$,

d) $(\forall x)R(x,m(x))$,

e) $(\exists x)(M(x) \wedge \neg M(m(x)))$,

f) $(\exists x)(\forall y)(\neg M(y) \Rightarrow R(x,y))$,

g) $(\exists x)(\forall y)(M(y) \Rightarrow \neg R(x,y))$,

h) $(\forall x)(M(x) \Rightarrow M(m(m(x))))$.

3.13 Použite jazyk s rovnosťou určený unárnymi predikátovými symbolmi: $P(x) - x$ je párne číslo, $T(x) - x$ je číslo deliteľné tromi, $S(x) - x$ je číslo deliteľné šiestimi a unárnym funkčným symbolom $f(x)$ – priradí prirodzenému číslu x jeho druhú mocninu na formalizáciu výrokov:

a) Druhá mocnina každého párneho čísla je párne číslo.

b) Ak je číslo deliteľné šiestimi, je deliteľné dvomi aj tromi.

c) Druhá mocnina nejakého čísla sa rovná súčtu druhých mocnín nejakých dvoch čísel.

d) Druhá mocnina je párne číslo, len ak dané číslo je párne.

e) Nie každé číslo deliteľné tromi je deliteľné aj šiestimi.

f) Niektoré čísla predstavujú druhú mocninu iného čísla.

g) Ak je druhá mocnina čísla deliteľná tromi, je aj toto číslo deliteľné tromi.

3.14

Použite jazyk s rovnosťou určený binárnym predikátovým symbolom $R(x,y)$ – číslo x je deliteľom čísla y a unárnym funkčným symbolom $f(x)$ – priradí prirodzenému číslu x jeho druhú mocninu, na formalizáciu výrokov:

a) Každé číslo je deliteľom seba samého.

b) Každé číslo je deliteľom svojej druhej mocniny.

c) Existujú také čísla x, že x je deliteľom y a x^2 je deliteľom y^2.

d) Nejaké číslo je deliteľom všetkých čísel.

e) Každé číslo má nejakého deliteľa.

f) Ak číslo x je deliteľom čísla y, potom je aj deliteľom jeho druhej mocniny.

g) Existujú také dve čísla, že prvé je deliteľom druhého a druhé je deliteľom prvého.

3.15 Napíšte vytvárajúcu postupnosť nasledujúcich termov:

a) $(f(g(\boldsymbol{a},x)) + g(y,\boldsymbol{b})) \cdot f(f(\boldsymbol{a}))$,

b) $f(f(g(x)), f(y,\boldsymbol{a}))$,

c) $(x \cdot y) + (g(\boldsymbol{o} + g(x)) \cdot (x + g(\boldsymbol{o})))$,

d) $f(x, g(\boldsymbol{a})) \cdot g(f(g(y), \boldsymbol{a})) + f(x + g(y), g(g(\boldsymbol{b})))$.

3.16 V jazyku s $\mathsf{Pred} = \{P,\ Q, =\}$, $\mathsf{Func} = \{f,\ g\}$ a $\mathsf{Kons} = \{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$, pričom Q, f sú binárne a P, g unárne pre nasledujúce slová určte, či sa jedná o term, alebo formulu predikátovej logiky, alebo to nie je ani term ani formula:

a) $f(x, g(\boldsymbol{a})) \cdot g(f(g(y), \boldsymbol{a}))$,

b) $f(\boldsymbol{a}, x) \cdot y = Q(z, \boldsymbol{b})$,

c) $(\exists x)Q(x, \boldsymbol{a}) \Rightarrow y = z \cdot \boldsymbol{a}$,

d) $(\forall x)(x \wedge y \vee z)$,

e) $f(\boldsymbol{b}, x) \cdot g(f(\boldsymbol{a}, y))$,

f) $(\exists y)[Q(\boldsymbol{a}, P(y)) \vee \neg(x = y)]$,

g) $g(\boldsymbol{a}) \cdot f(y, \boldsymbol{b}) = z$,

h) $(\exists x)P(x) \Rightarrow f(x, y)$.

3.17 V jazyku z predchádzajúceho príkladu rozhodnite, ktoré z nasledujúcich slov predikátovej logiky sú formuly. V prípade, že sa jedná o formulu, vypíšte jej základné podformuly a zapíšte vytvárajúcu postupnosť. Ak sa nejedná o formulu, napíšte dôvod:

a) $\varphi_1 :\ Q(f(\boldsymbol{a}), g(\boldsymbol{b}))$,

b) $\varphi_2 :\ P(f(x, g(x))) \Rightarrow \neg Q(\boldsymbol{a}, g(x))$,

c) $\varphi_3 :\ (\forall x)P(f(x, \boldsymbol{b})) \Leftrightarrow (\exists y)(P(y) \vee Q(\boldsymbol{a}, f(y, g(\boldsymbol{b}))))$,

d) $\varphi_4 :\ (\forall x)P(f(x, b)) \Rightarrow (\exists y)Q(g(y), P(y))$,

e) $\varphi_5 :\ (\exists x)P(Q(x, y)) \Rightarrow Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,

f) $\varphi_6 :\ (\forall x)[P(x) \Leftrightarrow (\exists y)Q(y, f(\boldsymbol{b}, y))]$.

3.18 Pre nasledujúce formuly napíšte ich vytvárajúcu postupnosť a znázornite syntaktický strom:

a) $(\exists x)(\neg P(x) \vee (\forall y)\neg Q(x, y))$,

b) $[((\forall x)P(f(x)) \Rightarrow P(g(z))] \Leftrightarrow Q(x)) \vee \neg(\exists y)Q(y)$.

c) $(\exists y)[[\neg(z \rhd y) \wedge (y \rhd x)] \Rightarrow [(z \rhd x) \vee (\forall z)(x \rhd z)]]$,

3.19 V nasledujúcich formulách označte všetky voľné a viazané výskyty premenných. Určte, či je formula uzavretá, otvorená alebo nie je ani uzavretá ani otvorená. Svoje tvrdenie zdôvodnite:

a) $x \in y \Rightarrow (\forall x)[y \in x \vee (\exists y)x \notin y]$,

b) $Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \wedge (\exists x)(\forall y)Q(x, y)$,

c) $\neg(x \triangleright y) \Rightarrow (\exists z)(W(z) \wedge (\forall y)(z \triangleright y))$,

d) $P(h(x, g(x))) \Rightarrow \neg Q(\boldsymbol{a}, g(x))$,

e) $(\exists z)(z \triangleright x) \vee (\forall y)(\exists x)((z \triangleright y) \wedge W(x))$,

f) $(\forall x)[P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x, f(\boldsymbol{b}, x))]$.

3.20 Rozhodnite, či v danej formule φ je term substituovateľný za premennú. Svoje tvrdenie odôvodnite:

a) $x + y$ za y, $\varphi:\ (\forall x)[x \in y \Rightarrow (\exists y)y \notin x]$,

b) $y + \boldsymbol{a}$ za y, $\varphi:\ (\forall x)[x \in y \Rightarrow (\exists y)y \notin x]$,

c) z za y, $\varphi: \neg(x \triangleright y) \Rightarrow (\exists z)(W(z) \wedge (\forall y)(z \triangleright y))$,

d) $g(x + \boldsymbol{a})$ za x, $\varphi:\ P(h(x, g(x))) \Rightarrow \neg Q(\boldsymbol{a}, g(x))$,

e) $f(y)$ za x, $\varphi:\ (\exists z)z \triangleright x \vee (\forall y)(\exists x)(z \triangleright y \wedge W(x))$,

f) $f(y)$ za z, $\varphi:\ (\exists z)z \triangleright x \vee (\forall y)(\exists x)(z \triangleright y \wedge W(x))$,

g) $f(x, y)$ za y, $\varphi:\ (\forall x)P(f(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y)(P(y) \vee Q(\boldsymbol{a}, f(y, g(\boldsymbol{b}))))$,

h) $f(\boldsymbol{a}, y)$ za y, $\varphi:\ (\exists x)P(f(x, y)) \Rightarrow Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,

i) $f(\boldsymbol{a}, x)$ za y, $\varphi:\ (\exists x)P(f(x, y)) \Rightarrow Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.,

j) $f(x, y)$ za y, $\varphi:\ W(x) \wedge W(y) \Rightarrow\ (\forall x)[x \triangleright y \Rightarrow (\exists y)\neg(y \triangleright x)]$,

k) $f(x, y)$ za x, $\varphi:\ W(x) \wedge W(y) \Rightarrow\ (\forall x)[x \triangleright y \Rightarrow (\exists y)\neg(y \triangleright x)]$

l) $f(x, y)$ za x, $\varphi: ((\forall x)Q(x, y) \vee P(f(x, y))) \Leftrightarrow (\exists y)(P(y) \vee Q(x, f(y, g(y))))$,

m) $f(y, \boldsymbol{a})$ za y, $\varphi: ((\forall x)Q(x, y) \vee P(f(x, y))) \Leftrightarrow (\exists y)(P(y) \vee Q(x, f(y, g(y))))$,

n) $f(x, z)$ za z, $\varphi:\ (\exists y)P(z, f(x, y)) \Rightarrow (\exists x)\neg Q(g(x)) \vee (\forall z)P(x, z)$,

o) $f(x, z)$ za x, $\varphi:\ (\exists y)P(z, f(x, y)) \Rightarrow (\exists x)\neg Q(g(x)) \vee (\forall z)P(x, z)$,

p) $f(x, y)$ za x, $\varphi:\ ((\forall x)x \in f(x, y) \Rightarrow x = y) \wedge (\exists y)y \in g(x, y)$,

q) $f(\boldsymbol{a}, y)$ za y, $\varphi:\ ((\forall x)x \in f(x, y) \Rightarrow x = y) \wedge (\exists y)y \in g(x, y)$,

r) $f(y)$ za z, $\varphi:\ (\exists z)z \triangleright x \vee (\forall y)(\exists x)(z \triangleright y \wedge W(x))$.

Výsledky

3.1 a) $(\exists x)M(x) \wedge (\exists x)\neg M(x)$,

b) $\neg[(\forall x)(U(x) \Rightarrow J(x))]$ alebo $(\exists x)(U(x) \wedge \neg J(x))$,

c) $(\forall x)(Z(x) \Rightarrow D(x))$,

d) $\neg[(\forall x)((C(x) \wedge M(x)) \Rightarrow L(x))]$ alebo $(\exists x)(C(x) \wedge M(x) \wedge \neg L(x))$,

e) $(\exists x)(\neg Z(x) \wedge M(x))$.

3.2 Objekty sú ľudia. Unárne predikátové symboly: $M(x) - x$ vie matematiku, $F(x) - x$ vie fyziku, $C(x) - x$ vie chémiu. Konštantný symbol $\boldsymbol{a}$- Adam.

a) $M(\boldsymbol{a}) \wedge F(\boldsymbol{a})$,

b) $(\forall x)(F(x) \Rightarrow C(x))$,

c) $(\exists x)(M(x) \vee C(x))$,

d) $(\forall x)((F(x) \wedge C(x)) \Rightarrow \neg M(x))$,

e) $(\forall x)((M(x) \vee C(x)) \Rightarrow F(x))$,

f) $(\forall x)(\neg M(x) \vee \neg F(x))$.

3.3 Objekty sú potraviny. Predikátové symboly: $Z(x) - x$ je zdravý, $S(x) - x$ je sladký, $M(x) - x$ je vyrobený z mlieka. Konštantný symbol $\boldsymbol{j}$ – tento jogurt.

a) $(\forall x)(S(x) \Rightarrow \neg Z(x))$,

b) $(\exists x)(M(x) \wedge Z(x) \wedge S(x))$,

c) $(\forall x)(Z(x) \Leftrightarrow (\neg S(x) \vee M(x)))$,

d) $(\exists x)(M(x) \wedge \neg Z(x))$,

e) $Z(\boldsymbol{j}) \wedge S(\boldsymbol{j})$.

3.4 a) $(\exists x)\neg S(x)$,

b) $(\forall x)((U(x) \wedge S(x)) \Rightarrow A(x))$,

c) $(\exists x)(A(x) \wedge \neg S(x))$,

d) $(\forall x)(A(x) \Leftrightarrow U(x))$,

e) $(\forall x)((U(x) \vee S(x)) \Rightarrow A(x))$,

f) $(\forall x)(\neg A(x) \Rightarrow (\neg S(x) \vee \neg U(x)))$.

3.5 a) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow \neg Z(m(x)))$,

b) $(\exists x)((P(x) \wedge \neg Z(x))$,

c) $(\exists x)(Z(x) \wedge S(x) \wedge \neg P(x))$,

d) $(\forall x)((P(x) \wedge Z(x)) \Rightarrow S(x))$,

e) $(\exists x)(P(x) \wedge P(m(x)))$,

f) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow \neg S(m(x)))$,

g) $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow (S(x) \vee P(m(x))))$,

h) $(\exists x)(\neg P(x) \wedge P(m(x)))$

3.6 Konštantný symbol $\boldsymbol{e}$- Eva.

a) $M(m(\boldsymbol{e}))$,

b) $(\exists x)H(o(x))$,

c) $(\exists x)(M(m(x)) \wedge H(o(x))$,

d) $\neg[(\forall x)(M(m(x)) \vee H(o(x))]$ alebo $(\exists x)(\neg M(m(x)) \wedge \neg H(o(x)))$,

e) $(\exists x)\neg[M(m(x)) \wedge M(o(x))]$ alebo $(\exists x)(\neg M(m(x) \vee \neg M(o(x))))$,

f) $(\forall x)(M(x) \Rightarrow \neg H(o(x)))$,

g) $(\forall x)(\neg H(o(x)) \Rightarrow M(m(x)))$,

h) $(\exists x)(M(x) \wedge M(o(x)) \wedge M(m(x)))$.

3.7 a) Niektorí hudobníci nemajú ani jedného rodiča hudobníka.

b) Každý maliar má aspoň jedného rodiča maliara.

c) Niekto má niektorého rodiča hudobníka.

d) Žiaden maliar nemá oboch rodičov hudobníkov.

e) Niekto má jedného rodiča maliara a druhého hudobníka.

f) Nie každý umelec (maliar alebo hudobník) má oboch rodičov umelcov.

3.8 a) Nejakému dievčaťu sa páčia všetci chlapci.

b) Nejaké dievča sa páči všetkým chlapcom.

c) Každému dievčaťu sa páči nejaký chlapec.

d) Každé dievča sa páči nejakému chlapcovi.

e) Nejakému chlapcovi sa páčia všetky dievčatá.

f) Nejaký chlapec sa páči všetkým dievčatám.

g) Každému chlapcovi sa páči nejaké dievča.

h) Každý chlapec sa páči nejakému dievčaťu.

3.9 Použijeme konštantné symboly: $\boldsymbol{e}$ – Eva a $\boldsymbol{p}$ – Peter.

a) $(\forall x)(\exists y)(y \triangleright x \wedge \neg W(y))$,

b) $(\exists x)[\boldsymbol{e} \triangleright x \wedge (\forall y)(\neg(\boldsymbol{e} \triangleright y) \vee \neg(y \triangleright x))]$,

c) $(\exists x)[x \triangleright \boldsymbol{e} \wedge x \triangleright \boldsymbol{p} \wedge (\forall y)(\neg(x \triangleright y) \vee \neg(y \triangleright \boldsymbol{e})) \wedge (\neg(x \triangleright y) \vee \neg(y \triangleright \boldsymbol{p}))]$,

d) $(\exists x)[\boldsymbol{e} \triangleright x \wedge x \triangleright \boldsymbol{p} \wedge (\forall y)((\neg(\boldsymbol{e} \triangleright y) \vee \neg(y \triangleright x)) \wedge (\neg(x \triangleright y) \vee \neg(y \triangleright \boldsymbol{p}))]$,

e) $(\exists x, y, z)(x \neq y \wedge z \triangleright x \wedge z \triangleright y \wedge W(z))$,

f) $(\forall x)(\exists y, z)(x \triangleright y \wedge x \triangleright z \wedge y \neq z)$,

g) $(\exists x)(\forall y)(x \triangleright y \Rightarrow \neg W(y))$,

h) $(\forall x)(\exists y, z)((y \triangleright x) \wedge (z \triangleright x) \wedge W(y) \wedge \neg W(z))$.

3.10 a) Každý muž má potomka.

b) Každá žena má mužského potomka.

c) Každý človek má otca.

d) Niektorí ľudia majú spoločného mužského predka.

e) Niekto má len ženských potomkov.

f) Každý má aspoň dvoch predkov.

3.11 Konštantné symboly: $\boldsymbol{a}$ – Adam, $\boldsymbol{d}$ – Dvořák, $\boldsymbol{r}$ – opera Rusalka.

a) $(\forall x)((O(x) \wedge N(\boldsymbol{d}, x)) \Rightarrow V(\boldsymbol{a}, x))$,

b) $(\exists x)(C(x) \wedge V(x, \boldsymbol{r}))$,

c) $(\forall x)(\exists y)(C(x) \wedge O(y) \wedge V(x, y) \wedge N(\boldsymbol{d}, y))$,

d) $(\exists x)(\exists y)(C(x) \wedge O(y) \wedge N(\boldsymbol{d}, y) \wedge \neg V(x, y))$,

e) $(\exists x)(\forall y)((C(x) \wedge O(y)) \Rightarrow \neg V(x, y))$,

f) $(\exists x)(O(x) \wedge \neg V(\boldsymbol{a}, x))$.

3.12 a) Evina matka má modré oči.

b) Každý má niekoho rád.

c) Niekto má rád len ľudí s modrými očami.

d) Každý ma rád svoju matku.

e) Niektorí modrookí ľudia nezdedili modré oči po matke.

f) Niekto má rád všetkých ľudí, ktorí nemajú modré oči.

g) Niekto nemá rád ľudí, ktorí majú modré oči.

h) Každý človek s modrými očami má starú mamu z matkinej strany s modrými očami.

3.13 a) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow P(f(x)))$,

b) $(\forall x)(S(x) \Rightarrow (P(x) \wedge T(x)))$,

c) $(\exists x)(\exists y)(\exists z) f(x) = f(y) + f(z)$,

d) $(\forall x)(\neg P(x) \Rightarrow \neg P(f(x)))$,

e) $(\exists x)(T(x) \wedge \neg S(x))$,

f) $(\exists x)(\exists y) y = f(x)$,

g) $(\forall x)(T(f(x)) \Rightarrow T(x))$.

3.14 a) $(\forall x)R(x,x)$,

b) $(\forall x)R(x,f(x))$,

c) $(\exists x)(\exists y)(R(x,y) \wedge R(f(x),f(y)))$,

d) $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$,

e) $(\forall x)(\exists y)R(y,x)$,

f) $R(x,y) \Rightarrow R(x,f(y))$,

g) $(\exists x)(\exists y)(R(x,y) \wedge R(y,x))$.

3.15 a) $x,\ y,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ g(\boldsymbol{a},x),\ f(g(\boldsymbol{a},x)),\ g(y,\boldsymbol{b}),\ f(g(\boldsymbol{a},x))+g(y,\boldsymbol{b}),$
$f(\boldsymbol{a}),\ f(f(\boldsymbol{a})), (f(g(\boldsymbol{a},x))+g(y,\boldsymbol{b}))\cdot f(f(\boldsymbol{a}))$,

b) $x,\ y,\ \boldsymbol{a},\ g(x),\ f(y,\boldsymbol{a}),\ f(g(x),f(y,\boldsymbol{a})),\ f(f(g(x),f(y,\boldsymbol{a})))$,

c) $\boldsymbol{o},\ x,\ y,\ x\cdot y,\ g(x),\ g(\boldsymbol{o}),\ x+g(\boldsymbol{o}),\ \boldsymbol{o}+g(x),\ g(\boldsymbol{o}+g(x)),$
$(g(\boldsymbol{o}+g(x)))\cdot(x+g(\boldsymbol{o})),\ (x\cdot y)+(g(\boldsymbol{o}+g(x)))\cdot(x+g(\boldsymbol{o}))$,

d) $x,\ y,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ g(\boldsymbol{a}),\ f(x,g(\boldsymbol{a})),\ g(y),\ f(g(y),\boldsymbol{a}),\ g(f(g(y),\boldsymbol{a})),$
$f(x,g(\boldsymbol{a}))\cdot g(f(g(y),\boldsymbol{a})),\ x+g(y),\ g(\boldsymbol{b}),\ g(g(\boldsymbol{b})),\ f(x+g(y),g(g(\boldsymbol{b})))$.

3.16 a) term,
b) nie je term ani formula,
c) formula,
d) nie je term ani formula,
e) term,
f) nie je term ani formula,
g) formula,
h) nie je term ani formula.

3.17 a) nie, lebo f je binárny funkčný symbol, teda $f(\boldsymbol{a})$ nie je term,

b) áno, základné podformuly sú $P(f(x,g(x))),\ Q(\boldsymbol{a},g(x))$,
vytvárajúca postupnosť: $P(f(x,g(x))),\ Q(\boldsymbol{a},g(x)), \neg Q(\boldsymbol{a},g(x)),\ \varphi_2$,

c) áno, základné podformuly sú $P(f(x,\boldsymbol{b})),\ P(y),\ Q(\boldsymbol{a},f(y,g(\boldsymbol{b})))$,
vytvárajúca postupnosť: $P(f(x,\boldsymbol{b})),\ P(y),\ Q(\boldsymbol{a},f(y,g(\boldsymbol{b}))),$
$P(y)\vee Q(\boldsymbol{a},f(y,g(\boldsymbol{b}))),\ (\exists y)(P(y)\vee Q(\boldsymbol{a},f(y,g(\boldsymbol{b})))),$
$(\forall x)(P(f(x,\boldsymbol{b}))),\ \varphi_3$,

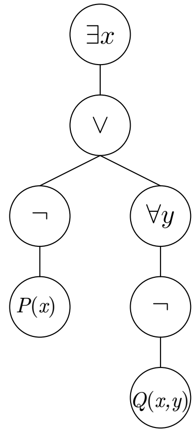
d) nie je, lebo $P(y)$ nie je term, a teda $Q(g(y),P(y))$ nie je zákl. formula,

e) nie, lebo $Q(x,y)$ nie je term, a teda $P(Q(x,y))$ nie je zákl. formula,

f) áno, základné podformuly sú $P(x),\ Q(y,f(\boldsymbol{b},y))$,
vytvárajúca postupnosť: $P(x),\ Q(y,f(\boldsymbol{b},y)), (\exists y)(Q(y,f(\boldsymbol{b},y))),$
$P(x)\Leftrightarrow((\exists y)(Q(y,f(\boldsymbol{b},y)))),\ \varphi_6$.

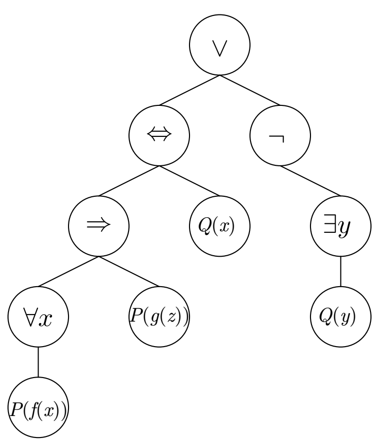
3.18 a) Vytvárajúca postupnosť je: $P(x),\ Q(x,y),\ \neg Q(x,y),\ (\forall y)\neg Q(x,y),\ \neg P(x),$
$\neg P(x)\vee(\forall y)\neg Q(x,y),\ (\exists x)(\neg P(x)\vee(\forall y)\neg Q(x,y))$.

Syntaktický strom:



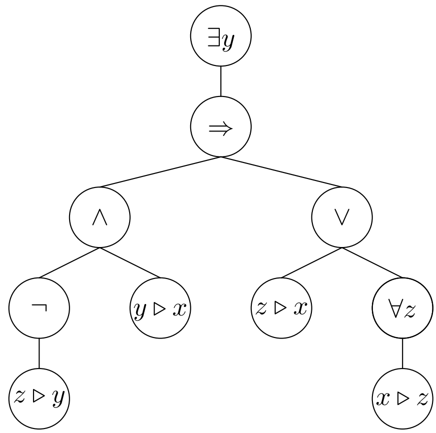
b) Vytvárajúca postupnosť:
$P(f(x)),\ P(g(z)),\ Q(x),\ Q(y),\ (\forall x)P(f(x)),\ (\forall x)P(f(x)) \Rightarrow P(g(z)),$
$((\forall x)P(f(x)) \Rightarrow P(g(z))) \Leftrightarrow Q(x),\ (\exists y)Q(y),\ \neg(\exists y)Q(y),$
$[((\forall x)P(f(x)) \Rightarrow P(g(z))] \Leftrightarrow Q(x)) \vee \neg(\exists y)Q(y).$

Syntaktický strom:



c) Vytvárajúca postupnosť:
$z \triangleright y,\ y \triangleright x,\ z \triangleright x,\ x \triangleright z,\ \neg(z \triangleright y), \neg(z \triangleright y) \wedge (y \triangleright x),\ (\forall z)(x \triangleright z),$
$(z \triangleright x) \vee (\forall z)(x \triangleright z),\ [\neg(z \triangleright y) \wedge (y \triangleright x)] \Rightarrow [(z \triangleright x) \vee (\forall z)(x \triangleright z)],$
$(\exists y)[[\neg(z \triangleright y) \wedge (y \triangleright x)] \Rightarrow [(z \triangleright x) \vee (\forall z)(x \triangleright z)]]$

Syntaktický strom:



3.19 Označenie: b – viazaný výskyt, f – voľný výskyt.

a) $f(x)$, $f(y)$, $b(x)$, $f(y)$, $b(x)$, $b(y)$, $b(x)$, $b(y)$, formula nie je uzavretá ani otvorená,

b) $b(x)$, $b(y)$, $b(x)$, $b(y)$, premenné x, y majú len viazané výskyty, uzavretá formula,

c) $f(x)$, $f(y)$, $b(z)$, $b(z)$, $b(y)$, $b(z)$, $b(y)$, formula nie je uzavretá ani otvorená,

d) všetky výskyty premennej x sú voľné, otvorená formula,

e) $b(z)$, $b(z)$, $f(x)$, $b(y)$, $b(x)$, $f(z)$, $b(y)$, $b(x)$, formula nie je uzavretá ani otvorená,

f) všetky výskyty premenných x, y sú viazané, uzavretá formula.

3.20

a) nie,	b) áno,	c) áno,
d) áno,	e) áno,	f) nie,
g) nie,	h) áno,	i) nie,
j) nie,	k) áno,	l) nie,
m) áno,	n) áno,	o) nie,
p) nie,	q) áno,	r) nie.

3.2 Sémantika predikátovej logiky

V predošlej časti sme sa zaoberali spôsobom vytvárania formúl v predikátovej logike, ako aj zapisovaním oznamovacích viet pomocou formúl predikátovej logiky. V tejto kapitole sa budeme zaoberať sémantikou formúl, t. j. ich významom a pravdivosťou. Uveďme si príklad.

Príklad 3.2.1 Majme formulu

$$\varphi : (\forall x)(M(x) \Rightarrow M(f(x))),$$

kde M je unárny predikátový symbol a f je unárny funkčný symbol.
Táto formula môže mať mnoho významov. Uveďme dva z nich.

1. Objekty sú všetci ľudia. Predikátový symbol M znamená „mať modré oči“ a funkcia f priraďuje človeku jeho matku. Formula zodpovedá vete: „Každý, kto má modré oči, má matku s modrými očami. “Je jasné, že je to nepravdivý výrok.

2. Objekty sú celé čísla. Predikátový symbol M znamená „byť nepárnym číslom“ a funkcia f priraďuje číslu jeho druhú mocninu. Formula zodpovedá vete: „Druhá mocnina nepárneho čísla je nepárne číslo.“ Tento výrok je pravdivý. $\square$

Z uvedeného príkladu vyplýva, že na to, aby sme vedeli rozhodnúť, či je formula pravdivá alebo nepravdivá, musíme poznať význam špeciálnych symbolov, ako aj množinu objektov, o vlastnostiach ktorých hovoríme.

3.2.1 Štruktúra a realizácia termu

Definícia 3.2.1 ***Štruktúra $\mathbf{M}$*** *pre jazyk $\mathcal{L}$ predikátovej logiky s množinou predikátových symbolov* Pred*, konštantných symbolov* Kons *a funkčných symbolov* Func *je určená neprázdnou množinou $\mathcal{U}$, ktorá sa nazýva* ***univerzum*** *a* ***interpretáciou*** *$[\![\cdot]\!]$, kde $[\![\cdot]\!]$ je priradenie, ktoré*

1. *každému konštantnému symbolu $\boldsymbol{a} \in$ Kons priraďuje prvok z $\mathcal{U}$, označujeme ho $[\![\boldsymbol{a}]\!]$,*

2. *každému funkčnému symbolu $f \in$ Func arity n priraďuje zobrazenie množiny $\mathcal{U}^n$ do $\mathcal{U}$, označujeme $[\![f]\!]$,*

3. *každému predikátovému symbolu $P \in$ Pred arity n priraďuje podmnožinu $[\![P]\!] \subseteq \mathcal{U}^n$.*

Príklad 3.2.2 Určme interpretácie predikátových symbolov $\triangleright$ („byť predkom“) a W („byť ženou“), ak univerzom je rodina pozostávajúca z matky (m) , otca (o), dcéry (d), syna (s) a babky z matkinej strany (b).

Riešenie. Interpretáciou unárneho predikátového symbolu W sú všetky prvky univerza, ktoré sú ženského pohlavia, teda

$$[\![W]\!] = \{\mathsf{m},\ \mathsf{d},\ \mathsf{b}\}.$$

Interpretáciou binárneho predikátového symbolu $\triangleright$ sú všetky usporiadané dvojice prvkov univerza, v ktorých prvok na prvom mieste je predkom prvku na druhom mieste, teda

$$[\![\triangleright]\!] = \{(\mathsf{m},\mathsf{d}),\ (\mathsf{b},\mathsf{m}),\ (\mathsf{b},\mathsf{d}),\ (\mathsf{m},\mathsf{s}),\ (\mathsf{b},\mathsf{s}),\ (\mathsf{o},\mathsf{d}),\ (\mathsf{o},\mathsf{s})\}.$$ $\square$

Definícia 3.2.2 *Zobrazenie e, ktoré priradí každej premennej x nejaký prvok $e(x) \in \mathcal{U}$, nazývame* ***ohodnotením*** *premenných v štruktúre* $\boldsymbol{M}$.

Definícia 3.2.3 ***Realizácia*** $[\![\mathsf{t}]\!]_e$ *termu* t *v štruktúre* $\boldsymbol{M}$ *pri ohodnotení premenných e je definovaná nasledovne:*

a) *ak termom je konštantný symbol* $\boldsymbol{a}$, *tak jeho realizácia je prvok* $[\![\boldsymbol{a}]\!] \in \mathcal{U}$, *t. j.* $[\![\boldsymbol{a}]\!]_e = [\![\boldsymbol{a}]\!]$,

b) *ak termom je premenná x, tak jej realizácia je* $e(x) \in \mathcal{U}$, *t. j.* $[\![x]\!]_e = e(x)$,

c) *ak term má tvar* $f(\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2, \ldots, \mathsf{t}_n)$, *kde f je funkčný symbol arity n a* $\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2, \ldots, \mathsf{t}_n$ *sú termy, ktorých realizácie sú prvky* $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathcal{U}$, *potom realizáciou termu je prvok* $[\![f]\!](d_1, d_2, \ldots, d_n)$, *t. j.*

$$[\![f(\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2, \ldots, \mathsf{t}_n)]\!]_e = [\![f]\!](d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Príklad 3.2.3 V štruktúre pre jazyk $\mathcal{L}$ so špeciálnymi symbolmi $\mathsf{Pred} = \{P, Q\}$, $\mathsf{Func} = \{f, g\}$ a $\mathsf{Kons} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, kde

- $\mathcal{U} = \mathbb{N}$,
- $[\![\boldsymbol{a}]\!] = 2,\ [\![\boldsymbol{b}]\!] = 3$,
- $[\![f]\!]$ je druhá mocnina čísla, t.j. $[\![f]\!](n) = n^2$,
- $[\![g]\!]$ je súčin, t. j. $[\![g]\!](m, n) = m \cdot n$,
- $[\![P]\!]$ je množina usporiadaných dvojíc prirodzených čísel (m, n) takých, že $m \leqq n$,
- $[\![Q]\!]$ je množina prirodzených čísel, ktoré sú druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla,

nájdime realizácie termov $\mathsf{t}_1 : g(f(x), g(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ a $\mathsf{t}_2 : f(g(f(\mathbf{a}), x))$ pri ohodnotení e takom, že $e(x) = 4$.

Riešenie.

$[\![\mathsf{t}_1]\!]_e = [\![g(f(x), g(\mathbf{a}, \mathbf{b}))]\!]_e = [\![f(x)]\!]_e \cdot [\![g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})]\!]_e = [\![f]\!]([\![x]\!]_e) \cdot [\![\boldsymbol{a}]\!]_e \cdot [\![\boldsymbol{b}]\!]_e = 4^2 \cdot 2 \cdot 3 =$
$= 96$,

$[\![\mathsf{t}_2]\!]_e = [\![f(g(f(\mathbf{a}), x))]\!]_e = [\![g(f(\mathbf{a}), x)]\!]_e^2 = ([\![f(\boldsymbol{a})]\!]_e \cdot [\![x]\!]_e)^2 = ([\![\boldsymbol{a}]\!]_e^2 \cdot e(x))^2 =$
$= (2^2 \cdot 4)^2 = 256.$ □

3.2.2 Pravdivosť formuly

Definícia 3.2.4 ***Pravdivosť*** *formúl v danej štruktúre* $\boldsymbol{M}$ *pri ohodnotení premenných e definujeme nasledovne:*

1. *Nech* $\varphi = P(\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2, \ldots, \mathsf{t}_n)$, *kde P je predikátový symbol arity n a* $\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2, \ldots, \mathsf{t}_n$ *sú termy, ktorých realizácie sú prvky* $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathcal{U}$. *Potom formula* φ *je pravdivá práve vtedy, keď* $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in [\![P]\!]$.

2. *Ak φ, ψ sú formuly, ktorých pravdivosť poznáme, potom:*

   - *formula $\neg\varphi$ je pravdivá práve vtedy, keď φ je nepravdivá,*
   - *formula $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá práve vtedy, keď φ, ψ sú pravdivé,*
   - *formula $\varphi \vee \psi$ je nepravdivá práve vtedy, keď φ, ψ sú nepravdivé,*
   - *formula $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivá práve vtedy, keď φ je pravdivá a ψ je nepravdivá,*
   - *formula $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je pravdivá práve vtedy, keď φ, ψ sú obidve pravdivé alebo obidve nepravdivé.*

3. *Ak φ je formula a x je premenná, potom*

   - *formula $(\forall x)\varphi$ je pravdivá práve vtedy, keď formula φ je pravdivá pri každom ohodnotení $e(x) = d$, kde $d \in \mathcal{U}$,*
   - *formula $(\exists x)\varphi$ je pravdivá práve vtedy, keď formula φ je pravdivá aspoň pri jednom ohodnotení $e(x) = d$, kde $d \in \mathcal{U}$.*

Pravdivostnú hodnotu *formuly φ v štruktúre $\boldsymbol{M}$ pri ohodnotení premenných e označujeme $\mathrm{val}_e(\varphi)$ a definujeme nasledovne:*

$$\mathrm{val}_e(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{ak formula } \varphi \text{ je pravdivá v štruktúre } \boldsymbol{M} \text{ pri ohodnotení } e, \\ 0, & \text{ak formula } \varphi \text{ je nepravdivá v štruktúre } \boldsymbol{M} \text{ pri ohodnotení } e. \end{cases}$$

Poznámka: Z bodu 3 v definícii 3.2.4 vyplýva, že pravdivostná hodnota formuly závisí len na ohodnotení tých premenných, ktoré majú vo formule voľný výskyt.

Príklad 3.2.4 V štruktúre z príkladu 3.2.3 určme pravdivostné hodnoty nasledujúcich formúl pri rovnakom ohodnotení premenných:

a) $\varphi: \ Q(g(f(x), g(\mathbf{a}, \mathbf{b})))$

b) $\psi: \ \neg Q(f(g(f(\mathbf{a}), x)))$

c) $\theta: \ P(g(f(x), g(\mathbf{a}, \mathbf{b})), f(g(f(\mathbf{a}), x)))$

d) $\rho: \ Q(g(f(x), g(\mathbf{a}, \mathbf{b}))) \Rightarrow P(g(f(x), g(\mathbf{a}, \mathbf{b})), f(g(f(\mathbf{a}), x)))$

Riešenie.

a) Vzhľadom na označenie termov z príkladu 3.2.3 máme formulu $\varphi: \ Q(\mathsf{t}_1)$. Keďže $[\![\mathsf{t}_1]\!]_e \notin [\![Q]\!]$ (lebo číslo 96 nie je druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla), $\mathrm{val}_e(\varphi) = 0$.

b) Máme $\psi: \neg Q(t_2)$. Keďže $[\![\mathsf{t}_2]\!]_e \in [\![Q]\!]$, $\mathrm{val}_e(Q(t_2)) = 1$, a teda $\mathrm{val}_e(\psi) = 0$.

c) Máme $\theta: P(\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2)$. Platí $([\![\mathsf{t}_1]\!]_e, [\![\mathsf{t}_2]\!]_e) \in [\![P]\!]$ (lebo $96 \leqq 256$), teda $\mathrm{val}_e(\theta) = 1$.

d) Formula ρ má tvar $\varphi \Rightarrow \theta$. Z riešení úloh a), c) vyplýva $\mathrm{val}_e(\rho) = 1$. $\square$

Príklad 3.2.5 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{2, 4, 6, 8\}$ a predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x, y);\ x \mid y\},$$

kde symbol $x \mid y$ znamená, že číslo x je deliteľom čísla y, určme pravdivostnú hodnotu formuly

$$\varphi:\ (x = y) \Rightarrow (\forall y)R(x, y)$$

pri nasledujúcich ohodnoteniach premenných:

a) $e(x) = 2,\ e(y) = 8,$

b) $e(x) = 4,\ e(y) = 8,$

c) $e(x) = 6,\ e(y) = 6,$

d) $e(x) = 2,\ e(y) = 2.$

Riešenie. Formula φ má tvar implikácie $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, kde $\varphi_1 :\ x = y$ a $\varphi_2 :\ (\forall y)R(x, y)$. Pri určovaní pravdivostnej hodnoty formúl φ_1, φ_2 budeme postupovať nasledovne:

- Formula φ_1 je otvorená, a teda jej pravdivostná hodnota závisí od ohodnotenia obidvoch premenných. Napríklad pri ohodnotení premenných v úlohe a) je $\mathrm{val}_e(\varphi_1) = 0$, lebo $2 \neq 8$.
- Vo formule φ_2 má premenná y len viazané výskyty, jej pravdivostná hodnota závisí len od ohodnotenia premennej x. Pri určovaní pravdivostnej hodnoty si za premennú x „dosadíme“ jej ohodnotenie, napr. $e(x) = 2$ a pýtame sa, či pre každý prvok z univerza platí, že číslo 2 je jeho deliteľom. Teda pri ohodnotení v úlohe a) je $\mathrm{val}_e(\varphi_2) = 1$, lebo číslo 2 je deliteľom každého z čísel 2, 4, 6, 8.

Riešenie si zapíšeme do tabuľky.

$e(x)$	$e(y)$	$\mathrm{val}_e(\varphi_1)$	$\mathrm{val}_e(\varphi_2)$	$\mathrm{val}_e(\varphi)$
2	8	0	1	1
4	8	0	0	1
6	6	1	0	0
2	2	1	1	1

Príklad 3.2.6 V štruktúre pre jazyk príbuzenstva s univerzom tvoreným rodinou pozostávajúcou z matky, otca, syna a dcéry (m – matka, o – otec, s – syn, d – dcéra) určme pravdivostnú hodnotu formuly

$$\neg W(x) \Rightarrow (\exists y)(\neg W(y) \wedge y \rhd x)$$

pri nasledujúcich ohodnoteniach premenných:

a) $e(x) = \mathsf{o},\ e(y) = \mathsf{m},$

b) $e(x) = \mathsf{m},\ e(y) = \mathsf{d},$

c) $e(x) = \mathsf{d},\ e(y) = \mathsf{s},$

d) $e(x) = \mathsf{s},\ e(y) = \mathsf{d}.$

Riešenie. Formula φ má tvar implikácie $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, kde $\varphi_1 :\ \neg W(x)$ a $\varphi_2 :\ (\exists y)(\neg W(y) \wedge (y \rhd x))$. Pri určovaní pravdivostnej hodnoty formúl φ_1, φ_2 budeme postupovať nasledovne:

- Formula φ_1 je otvorená, a jej pravdivostná hodnota závisí od ohodnotenia premennej x. Pri ohodnotení v úlohe a) je $\mathrm{val}_e(\varphi_1) = 1$, lebo otec nie je žena.
- Vo formule φ_2 má premenná y len viazané výskyty, jej pravdivostná hodnota závisí len od ohodnotenia premennej x. Pri určovaní pravdivostnej hodnoty si za premennú x „dosadíme“ jej ohodnotenie, napr. $e(x) = \mathsf{o}$ a pýtame sa, či existuje člen rodiny mužského pohlavia, ktorý je predkom otca. Teda pri ohodnotení v úlohe a) je $\mathrm{val}_e(\varphi_2) = 0$, lebo žiaden člen rodiny mužského pohlavia nie je predkom otca.

Riešenie si zapíšeme do tabuľky.

$e(x)$	$e(y)$	$\mathrm{val}_e(\varphi_1)$	$\mathrm{val}_e(\varphi_2)$	$\mathrm{val}_e(\varphi)$
o	m	1	0	0
m	d	0	0	1
d	s	0	1	1
s	d	1	1	1

3.2.3 Splniteľnosť množiny formúl

Definícia 3.2.5 *Formula φ je* ***splnená****, resp.* ***platí v štruktúre M****, keď je v tejto štruktúre pravdivá pri každom ohodnotení premenných. Označujeme $\models_M \varphi$.*

Keďže pravdivostná hodnota formuly závisí len na ohodnotení tých premenných, ktoré majú vo formule voľný výskyt, pre uzavretú formulu platí, že jej pravdivostná hodnota pri ľubovoľnom ohodnotení premenných je rovnaká. Ak je uzavretá formula pri ľubovoľnom ohodnotení premenných pravdivá, hovoríme, že φ je **pravdivá v M**. Ak formula nie je uzavretá, potom je splnená v štruktúre M práve vtedy, keď jej uzáver je formula pravdivá v M. Ľahko vidíme, že pre každú formulu φ platí, že ak $\models_M \varphi$, potom $\not\models_M \neg\varphi$. Pre uzavretú formulu platí silnejšie tvrdenie, ktoré je obsahom nasledujúcej vety.

Príklad 3.2.7 V štruktúre M pre jazyk príbuzenstva s univerzom tvoreným matkou, otcom a ich synom rozhodnime, či sú splnené nasledujúce formuly:

a) $\varphi: \ (x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)$,

b) $\psi: \ (\exists y)((x \triangleright y) \vee (y \triangleright x))$,

c) $\rho: \ (\exists x)(\forall y)((x \triangleright y) \vee (y \triangleright x))$,

d) $\theta: \ (\exists x)(\forall y)(\neg(x \triangleright y) \wedge \neg(y \triangleright x))$.

Riešenie. Máme $\mathcal{U} = \{\mathsf{m}, \mathsf{o}, \mathsf{s}\}$. Interpretácia predikátového symbolu $\triangleright$ je $[\![\triangleright]\!] = \{(\mathsf{m}, \mathsf{s}), (\mathsf{o}, \mathsf{s})\}$ (človek nie je predkom seba samého).

a) Formula φ je otvorená, teda jej pravdivostná hodnota závisí na ohodnotení obidvoch premenných. Pravdivostné hodnoty pri jednotlivých ohodnoteniach znázorníme tabuľkou:

$e(x)$	$e(y)$	$\mathrm{val}_e(x \triangleright y)$	$\mathrm{val}_e(y \triangleright x)$	$\mathrm{val}_e(\varphi)$
m	m	0	0	0
m	o	0	0	0
m	s	1	0	1
o	o	0	0	0
o	m	0	0	0
o	s	1	0	1
s	s	0	0	0
s	m	0	1	1
s	o	0	1	1

Formula φ nie je pravdivá pri každom ohodnotení premenných, teda $\not\models_M \varphi$.

Intuitívne, formula φ je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$, ak pre každú dvojicu prvkov $(x, y) \in \mathcal{U}$ (aj rovnakých) platí, že x je predkom y alebo naopak, čo zrejme neplatí pre dva rovnaké prvky, a tiež pre dvojicu matka, otec.

b) Formula ψ má tvar $(\exists y)\varphi$. Každý výskyt premennej y je viazaný, teda pravdivostná hodnota závisí len na ohodnotení premennej x. Pri určovaní množín $\{d \in \mathcal{U} : \mathrm{val}_e(\varphi) = 1,\ \text{ak } e(y) = d\}$ použijeme tabuľku z časti a).

$e(x)$	$\{d \in \mathcal{U} : \mathrm{val}_e(\varphi) = 1,\ \text{ak } e(y) = d\}$	$\mathrm{val}_e(\psi)$
m	$\{\mathsf{s}\}$	1
o	$\{\mathsf{s}\}$	1
s	$\{\mathsf{m}, \mathsf{o}\}$	1

Formula ψ je pravdivá pri každom ohodnotení premennej x, teda platí $\models_M \psi$.

Intuitívne, ku každému prvku (členovi rodiny) má existovať člen rodiny, ktorý je jeho predkom alebo potomkom, čo platí, lebo otec a matka majú potomka a syn a dcéra predka.

c) Máme formulu ρ : $(\exists x)(\forall y)\varphi$, ktorá je uzavretá, a teda jej pravdivostná hodnota nezávisí od ohodnotenia premenných. Postupne zistíme, či je pravdivá v $\boldsymbol{M}$. Ak označíme $\rho_1 : (\forall y)\varphi$, máme $\rho : (\exists x)\rho_1$. Teda $\models_M \rho$ platí, ak existuje také ohodnotenie premennej x, pri ktorom je formula ρ_1 pravdivá. Máme

$e(x)$	$\{d \in \mathcal{U} : \mathrm{val}_e(\varphi) = 1,\ \text{ak } e(y) = d\}$	$\mathrm{val}_e(\rho_1)$
m	$\{\mathsf{s}\}$	0
o	$\{\mathsf{s}\}$	0
s	$\{\mathsf{m}, \mathsf{o}\}$	0

Keďže neexistuje ohodnotenie premennej x také, pri ktorom je formula ρ_1 pravdivá, dostávame $\not\models_M \rho$.

Neformálne, má existovať člen rodiny taký, že každý je jeho predkom alebo potomkom, čo zrejme neplatí (ako dôvod stačí, že človek nie je predkom ani potomkom seba samého).

d) Z riešenia príkladu b) vyplýva, že pre formulu $\psi_1 : (\forall x)(\exists y)(x \triangleright y \vee y \triangleright x)$, ktorá je uzáverom formuly ψ, teda ψ_1 je uzavretá formula, platí $\models_M \psi_1$. Formula θ je negáciou formuly ψ_1, a teda podľa vety 3.2.1 dostávame $\not\models_M \theta$. $\square$

Príklad 3.2.8 *V štruktúre $\boldsymbol{M}$ s univerzom $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ a binárnym predikátovým symbolom takým, že*

$$[\![R]\!] = \{(x, y);\, 3 \mid (x - y)\},$$

určte, či sú splnené formuly

a) $\varphi_1 : R(x, x)$,

b) $\varphi_2 : R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$,

c) $\varphi_3 : (R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(y, x)$,

d) $\varphi_4 : (R(x, y) \wedge R(y, x)) \Rightarrow x = y$.

Riešenie. Na rozdiel od predchádzajúcich príkladov je univerzum nekonečná množina všetkých celých čísel. Z toho vyplýva, že vyšetrovanie splnenosti formuly nie je možné určením pravdivostnej hodnoty formuly pre každé celé číslo. Ak tvrdíme, že formula splnená nie je, stačí nájsť jeden „kontrapríklad“, t. j. ohodnotenie premenných, pri ktorom je formula nepravdivá. Ak ale chceme dokázať, že formula je splnená, musíme urobiť dôkaz využívajúci spoločné vlastnosti celých čísel.

a) Máme určiť, či pre každé $x \in \mathbb{Z}$ platí $3 \mid (x - x)$, t.j $3 \mid 0$. Keďže číslo nula je deliteľné číslom 3, platí to pre každé $x \in \mathbb{Z}$. Formula φ_1 je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$.

b) Máme určiť, či pre každé dve čísla x, $y \in \mathbb{Z}$ platí implikácia $3 \mid (x - y) \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 \mid (y - x)$. Z definície deliteľnosti vyplýva, že ak 3 je deliteľom nejakého celého čísla, potom je aj deliteľom čísla opačného. Keďže čísla $x - y$, $y - x$ sú navzájom opačné, implikácia je pravdivá pre každé $x, y \in \mathbb{Z}$, teda formula φ_2 je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$.

c) Máme určiť, či pre každé tri čísla x, y, $z \in \mathbb{Z}$ platí implikácia

$$(3 \mid (x - y) \wedge 3 \mid (y - z)) \Rightarrow 3 \mid (x - z).$$

Po vyskúšaní pre niekoľko trojíc čísel dospejeme k hypotéze, že implikácia je vždy pravdivá. Dôkaz musíme však urobiť vo všeobecnosti. Podľa definície deliteľnosti $a \mid b$, ak existuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že $b = k\,a$. Podľa tejto definície dostávame

$$(3 \mid (x - y) \wedge 3 \mid (y - z)) \Rightarrow (\exists k,\, l \in \mathbb{Z}) :\, (x - y = 3k \wedge y - z = 3l) \Rightarrow$$

$$x - z = (x - y) + (y - z) = 3k + 3l = 3(k + l).$$

Z existencie čísel $k, l \in \mathbb{Z}$ vyplýva existencia čísla $m = k + l$ takého, že $x - z = 3m$, z čoho dostávame $3 \mid (x - z)$. Formula φ_3 je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$.

d) Formula φ_4 nie je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$, napr. pri ohodnotení $e(x) = 2$, $e(y) = 5$ platí $3 \mid (2-5) \wedge 3 \mid (5-2)$, ale $2 \neq 5$.

$\square$

Veta 3.2.1 *Pre uzavretú formulu φ platí $\models_M \varphi$ práve vtedy, keď $\not\models_M \neg\varphi$.*

Pre formulu, ktorá nie je uzavretá, tvrdenie vety 3.2.1 môže, ale nemusí platiť. V nasledujúcom príklade ukážeme platnosť vety 3.2.1.

Príklad 3.2.9 Uvažujme štruktúru z príkladu 3.2.7.

a) Vezmime negáciu formuly φ z príkladu 3.2.7 a), ktorá nie je uzavretá. Máme

$$\neg\varphi : \neg(x \triangleright y) \wedge \neg(y \triangleright x).$$

Táto formula nie je pravdivá napríklad pri takom ohodnotení e, že $e(x) = \mathsf{m}$ a $e(y) = \mathsf{o}$, a teda nie je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$. Z riešenia príkladu 3.2.7 vieme, že ani formula φ nie je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$.

b) Vezmime negáciu formuly ρ z príkladu 3.2.7 c), ktorá je uzavretá. Máme

$$\neg\rho : (\forall x)(\exists y)(\neg(x \triangleright y) \wedge \neg(y \triangleright x)).$$

Ku každému členovi rodiny má existovať člen rodiny, ktorý nie je jeho predkom ani potomkom. To platí, stačí pri každom ohodnotení premennej x zvoliť $e(y) = e(x)$. Formula $\neg\rho$ je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$, pričom formula ρ nie je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$ (platí tvrdenie vety 3.2.1). $\square$

Definícia 3.2.6 *Formula φ jazyka $\mathcal{L}$, ktorá je splnená v každej štruktúre pre tento jazyk, sa nazýva* ***tautológia*** *tohto jazyka, zapisujeme $\models \varphi$. Formula φ jazyka $\mathcal{L}$, ktorá nie je splnená v žiadnej štruktúre pre tento jazyk, sa nazýva* ***kontradikcia*** *tohto jazyka.*

Príklad 3.2.10 Uvedieme príklad tautológie a kontradikcie v jazyku $\mathcal{L}$ s $\mathsf{Pred} = \{P\}$, kde P je unárny predikátový symbol.

a) Príkladom tautológie je formula $\varphi : (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$.
Dôkaz. Formula φ je uzavretá, teda jej pravdivostná hodnota nezávisí na ohodnotení premennej x. Má tvar implikácie, ktorá je nepravdivá len v prípade, že z pravdivej formuly vyplýva nepravdivá. Ale ak je formula $(\forall x)P(x)$ pravdivá, znamená to, že pre ľubovoľné ohodnotenie e platí $e(x) \in [\![P]\!]$. Potom existuje také ohodnotenie e, že $e(x) \in [\![P]\!]$, teda aj formula $(\exists x)P(x)$ je pravdivá. Teda formula φ je splnená v každej štruktúre pre daný jazyk, a teda je tautológia.

b) Príkladom kontradikcie je formula $\psi : (\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$.
Dôkaz. V každej štruktúre $\boldsymbol{M}$ a pri ľubovoľnom ohodnotení e platí $\mathrm{val}_e(P(x) \wedge \neg P(x)) = 0$, teda formula ψ nie je splnená v žiadnej štruktúre pre jazyk $\mathcal{L}$. $\square$

Definícia 3.2.7 *Formula φ je* ***splniteľná****, ak existuje taká štruktúra $\boldsymbol{M}$, v ktorej je φ splnená. Množina formúl $\mathcal{T}$ je* ***splniteľná****, ak existuje taká štruktúra $\boldsymbol{M}$, v ktorej sú všetky formuly množiny T splnené. Množina formúl $\mathcal{T}$ je* ***nesplniteľná****, ak pre každú štruktúru $\boldsymbol{M}$ existuje formula z množiny $\mathcal{T}$, ktorá v nej nie je splnená.*

Úlohy o splniteľnosti množiny formúl budeme riešiť v časti *Rezolučná metóda v predikátovej logike.*

Definícia 3.2.8 *Hovoríme, že formula φ jazyka $\mathcal{L}$ je* ***sémantickým dôsledkom*** *systému formúl $\mathcal{T}$ jazyka $\mathcal{L}$, keď je φ splnená v každej štruktúre pre jazyk $\mathcal{L}$, v ktorej sú splnené všetky formuly systému $\mathcal{T}$. Zapisujeme $\mathcal{T} \models \varphi$, špeciálne $\models \varphi$ znamená že φ je tautológia.*

Z predchádzajúcich dvoch definícií vyplýva, že ak je systém $\mathcal{T}$ nesplniteľný, potom pre každú formulu φ platí $\mathcal{T} \models \varphi$.

Príklad 3.2.11 Overíme, či platí $\mathcal{T} \models \varphi$, ak

$$\mathcal{T} = \{(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ P(\boldsymbol{a})\}, \quad \varphi : (\exists x)Q(x).$$

Riešenie. Vezmime štruktúru $\boldsymbol{M}$, v ktorej sú splnené obidve formuly systému $\mathcal{T}$. Pretože uzavretá formula $P(\boldsymbol{a})$ je pravdivá v $\boldsymbol{M}$, prvok $[\![\boldsymbol{a}]\!] \in [\![P]\!]$. Pretože aj formula $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ je pravdivá a prvok $c = [\![\boldsymbol{a}]\!]$ má vlastnosť P, musí mať prvok c aj vlastnosť Q, teda $c \in [\![Q]\!]$. Pri ohodnotení $e(x) = c$ je formula $Q(x)$ pravdivá, čo znamená, že formula $(\exists x)Q(x)$ je pravdivá (teda aj splnená) v $\boldsymbol{M}$.

Ukázali sme, že formula φ je sémantickým dôsledkom systému formúl $\mathcal{T}$. $\square$

Definícia 3.2.9 *Hovoríme, že formuly φ a ψ sú* ***sémanticky ekvivalentné****, ak platí súčasne $\varphi \models \psi$ aj $\psi \models \varphi$. Zapisujeme $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$.*

Najčastejšie používané sémantické ekvivalencie budú uvedené v kapitole *Rezolučná metóda v predikátovej logike.*

Veta 3.2.2 *Nech φ, ψ sú formuly. Potom platí*

$$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \varphi \Leftrightarrow \psi \text{ je tautológia.}$$

Úlohy

3.21 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 24\}$ a predikátovými symbolmi $P(x) - x$ je párne číslo, $T(x) - x$ je číslo deliteľné tromi a $D(x) - x$ je číslo deliteľné dvanástimi určte pravdivostnú hodnotu formúl

$$\varphi :\ (P(x) \wedge T(y)) \Rightarrow (\forall x)\neg D(x), \qquad \psi :\ (\exists x)D(x) \Rightarrow (P(x) \wedge T(y))$$

pri nasledujúcich ohodnoteniach premenných:

a) $e(x) = 9,\ e(y) = 24,$

b) $e(x) = 12,\ e(y) = 9.$

3.22 V štruktúre pre jazyk s rovnosťou s univerzom $\mathcal{U} = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 12\}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x, y);\ x \mid y\},$$

kde symbol $x \mid y$ znamená, že číslo x je deliteľom čísla y, určte pravdivostnú hodnotu formuly $\varphi :\ (\exists y)(x \neq y \wedge R(x, y)) \Rightarrow R(y, x)$ pri nasledujúcich ohodnoteniach:

a) $e(x) = 6,\ e(y) = 3,$

b) $e(x) = 6,\ e(y) = 5,$

c) $e(x) = 5,\ e(y) = 2,$

d) $e(x) = 12,\ e(y) = 3.$

3.23 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x, y);\ x + y \geqq 10\},$$

určte pravdivostnú hodnotu formuly $\varphi :\ (\exists y)R(x, y) \Rightarrow R(y, y)$ pri nasledujúcich ohodnoteniach:

a) $e(x) = 1,\ e(y) = 5,$

b) $e(x) = 7,\ e(y) = 4,$

c) $e(x) = 1,\ e(y) = 3,$

d) $e(x) = 4,\ e(y) = 5.$

3.24 V štruktúre pre jazyk príbuzenstva s univerzom tvoreným rodinou pozostávajúcou z matky, otca, syna a dcéry určte pravdivostnú hodnotu formuly $\varphi :\ W(x) \Rightarrow (\exists x) y \triangleright x$ pri nasledujúcich ohodnoteniach:

a) $e(x) = \mathsf{m},\ e(y) = \mathsf{o},$

b) $e(x) = \mathsf{o},\ e(y) = \mathsf{m},$

c) $e(x) = \mathsf{d},\ e(y) = \mathsf{d},$

d) $e(x) = \mathsf{o},\ e(y) = \mathsf{s}.$

3.25 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{2,\ 7,\ 10,\ 12\}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x, y) : |x - y| \leqq 3\}$$

určte, či sú splnené formuly:

a) $R(x, y) \Rightarrow R(y, x),$

b) $(\exists y)(x \neq y \wedge R(x, y)),$

c) $(\exists x)R(x, y),$

d) $(\exists x)(R(x, y) \wedge x \neq y) \Rightarrow R(y, y),$

e) $(R(x,y) \wedge R(y,x)) \Rightarrow x = y$.

3.26 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x,y);\ x \mid (x+2y)\}$$

určte, či sú splnené formuly:

a) $R(x,x)$,

b) $(\exists x)(x \neq y \wedge R(x,y))$,

c) $R(x,y) \Rightarrow R(y,x)$,

d) $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$,

e) $(\exists y)(\forall x)R(x,y)$.

3.27 Zistite, či v štruktúre pre jazyk príbuzenstva s univerzom tvoreným rodinou pozostávajúcou z matky, otca, syna a dcéry sú splnené nasledujúce formuly.

a) $(\exists x)(\exists y)(W(x) \wedge \neg W(y))$,

b) $(\forall x)(\exists y)(x \triangleright y)$,

c) $(\forall x)(\exists y)[(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$,

d) $x \triangleright y \Rightarrow W(x)$,

e) $(\forall y)W(y) \Rightarrow (\exists x)(y \triangleright x)$,

f) $(\forall y)(W(y) \Rightarrow (\exists x)(y \triangleright x))$,

g) $(\neg W(x) \wedge \neg W(y) \wedge x \neq y) \Rightarrow [(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$,

h) $(\forall x)W(x) \vee (\forall y)\neg W(y)$.

3.28 Zistite, či v štruktúre pre jazyk príbuzenstva s univerzom tvoreným rodinou pozostávajúcou z matky, dcéry a dvoch synov sú splnené nasledujúce formuly:

a) $(\exists x)(x \triangleright y)$,

b) $\neg W(x) \Rightarrow (\exists y)(y \triangleright x)$,

c) $(\exists x)(\forall y)[(x \triangleright y) \vee x = y]$,

d) $W(x) \Rightarrow (\exists y)(y \triangleright x)$,

e) $\neg W(x) \Rightarrow (\exists y[\neg W(y) \wedge (y \triangleright x)]$,

f) $(W(x) \wedge W(y) \wedge x \neq y) \Rightarrow [(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$,

g) $(\neg W(x) \wedge \neg W(y) \wedge x \neq y) \Rightarrow [(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$,

h) $(W(x) \wedge \neg W(y)) \Rightarrow [(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$.

3.29 V štruktúre pre jazyk príbuzenstva s univerzom pozostávajúcim z matky, dcéry a vnuka (dcérin syn) rozhodnite, či sú splnené formuly:

a) $(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)$,

b) $(\forall y)[(x \neq y) \Rightarrow (x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$,

c) $(x \triangleright y) \Rightarrow \neg W(y)$,

d) $(\exists x)(\exists y)[(x \triangleright y) \wedge W(y)]$.

3.30 V štruktúre pre jazyk príbuzenstva s univerzom pozostávajúcim z matky, dcéry a syna rozhodnite, či sú splnené formuly:

a) $\neg W(x) \Rightarrow (\exists y)(y \triangleright x)$,

b) $(\exists y)[(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$,

c) $(W(x) \wedge W(y)) \Rightarrow [(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$,

d) $(\neg W(x) \wedge \neg W(y) \wedge x \neq y) \Rightarrow [(x \triangleright y) \vee (y \triangleright x)]$.

3.31 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{2,\ 6,\ 12\}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že $[\![R]\!] = \{(x, y)$: číslo x je deliteľom čísla y$\}$ zistite, či sú splnené formuly:

a) $R(x, y) \Rightarrow (\neg R(y, x) \vee x = y)$,

b) $\neg R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$,

c) $(\exists y)(\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$,

d) $(\exists x)(\forall y)(R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$,

e) $(\exists y)(x \neq y \wedge R(x, y))$.

3.32 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 24\}$ a predikátovými symbolmi $P(x) - x$ je párne číslo, $T(x) - x$ je číslo deliteľné tromi a $D(x) - x$ je číslo deliteľné dvanástimi zistite, či sú splnené nasledujúce formuly:

a) $D(x) \Rightarrow (P(x) \wedge T(x))$,

b) $(P(x) \wedge T(x)) \Rightarrow D(x)$,

c) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg T(x) \wedge T(y) \wedge \neg P(y))$,

d) $(P(x) \wedge T(y)) \Rightarrow (\neg P(y) \wedge \neg T(x))$.

3.33 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ (množina všetkých prirodzených mocnín čísla 2) a predikátovým symbolom $S(x) - x$ je číslo deliteľné štyrmi a funkčným symbolom $f(x) -$ priradí číslu x jeho druhú mocninu zistite, či sú splnené formuly:

a) $S(f(x)) \Rightarrow S(x)$,

b) $(\exists x)(\neg S(x) \wedge S(f(x)))$,

c) $(\exists x)(\neg S(x) \wedge \neg S(f(x)))$,

d) $S(x) \vee S(f(x))$.

3.34 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x, y);\ 4 \mid (x + y)\}$$

určte, či sú splnené formuly:

a) $R(x, x)$,

b) $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$,

c) $(R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$,

d) $(\forall y)(\exists x)R(x, y)$,

e) $(R(x, y) \wedge R(y, x)) \Rightarrow x = y$.

3.35 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x, y);\ x \mid (x - y)\}$$

určte, či sú splnené formuly:

a) $R(x, x)$,

b) $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$,

c) $(R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$,

d) $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$,

e) $(R(x, y) \wedge R(y, x)) \Leftrightarrow x = y$.

3.36 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x, y);\ x \mid y\}$$

určte, či sú splnené formuly:

a) $R(x, x)$,

b) $R(x, y)$,

c) $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$,

d) $(R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$,

e) $(R(x, y) \wedge R(y, x)) \Leftrightarrow x = y$,

f) $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$,

g) $(\exists x)(\forall y)R(x, y)$,

3.37 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{x + y \text{ je párne}\}$$

určte, či sú splnené formuly:

a) $R(x, x)$,

b) $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$,

c) $(R(x, y) \wedge R(y, x)) \Leftrightarrow x = y$,

d) $(\forall x)(\exists y) R(x, y)$,

e) $(\exists x)(\forall y) R(x, y)$,

3.38 V štruktúre s univerzom $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ a binárnym predikátovým symbolom R takým, že

$$[\![R]\!] = \{(x, y);\ \text{nsd(x, y)} = 1\}$$

určte, či sú splnené formuly (nsd je skratka pre najväčší spoločný deliteľ):

a) $R(x, x)$,

b) $(\exists x, y)(R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$,

c) $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$,

d) $(R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$,

e) $(R(x, y) \wedge R(y, x)) \Leftrightarrow x = y$,

f) $(\forall x)(\exists y) R(x, y)$,

g) $(\exists x)(\forall y) R(x, y)$,

Výsledky

3.21 a) $\text{val}_e(\varphi) = 1,\ \text{val}_e(\psi) = 0$, b) $\text{val}_e(\varphi) = 0,\ \text{val}_e(\psi) = 1$.

3.22 a) $\text{val}_e(\varphi) = 1$, b) $\text{val}_e(\varphi) = 0$,
c) $\text{val}_e(\varphi) = 1$, d) $\text{val}_e(\varphi) = 1$.

3.23 a) $\text{val}_e(\varphi) = 1$, b) $\text{val}_e(\varphi) = 0$,
c) $\text{val}_e(\varphi) = 1$, d) $\text{val}_e(\varphi) = 1$.

3.24 a) $\text{val}_e(\varphi) = 1$, b) $\text{val}_e(\varphi) = 1$,
c) $\text{val}_e(\varphi) = 0$, d) $\text{val}_e(\varphi) = 1$.

3.25 a) splnená,
b) nie je splnená, lebo je nepravdivá pri ohodnotení $e(x) = 2$,
c) splnená, napr. ak $e(x) = e(y)$ tak $\text{val}_e\, R(x, y) = 1$,
d) splnená, lebo $\text{val}_e\, R(y, y) = 1$ pri každom ohodnotení premenných,
e) nie je splnená, lebo je nepravdivá pri ohodnoteniach $(e(x), e(y)) \in \{(7, 10),\ (10, 7),\ (10, 12),\ (12, 10)\}$.

3.26 a) splnená,
b) nie je splnená, lebo je nepravdivá pri ohodnotení $e(y) = 2$,
c) nie je splnená, lebo je nepravdivá pri ohodnoteniach $e(x) = 2$, $e(y) \in \{3, 6, 7\}$,
d) splnená, ak $e(x) = 2$, potom $\mathrm{val}_e\, R(x, y) = 1$ pre každé $e(y) \in \mathcal{U}$,
e) nie je splnená, lebo pre ľubovoľné ohodnotenie $e(y) \in \mathcal{U}$ platí $\mathrm{val}_e(\forall x)R(x, y) = 0$.

3.27 a) splnená, lebo formula $W(x) \wedge \neg W(y)$ je pravdivá ak $e(x) \in \{\mathsf{m}, \mathsf{d}\}$, $e(y) \in \{\mathsf{o}, \mathsf{s}\}$,
b) nie je splnená, lebo pre $e(x) \in \{\mathsf{d}, \mathsf{s}\}$ je formula $(\exists y)x \triangleright y$ nepravdivá,
c) je splnená, lebo pre každé $e(x) \in \mathcal{U}$ je formula $(\exists y)(x \triangleright y \vee y \triangleright x)$ pravdivá,
d) nie je splnená, lebo pre $e(x) = \mathsf{o}$, $e(y) \in \{\mathsf{d}, \mathsf{s}\}$ je formula nepravdivá,
e) splnená, lebo formula $(\forall y)W(y)$ je nepravdivá,
f) nie je splnená, lebo pre $e(y) = \mathsf{d}$ je formula $W(y) \Rightarrow (\exists x)(y \triangleright x)$ nepravdivá,
g) je splnená,
h) nie je splnená, je nepravdivá pri každom ohodnotení premenných.

3.28 a) nie je splnená, lebo pre $e(x) = \mathsf{m}$ je formula nepravdivá,
b) je splnená,
c) je splnená, lebo pre $e(x) = \mathsf{m}$ je formula $(\forall y)(x \triangleright y \vee x = y)$ pravdivá,
d) nie je splnená, lebo pre $e(x) = \mathsf{m}$ je formula nepravdivá,
e) nie je splnená,
f) je splnená, je nepravdivá napr. pre $e(x) \in \{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2\}$,
g) nie je splnená, lebo pre $e(x) \in \{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2\}$ je formula nepravdivá,
h) nie je splnená, lebo pre $e(x) = \mathsf{d}$, $e(y) \in \{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2\}$ je formula nepravdivá.

3.29 a) nie je splnená, lebo pre $e(x) = e(y) \in \mathcal{U}$ je formula nepravdivá,
b) je splnená,
c) nie je splnená, lebo pre $e(x)\mathsf{m}$, $e(y) = \mathsf{d}$ je formula nepravdivá,
d) je splnená, lebo pre $e(x)\mathsf{m}$, $e(y) = \mathsf{d}$ je formula $(x \triangleright y) \wedge W(y)$ pravdivá.

3.30 a) je splnená,
b) je splnená, lebo pre každé $e(x)$ existuje také $e(y)$, že formula $x \triangleright y \vee y \triangleright x$ pravdivá,
c) nie je splnená, lebo pre $e(x) = e(y) \in \{\mathsf{m}, \mathsf{d}\}$ je formula nepravdivá,
d) je splnená.

3.31 a) je splnená,
b) je splnená,
c) nie je splnená, pre žiadne $e(x)$ neexistuje také $e(y)$, že formula $\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, x)$ je pravdivá,
d) nie je splnená, pre každé $e(x)$ existuje také $e(y)$, že formula $\neg R(x, y) \wedge$ $\wedge \neg R(y, x)$ je nepravdivá, napr. $e(y) = e(x)$,
e) nie je splnená, pre $e(x) = 12$ je formula nepravdivá.

3.32 a) je splnená,
b) nie je splnená, pre $e(x) = 6$ je nepravdivá,
c) je splnená, pre $e(x) = 8,\ e(y) = 9$ je formula $P(x) \wedge \neg T(x) \wedge T(y) \wedge$ $\wedge \neg P(y)$ pravdivá,
d) nie je splnená, lebo je nepravdivá napr. pre $e(x) = 8,\ e(y) = 9$.

3.33 a) nie je splnená, pre $e(x) = 2$ je nepravdivá,
b) je splnená, pre $e(x) = 2$ je formula $\neg S(x) \wedge S(f(x))$ pravdivá,
c) nie je splnená, formula $\neg S(x) \wedge \neg S(f(x))$ je nepravdivá pre každé $e(x) \in \mathcal{U}$,
d) je splnená.

3.34 a) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 1$,
b) je splnená, ak $4 \mid x + y$, tak aj $4 \mid y + x$,
c) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 1$, $e(y) = -$ -1, $e(z) = 1$,
d) je splnená, stačí pri danom $e(y)$ položiť $e(x) = -e(y)$,
e) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 1$, $e(y) = -1$.

3.35 a) je splnená, lebo každé číslo je deliteľom čísla 0,
b) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 2$, $e(y) = 4$,
c) je splnená,
d) je splnená, stačí pri danom $e(y)$ položiť $e(x) = e(y)$,
e) je splnená.

3.36 a) je splnená, lebo každé číslo je deliteľom seba samého,
b) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 2$, $e(y) = 5$,
c) je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 2$, $e(y) = 4$,
d) je splnená, dôkaz vo všeobecnosti vyplýva z definície deliteľnosti,
e) je splnená,dôkaz vo všeobecnosti vyplýva z definície deliteľnosti,
f) je splnená, stačí pri danom $e(x)$ položiť napr. $e(y) = e(x)$,
g) je splnená, stačí položit $e(x) = 1$.

3.37 a) je splnená, lebo dvojnásobok každého čísla je párne číslo,
b) je splnená, vyplýva to z komutatívnosti sčítania,
c) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 1$, $e(y) = 5$,
d) je splnená, stačí pri danom $e(x)$ položiť napr. $e(y) = e(x) + 1$,
e) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 1$, $e(y) = 4$.

3.38 a) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 2$,
b) nie je splnená, najväčší spoločný deliteľ nezávisí od poradia čísel,
c) je splnená, najväčší spoločný deliteľ nezávisí od poradia čísel,
d) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 2$, $e(y) =$ $= 5$, $e(z) = 4$,
e) nie je splnená, je nepravdivá napr. pri ohodnotení $e(x) = 2$, $e(y) = 5$,
f) nie je splnená, stačí pri danom $e(x)$ položiť napr. $e(y) = e(x) + 1$,
g) je splnená, stačí položit $e(x) = 1$.

3.3 Syntax predikátovej logiky

K elementárnym základom syntaxe patrí tvorba formúl, ktorá bola uvedená už v predchádzajúcej kapitole. Syntax predikátovej logiky vo veľkej miere nadväzuje na syntax výrokovej logiky. Budeme sa zaoberať pojmom dokázateľnosti v predikátovej logike. *Axiomatický systém* predikátovej logiky vyžaduje v porovnaní s výrokovou logikou ďalšie axiómy a odvodzovacie pravidlá. Na príčine sú kvantifikátory.

3.3.1 Teória a model

Definícia 3.3.1 ***Teória*** $\mathcal{T}$ *je určená svojim jazykom a systémom formúl v tomto jazyku, nazývaným* ***axiómy teórie*** *(****mimologické axiómy****). Ak je v štruktúre* $\boldsymbol{M}$ *pre jazyk teórie* $\mathcal{T}$ *splnená každá axióma teórie* $\mathcal{T}$*, hovoríme, že* $\boldsymbol{M}$ *je* ***model teórie*** $\mathcal{T}$*. Teória, ktorá má model, je* ***splniteľná****.*

V ďalšom uvedieme niekoľko príkladov teórií v predikátovej logike.[3]

Príklad 3.3.1
1. *Robinsonova aritmetika* je teória určená axiómami:
RA 1 $g(x) \neq \boldsymbol{o}$
RA 2 $g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$
RA 3 $x \neq \boldsymbol{o} \Rightarrow (\exists y)(x = g(y))$
RA 4 $x + \boldsymbol{o} = x$
RA 5 $x + g(y) = g(x + y)$
RA 6 $x \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$
RA 7 $x \cdot g(y) = (x \cdot y) + x$

Modelom Robinsonovej aritmetiky je štruktúra $\boldsymbol{M}$, kde univerzom je množina $\mathbb{N}_0$ prirodzených čísel s pridaným číslom 0, interpretácia konštantného symbolu $\boldsymbol{o}$ je číslo 0, unárneho funkčného symbolu g je funkcia nasledovníka ($[\![g]\!](x) = x + 1$) a binárnych funkčných symbolov $+, \cdot$ sú sčítanie a násobenie dvoch čísel.

Dokážeme, že je splnená axióma RA 7. Je potrebné uvedomiť si, že má byť splnený jej uzáver, t. j. $(\forall x)(\forall y)(x \cdot g(y) = (x \cdot y) + x)$.
Dôkaz. Ukážeme, že realizácie termov $\mathsf{t}_1 : x \cdot g(y)$ a $\mathsf{t}_2 : (x \cdot y) + x$ sa rovnajú pri ľubovoľnom ohodnotení premenných. Máme:
$[\![\mathsf{t}_1]\!]_e = [\![x \cdot g(y)]\!]_e = [\![x]\!]_e \cdot [\![g(y)]\!]_e = e(x) \cdot (e(y) + 1) = e(x) \cdot e(y) + e(x)$,
$[\![\mathsf{t}_2]\!]_e = [\![x \cdot y]\!]_e + [\![x]\!]_e = e(x) \cdot e(y) + e(x)$.
Platí $[\![\mathsf{t}_1]\!]_e = [\![\mathsf{t}_2]\!]_e$ pri ľubovoľnom ohodnotení premenných e, teda axióma RA 7 je splnená v štruktúre $\boldsymbol{M}$. Dôkazy zvyšných axióm sú obdobné, väčšina z nich je triviálna.

Príklad 3.3.2 *Teória príbuzenstva* je určená axiómami:
P 1 $(x \triangleright y \wedge y \triangleright z) \Rightarrow x \triangleright z$
P 2 $x \triangleright y \Rightarrow \neg(y \triangleright x)$
P 3 $(y \triangleright x \wedge z \triangleright x \wedge \neg(\exists q)(q \triangleright x \wedge (y \triangleright q \vee z \triangleright q)) \wedge y \neq z) \Rightarrow (W(y) \Leftrightarrow \neg W(z))$

[3] Pojem teórie v predikátovej logike je totožný s pojmom systém formúl.

Modelom teórie príbuzenstva je štruktúra, kde univerzom je ľubovoľná skupina ľudí. Interpretáciou unárneho predikátového symbolu W je množina osôb ženského pohlavia a interpretáciou binárneho predikátového symbolu $\triangleright$ je množina usporiadaným dvojíc prvkov z univerza takých, že prvok na prvom mieste je predkom prvku na druhom mieste v usporiadanej dvojici. Axiómy **P 1**, **P 2** vyjadrujú to, že relácia predka je reláciou ostrého usporiadania. Axióma **P 3** vyjadruje, že ak má človek oboch rodičov, tak sú rôzneho pohlavia.

Od axióm teórie $\mathcal{T}$, ktoré nazývame tiež *mimologické axiómy*, odlíšime *axiómy predikátovej logiky.*

3.3.2 Axiómy predikátovej logiky

Axiómy predikátovej logiky sú všetky formuly ktoré majú niektorý z nasledujúcich tvarov pre ľubovoľné formuly φ, ψ, θ predikátovej logiky, ľubovoľnú premennú x a ľubovoľný term $\mathtt{t}$.

PL 1 $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

PL 2 $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta))$

PL 3 $(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

PL 4 (axióma špecifikácie) $(\forall x)\varphi \Rightarrow \varphi(x/\mathtt{t})$
za predpokladu, že term $\mathtt{t}$ je substituovateľný za premennú x vo formule φ

PL 5 (axióma distribúcie) $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$
za predpokladu, že vo formule φ nemá premenná x voľný výskyt.

Axiómy rovnosti použijeme len v dôkazoch v teórii s rovnosťou a majú niektorý z nasledujúcich tvarov:

R 1 $x = x$

R 2 $(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots x_k = y_k \wedge P(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Rightarrow P(y_1, y_2, \ldots, y_k)$

R 3 $(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots x_k = y_k) \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(y_1, y_2, \ldots, y_k)$,
kde P označuje ľubovoľný k-árny predikát, f ľubovoľnú k-árnu funkciu a $x, x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k$ ľubovoľné premenné.

Odvodzovacie pravidlá:

modus ponens (MP): $\dfrac{\begin{array}{c}\varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi\end{array}}{\psi}$, **pravidlo zovšeobecnenia (PZ)** : $\dfrac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$.

Definícia 3.3.2 ***Dôkazom*** *v teórii $\mathcal{T}$ nazývame takú postupnosť formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ predikátovej logiky, že pre každú z formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ platí jedna z možností:*

a) je axiómou predikátovej logiky,

b) je axiómou teórie $\mathcal{T}$,

c) je možné ju odvodiť z predchádzajúcich formúl postupnosti pomocou niektorého odvodzovacieho pravidla predikátovej logiky.

Na základe pojmu dôkaz definujeme dokázateľnosť a vyvrátiteľnosť formuly, spornosť a konzistentnosť teórie.

Definícia 3.3.3 *Formulu φ nazývame* ***dokázateľnou v teórii*** *$\mathcal{T}$, keď existuje dôkaz v teórii $\mathcal{T}$, ktorého posledným členom je formula φ, píšeme $\mathcal{T} \vdash \varphi$. Formulu ψ nazývame* ***vyvrátiteľnou v teórii*** *$\mathcal{T}$, keď je jej negácia dokázateľná v teórii $\mathcal{T}$.*

Formulu φ nazývame ***výrokovo dokázateľnou v teórii*** *$\mathcal{T}$, keď existuje jej dôkaz v teórii $\mathcal{T}$, v ktorom sa spomedzi axióm predikátovej logiky nachádzajú len axiómy PL 1 – PL 3 a využíva sa len odvodzovacie pravidlo modus ponens.*

Definícia 3.3.4 *Teória je* ***sporná****, keď je v nej dokázateľná každá formula predikátovej logiky. Teória je* ***výrokovo sporná****, keď je v nej výrokovo dokázateľná každá formula predikátovej logiky. Ak teória nie je sporná, je* ***konzistentná****.*

Nasledujúca veta nám umožňuje použiť známe tautológie z výrokovej logiky na vytvorenie výrokovo dokázateľných formúl predikátovej logiky.

Veta 3.3.1 (Princíp dosadenia do tautológie výrokovej logiky)
Ak výrokové premenné v tautológii výrokovej logiky nahradíme formulami jazyka $\mathcal{L}$ predikátovej logiky tak, že každý výskyt jednej výrokovej premennej nahradzujeme vždy tou istou formulou jazyka $\mathcal{L}$, tak vzniknutá formula jazyka $\mathcal{L}$ je výrokovo dokázateľná bez mimologických axióm.

Príklad 3.3.3 Ak v tautológii výrokovej logiky $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ nahradíme premenné p, q, r formulami $x = x, x = y, y = x$ v tomto poradí, dostaneme formulu predikátovej logiky

$$((x = x \wedge x = y) \Rightarrow y = x) \Rightarrow (x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow y = x)), \tag{3.1}$$

ktorá je výrokovo dokázateľná bez mimologických axióm. □

Príklad 3.3.4 Dôkazom v teórii bez mimologických axióm s použitím pravidla zovšeobecnenia (PZ), modus ponens (MP) a princípu dosadenia do tautológie výrokovej logiky (T) je nasledujúca postupnosť:

	formula	axióma, prav.
$a)$	$(x = y \wedge x = x \wedge x = x) \Rightarrow y = x$	R 2
$b)$	$[(x = y \wedge x = x \wedge x = x) \Rightarrow y = x] \Rightarrow [x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow y = x)]$	T
$c)$	$x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow y = x)$	MP(a,b)
$d)$	$x = x$	R 1
$e)$	$x = y \Rightarrow y = x$	MP(c,d)

Je to vlastne dôkaz symetrie relácie rovnosti. V kroku b) sme použili tautológiu (3.1) so zmeneným poradím a zdvojenou formulou v konjunkcii. □

Vo výrokovej logike sme sa stretli s vetou o dedukcii. Obdobná veta platí aj v predikátovej logike, avšak s jednou dodatočnou podmienkou.

Veta 3.3.2 (o dedukcii) *Pre každú formulu ψ a uzavretú formulu φ jazyka teórie $\mathcal{T}$ platí*

$$\mathcal{T},\ \varphi \vdash \psi \quad \textit{práve vtedy, keď} \quad \mathcal{T} \vdash \varphi \Rightarrow \psi.$$

Príklad 3.3.5 Použitím vety o dedukcii preformulujte nasledovnú úvahu:

Všetci študenti sú usilovní.
Niektorí študenti sú nadaní.
____
Učiteľ sa teší na výuku.

Riešenie. Existujú dve možnosti, ako prepísať úvahu použitím vety o dedukcii.

Všetci študenti sú usilovní.
____
Ak sú niektorí študenti nadaní, učiteľ sa teší na výuku.

alebo

Niektorí študenti sú nadaní.
____
Ak sú všetci študenti usilovní, učiteľ sa teší na výuku. □

Veta 3.3.3 (o uzávere) *Pre každú formulu φ a premennú x jazyka teórie $\mathcal{T}$ platí*

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \ \textit{práve vtedy, keď} \ \mathcal{T} \vdash (\forall x)\varphi.$$

Príklad 3.3.6 Použitím vety o uzávere môžeme úvahu

Je pekné počasie.
____
Človek má dobrú náladu.

preformulovať nasledovne:

Je pekné počasie.
____
Každý človek má dobrú náladu.

Veta 3.3.4 (O dôkaze sporom) *Nech $\mathcal{T}$ je teória predikátovej logiky, φ a ψ sú uzavreté a θ je ľubovoľná formula jazyka teórie $\mathcal{T}$. Potom*

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \ \textit{práve vtedy, keď teória} \ \mathcal{T},\ \neg\varphi \ \textit{je sporná.}$$

Príklad 3.3.7 Rozhodnite, či v nasledujúcich príkladoch bola správne použitá veta o dôkaze sporom.

a) Všetci študenti chodia na prednášky.
____
Študent Marek chodí na prednášky.

b) Niektoré zvieratá majú ostré pazúry.
____
Tiger má ostré pazúry.

Riešenie.
a) Teórie pozostávajúca z tvrdení: „Všetci študenti chodia na prednášky.“ a „Študent Marek nechodí na prednášky.“ je sporná, teda úvaha je správna.
b) Teórie pozostávajúca z tvrdení: „Niektoré zvieratá majú ostré pazúry.“ a „Tiger nemá ostré pazúry.“ nie je sporná, teda úvaha je nesprávna. □

Veta 3.3.5 (O dôkaze rozborom prípadov) *Nech $\mathcal{T}$ je teória predikátovej logiky, φ a ψ sú uzavreté a θ je ľubovoľná formula jazyka teórie $\mathcal{T}$. Potom*

$$T,\ \varphi \vee \psi \vdash \theta \quad \textit{práve vtedy, keď} \quad \mathcal{T},\ \varphi \vdash \theta \ \textit{a súčasne}\ T,\ \psi \vdash \theta.$$

Príklad 3.3.8 Doplňte tak, aby bola správne použitá veta o dôkaze rozborom prípadov.

$$\frac{\text{Ak je niekto múdry alebo sú všetci usilovní, úloha bude vyriešená.}}{\text{Ak} \ldots\ldots, \text{ úloha bude vyriešená.}}$$

Riešenie. Danú úvahu môžeme preformulovať dvoma spôsobmi:

$$\frac{\text{Ak je niekto múdry alebo sú všetci usilovní, úloha bude vyriešená.}}{\text{Ak je niekto múdry, úloha bude vyriešená.}}$$

alebo

$$\frac{\text{Ak je niekto múdry alebo sú všetci usilovní, úloha bude vyriešená.}}{\text{Ak sú všetci usilovní, úloha bude vyriešená.}}$$ □

Veta 3.3.6 (O neutrálnej formule) *Nech $\mathcal{T}$ je teória predikátovej logiky, φ a ψ sú uzavreté formuly jazyka teórie $\mathcal{T}$. Potom*

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \quad \textit{práve vtedy, keď} \quad \mathcal{T},\ \psi \vdash \varphi \ \textit{a súčasne}\ \mathcal{T},\ \neg\psi \vdash \varphi.$$

Príklad 3.3.9 Doplňte chýbajúce časti viet tak, aby bol správne použitá veta o neutrálnej formule:

a) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Ak sú všetci ľudia veselí, je pekné počasie.}\\ \text{Ak} \ldots\ldots, \text{ je pekné počasie.}\end{array}}{\ldots\ldots}$$

b) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Ak má nejaký fajčiar vysoký krvný tlak,} \ldots\ldots.\\ \text{Ak} \ldots\ldots, \text{ potom} \ldots\ldots.\end{array}}{\text{Fajčenie je škodlivé.}}$$

Riešenie.

a) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Ak sú všetci ľudia veselí, je pekné počasie.}\\ \text{Ak sú niektorí ľudia smutní, je pekné počasie.}\end{array}}{\text{Je pekné počasie.}}$$

b) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Ak má nejaký fajčiar vysoký krvný tlak, fajčenie je škodlivé.}\\ \text{Ak žiaden fajčiar nemá vysoký krvný tlak, fajčenie je škodlivé.}\end{array}}{\text{Fajčenie je škodlivé.}}$$ □

Nasledujúca veta dáva do súvisu sémantický a syntaktický princíp.

Veta 3.3.7 (O úplnosti) *Pre každú teóriu $\mathcal{T}$ a pre každú formulu φ jazyka tejto teórie platí*

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \quad \textit{práve vtedy, keď} \quad \mathcal{T} \models \varphi.$$

Veta hovorí, že formula φ je dokázateľná v teórii $\mathcal{T}$ práve vtedy, keď je jej sémantickým dôsledkom. Špeciálne (ak $\mathcal{T} = \emptyset$) platí, že formula je dokázateľná v teórii bez mimologických axióm práve vtedy, keď je tautológia.

Dôsledok 3.3.1

a) Sporná teória nemá model.

b) Každá konzistentná teória má model.

Dôkaz. Dokážeme časť a).

Nech $\mathcal{T}$ je sporná teória s modelom $\boldsymbol{M}$ a nech φ je uzavretá formula. V spornej teórii je dokázateľná každá formula, teda $\mathcal{T} \vdash \varphi$ aj $\mathcal{T} \vdash \neg\varphi$. Potom podľa vety 3.3.7 platí $\mathcal{T} \models \varphi$ aj $\mathcal{T} \models \neg\varphi$. Potom $\models_M \varphi$ aj $\models_M \neg\varphi$, čo podľa vety 3.2.1 nie je možné.

Dôkaz časti b) neuvádzame pre jeho náročnosť. □

Úlohy

3.32 Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti formúl sú dôkazmi len s použitím princípu dosadenia do tautológie výrokovej logiky (T), pravidla zovšeobecnenia (PZ) a modus ponens (MP):

a) v teórii s rovnosťou bez mimologických axióm

i) $(x = x \wedge y = z \wedge x = y) \Rightarrow x = z$
ii) $[(x = x \wedge y = z \wedge x = y) \Rightarrow x = z] \Rightarrow [x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z))]$
iii) $x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z))$
iv) $x = x$
v) $x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)$
vi) $[x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)] \Rightarrow [(x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z]$
vii) $(x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$,

b) v teórii $\mathcal{T} = \{\mathsf{t} = \mathsf{s} \wedge P(\mathsf{t})\}$, kde t a s sú termy, P je unárny predikátový symbol

i) $\mathsf{t} = \mathsf{s} \wedge P(\mathsf{t})$
ii) $(x = y \wedge P(x)) \Rightarrow P(y)$
iii) $(\forall y)[(x = y \wedge P(x)) \Rightarrow P(y)]$
iv) $(\forall y)[(x = y \wedge P(x)) \Rightarrow P(y)] \Rightarrow [(x = \mathsf{s} \wedge P(x)) \Rightarrow P(\mathsf{s})]$

v) $(x = \mathsf{s} \wedge P(x)) \Rightarrow P(\mathsf{s})$
vi) $(\forall x)[(x = \mathsf{s} \wedge P(x)) \Rightarrow P(\mathsf{s})]$
vii) $(\forall x)[(x = \mathsf{s} \wedge P(x)) \Rightarrow P(\mathsf{s})] \Rightarrow [(\mathsf{t} = \mathsf{s} \wedge P(\mathsf{t})) \Rightarrow P(\mathsf{s})]$
viii) $(\mathsf{t} = \mathsf{s} \wedge P(\mathsf{t})) \Rightarrow P(\mathsf{s})$
ix) $P(\mathsf{s})$,

c) v teórii $\mathcal{T} = \{(\forall x)(x \in y),\ x \in y \Rightarrow y \notin x\}$

i) $(\forall x)(x \in y)$
ii) $x \in y \Rightarrow y \notin x$
iii) $(\forall y)(x \in y \Rightarrow y \notin x)$
iv) $x \in y \Rightarrow (\forall y)(y \notin x)$
v) $(\forall y)(x \in y) \Rightarrow x \in y$
vi) $x \in y$,

d) v teórii $\mathcal{T} = \{\mathsf{t} = \mathsf{s}\}$, kde t a s sú termy

i) $\mathsf{t} = \mathsf{s}$
ii) $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$
iii) $(\forall x)[x = y \Rightarrow f(x) = f(y)]$
iv) $(\forall x)[x = y \Rightarrow f(x) = f(y)] \Rightarrow [\mathsf{t} = y \Rightarrow f(\mathsf{t}) = f(y)]$
v) $\mathsf{t} = y \Rightarrow f(\mathsf{t}) = f(y)$
vi) $(\forall y)[\mathsf{t} = y \Rightarrow f(\mathsf{t}) = f(y)]$
vii) $(\forall y)[\mathsf{t} = y \Rightarrow f(\mathsf{t}) = f(y)] \Rightarrow [\mathsf{t} = \mathsf{s} \Rightarrow f(\mathsf{t}) = f(\mathsf{s})]$
viii) $\mathsf{t} = \mathsf{s} \Rightarrow f(\mathsf{t}) = f(\mathsf{s})$
ix) $f(\mathsf{t}) = f(\mathsf{s})$,

e) v teórii bez mimologických axióm

i) $(x = y \wedge x = x \wedge x = x) \Rightarrow y = x$
ii) $[(x = y \wedge x = x \wedge x = x) \Rightarrow y = x] \Rightarrow [x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow y = x)]$
iii) $x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow y = x)$
iv) $x = x$
v) $x = y \Rightarrow y = x$
vi) $(x = y \Rightarrow y = x) \Rightarrow ([(y = x \wedge P(y)) \Rightarrow P(x)] \Rightarrow [(x = y \wedge \neg P(x)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \neg P(y)])$
vii) $[(y = x \wedge P(y)) \Rightarrow P(x)] \Rightarrow [(x = y \wedge \neg P(x)) \Rightarrow \neg P(y)]$
viii) $(y = x \wedge P(y)) \Rightarrow P(x)$
ix) $(x = y \wedge \neg P(x)) \Rightarrow \neg P(y)$.

3.33 Rozhodnite, či v nasledujúcich príkladoch bola správne použitá veta o dôkaze sporom.

a) $\dfrac{\text{Nikto nie je dokonalý.}}{\text{Peter je dokonalý.}}$

b) Niektoré čísla sú párne.
Číslo 4 je párne.

c) Všetky vtáky vedia lietať.
Sliepka vie lietať.

3.34 Nasledujúce úvahy doplňte tak, aby bola správne použitá veta o dôkaze rozborom prípadov.

a) Ak je každý úprimný alebo je niekto obetavý, som spokojný.
Niekto je obetavý.
....

b) Ak niekto vie hrať na gitare alebo vie niekto spievať, budeme sa dobre baviť.
Ak niekto vie hrať na gitare, ...

c) Ak sú všetci žiaci zdraví alebo nikto nechýba, budeme písať písomku.
Ak ......, budeme písať písomku.

3.35 Doplňte chýbajúce časti viet tak, aby bol správne použitá veta o neutrálnej formule:

a) Ak sú všetci zdraví, nikto nemá zlú náladu.
Ak ......, nikto nemá zlú náladu.
......

b) Ak má každý chuť do jedla, ...
Ak ......, všetci musíme jesť.
....

c) Ak má niekto veľa peňazí, ...
Ak ......, ...
Všetci sme šťastní.

Výsledky

3.32

a) je to dôkaz, R 2, T, MP(i,ii), R 1, MP(iii,iv), T, MP(v,vi),

b) je to dôkaz, A, R 2, PZ(ii), P L4, MP(iii,iv), PZ(v), PL 4, MP(vi,vii), MP(i,viii),

c) nie je to dôkaz, iv) nie je podľa žiadnej axiómy ani pravidla,

d) je to dôkaz, A, R 3, PZ(ii), PL 4, MP(iii,iv), PZ(v), PL 4, MP(vi,vii), MP(i,viii),

e) je to dôkaz, R 2, T, MP(i,ii), R 1, MP(iv,iii), T, MP(v,vi), R 2, MP(vii,viii).

3.33

a) nie,

b) nie,

c) áno.

3.34

a) Ak je každý úprimný alebo je niekto obetavý, som spokojný.
Niekto je obetavý.

Som spokojný.

b) Ak niekto vie hrať na gitare alebo vie niekto spievať, budeme sa dobre baviť.

Ak niekto vie hrať na gitare, **budeme sa dobre baviť.**

c) Ak sú všetci žiaci zdraví alebo nikto nechýba, budeme písať písomku.

Ak **sú všetci žiaci zdraví**, budeme písať písomku.

alebo

Ak sú všetci žiaci zdraví alebo nikto nechýba, budeme písať písomku.

Ak **nikto nechýba**, budeme písať písomku.

3.35

a) Ak sú všetci zdraví, nikto nemá zlú náladu.
Ak **je niekto chorý**, nikto nemá zlú náladu.

Nikto nemá zlú náladu.

b) Ak má každý chuť do jedla, **všetci musíme jesť**.
Ak **niekto nemá chuť do jedla**, všetci musíme jesť.

Všetci musíme jesť.

c) Ak má niekto veľa peňazí, **všetci sme šťastní**.
Ak **nikto nemá veľa peňazí**, **všetci sme šťastní**.

Všetci sme šťastní.

3.4 Rezolučná metóda v predikátovej logike

S rezolučnou metódou sme sa stretli už vo výrokovej logike. Ak literálom v predikátovej logike budeme nazývať základnú formulu alebo jej negáciu, rezolučná metóda v predikátovej logike je v istom zmysle obdobou rezolučnej metódy vo výrokovej logike, je však zložitejšia a samotnému odvodeniu rezolventy predchádza tzv. unifikačný proces. V tejto kapitole sa postupne dopracujeme až k zisťovaniu splniteľnosti množiny formúl v predikátovej logike pomocou rezolučnej metódy. Jeho nevyhnutnou súčasťou je prevedenie formuly na *klauzulárny tvar*.

Na to, aby sme zvládli prepis formuly na klauzulárny tvar, potrebujeme sa oboznámiť s niekoľkými postupmi, ktoré sú jeho súčasťou.

3.4.1 Prenexný tvar formuly

Definícia 3.4.1 *Formula φ je v **prenexnom tvare**, keď je tvaru*

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\dots(Q_n x_n)\psi,$$

*kde $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ sú kvantifikátory ($\forall$ alebo $\exists$), $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú navzájom rôzne premenné a formula ψ je otvorená. Postupnosť $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\dots(Q_n x_n)$ sa nazýva **prefixom** a formula ψ **jadrom** formuly φ v prenexnom tvare.*

Príklad 3.4.1 Príkladom formuly v prenexnom tvare je formula

$$\varphi: \ (\forall x)(\exists z)(\forall y)[P(x,y) \Rightarrow (Q(z) \wedge \neg P(y,x))],$$

ktorej prefixom je postupnosť $(\forall x)(\exists z)(\forall y)$ a jadrom otvorená formula

$$\psi: \ P(x,y) \Rightarrow (Q(z) \wedge \neg P(y,x)).$$

Veta 3.4.1 Platia nasledujúce sémantické ekvivalencie:

1. Pre každú formulu φ platí

$$\text{i) } \neg(\forall x)\varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\exists x)\neg\varphi, \qquad \text{ii) } \neg(\exists x)\varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\forall x)\neg\varphi.$$

2. Pre každú formulu φ platí

$$\text{i) } (\forall x)(\forall y)\varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\forall y)(\forall x)\varphi, \qquad \text{ii) } (\exists x)(\exists y)\varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\exists y)(\exists x)\varphi.$$

3. Pre ľubovoľné dve formuly φ, ψ platí

$$\text{i) } (\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\forall x)(\varphi \wedge \psi), \qquad \text{ii) } (\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\exists x)(\varphi \vee \psi).$$

4. Nech φ, ψ sú ľubovoľné dve formuly, pričom premenná x nemá voľný výskyt vo formule φ. Potom

$$\begin{array}{llll}
\text{i)} & (\forall x)\psi \vee \varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\forall x)(\psi \vee \varphi), & \text{ii)} & (\exists x)\psi \vee \varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\exists x)(\psi \vee \varphi), \\
\text{iii)} & (\forall x)\psi \wedge \varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\forall x)(\psi \wedge \varphi), & \text{iv)} & (\exists x)\psi \wedge \varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\exists x)(\psi \wedge \varphi).
\end{array}$$

5. Nech φ, ψ sú ľubovoľné dve formuly, pričom premenná x nemá voľný výskyt vo formule φ. Potom

$$\begin{array}{llll}
\text{i)} & \varphi \Rightarrow (\forall x)\psi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi), & \text{ii)} & (\forall x)\psi \Rightarrow \varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\exists x)(\psi \Rightarrow \varphi), \\
\text{iii)} & \varphi \Rightarrow (\exists x)\psi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi), & \text{iv)} & (\exists x)\psi \Rightarrow \varphi \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv (\forall x)(\psi \Rightarrow \varphi).
\end{array}$$

Podľa definície 3.4.1 vo formule v prenexnom tvare nemôže mať žiadna premenná súčasne voľný aj viazaný výskyt a nemôže sa opakovať kvantifikácia tej istej premennej. Ak po použití pravidiel 1 - 5 nie je formula v prenexnom tvare, na príčine sú opakované kvantifikácie tej istej premennej, resp. kolízia premenných (nedá sa použiť pravidlo 4 alebo 5 kvôli voľnému výskytu kvantifikovanej premennej vo formule φ).

Tento problém vieme vyriešiť pomocou Vety o variantoch, ktorej predchádza definícia *variantu formuly.*

Definícia 3.4.2 ***Variantom*** *formuly φ nazývame formulu, ktorú dostaneme z formuly φ nasledovným postupom:*
Podformulu formuly φ, ktorá má tvar $(\forall x)\psi$ (resp. $(\exists x)\psi$) nahradíme formulou $(\forall u)\psi(x/u)$ (resp. $(\exists u)\psi(x/u)$), kde u je ľubovoľná premenná, ktorá nemá vo formule ψ voľný výskyt a je vo formule ψ substituovateľná za premennú x, pričom tento postup môžeme opakovať.

Príklad 3.4.2 Variantom formuly $\varphi : (\forall x)(P(x,y) \vee (\exists x)(\forall y)Q(y,x))$ je formula $(\forall x)(P(x,y) \vee (\exists u)(\forall z)Q(z,u))$, v ktorej sme použili algoritmus uvedený v definícii 3.4.2 dvakrát – pre premennú x aj premennú y. To nám umožňuje zapísať formulu φ v prenexnom tvare, pričom poradie vyberania kvantifikátorov pred zátvorku nie je jednoznačne dané. Máme dve možnosti:
$\varphi_1 :\ (\exists u)(\forall z)(\forall x)(P(x,y) \vee Q(z,u))$,
$\varphi_2 :\ (\forall x)(\exists u)(\forall z)(P(x,y) \vee Q(z,u))$.
Pozor, pri vyberaní kvantifikátorov nesmieme zameniť poradie kvantifikátorov rôzneho typu stojacich bezprostredne za sebou, napr. tvar $(\forall x)(\forall z)(\exists u)(P(x,y) \vee \vee Q(z,u))$ nie je prenexným tvarom formuly φ.

□

Veta 3.4.2 (O variantoch) *Ak θ je variant formuly φ, potom $\varphi \models\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\!\models \theta$.*

Veta 3.4.3 (O prenexnom tvare) *Ku každej formule φ existuje taká formula θ v prenexnom tvare, že $\varphi \models\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\!\models \theta$.*

Príklad 3.4.3 Zapíšeme v prenexnom tvare formulu

$$\varphi :\ (\exists x)(P(x,y) \wedge (\forall y)Q(y,\boldsymbol{a})) \vee (\exists x)((\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists z)Q(y,z)).$$

Riešenie. Postupnosť formúl začínajúcu formulou φ a končiacu sémanticky ekvivalentnou formulou v prenexnom tvare zapíšeme do tabuľky:

k	Formula	Pravidlo
0	$(\exists x)(P(x,y) \wedge (\forall y)Q(y,\boldsymbol{a})) \vee (\exists x)((\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists z)Q(y,z))$	
1	$(\exists x)[(P(x,y) \wedge (\forall y)Q(y,\boldsymbol{a})) \vee ((\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists z)Q(y,z))]$	3 ii)
2	$(\exists x)[(P(x,y) \wedge (\forall t)Q(t,\boldsymbol{a})) \vee ((\forall u)P(x,u) \Rightarrow (\exists z)Q(y,z))]$	Veta 3.4.2
3	$(\exists x)[(\forall t)(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (\exists u)(P(x,u) \Rightarrow (\exists z)Q(y,z))]$	4 iii), 5ii)
4	$(\exists x)[(\forall t)(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (\exists u)(\exists z)(P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$	5 iii)
5	$(\exists x)(\forall t)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (\exists u)(\exists z)(P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$	4 i)
6	$(\exists x)(\forall t)(\exists u)(\exists z)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$	4 ii)

V krokoch 2 a 6 sme použili uvedené pravidlo dvakrát. Formula získaná v kroku 6 je v prenexnom tvare. Označíme
$\varphi_1 :\ (\exists x)(\forall t)(\exists u)(\exists z)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$.
Vyberanie kvantifikátorov pred zátvorku v krokoch 5, 6 môžeme urobiť aj v inom poradí, čím získame ďalšie formuly v prenexnom tvare, sémanticky ekvivalentné s formulou φ. Dostávame:
$\varphi_2 :\ (\exists x)(\exists u)(\forall t)(\exists z)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$,

$\varphi_3: \ (\exists x)(\exists z)(\forall t)(\exists u)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))],$
$\varphi_4: \ (\exists x)(\exists u)(\exists z)(\forall t)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))].$ □

3.4.2 Skolemovský variant formuly

V tejto časti sa budeme zaoberať hľadaním takej formuly k danej formule, ktorá je v prenexnom tvare, jej prefix neobsahuje existenčné kvantifikátory a je splniteľná práve vtedy, keď je splniteľná daná formula. Skôr, ako zadefinujeme skolemovský variant formuly, uvedieme dva motivačné príklady.

Príklad 3.4.4 Nájdime uzavretú formulu ψ bez existenčného kvantifikátora, ktorá je splniteľná práve vtedy, keď je splniteľná uzavretá formula $\varphi: \ (\exists x)\, P(x)$.

Riešenie. Vezmime uzavretú formulu $\psi: \ P(\boldsymbol{a})$, kde $\boldsymbol{a}$ je nový konštantný symbol. Dokážeme, že formula ψ je splniteľná práve vtedy, keď je splniteľná formula φ.

Ak je v nejakej štruktúre $\boldsymbol{M}$ pravdivá formula $P(\boldsymbol{a})$, potom je v tej istej štruktúre pravdivá aj formula $(\exists x)P(x)$ (ak $e(x) = [\![\boldsymbol{a}]\!]$, potom $\mathrm{val}_e\, P(x) = 1$, a teda $\models_M (\exists x)P(x)$).

Naopak, ak je v štruktúre $\boldsymbol{M}$ pravdivá formula $(\exists x)P(x)$, neznamená to, že práve $[\![\boldsymbol{a}]\!]$ je ten prvok z univerza $\mathcal{U}$, ktorý leží v $[\![P]\!]$. Existuje však nejaký prvok $d \in \mathcal{U}$ taký, že $d \in [\![P]\!]$. To znamená, že keď zmeníme interpretáciu $[\![\cdot]\!]$ na $[\![\cdot]\!]^*$ takú, že $[\![\boldsymbol{a}]\!]^* = d$, potom v štruktúre $\boldsymbol{M_1}$ s univerzom $\mathcal{U}$ a interpretáciou $[\![\cdot]\!]^*$ je formula $\psi: \ P(\boldsymbol{a})$ pravdivá, teda formula ψ je splniteľná. □

Príklad 3.4.5 Nájdime sentenciu ψ bez existenčného kvantifikátora, ktorá je splniteľná práve vtedy, keď je splniteľná sentencia $\varphi: \ (\forall x)(\exists y)Q(x,y)$.

Riešenie. Ak by sme položili $\psi: \ (\forall x)Q(x,\boldsymbol{a})$, dostali by sme formulu „silnejšiu“ ako je pôvodná formula. Zrejme pre dané ohodnotenie $e(x)$ je ohodnotenie premennej y, pri ktorom platí $\mathrm{val}_e\, Q(x,y) = 1$, závislé od $e(x)$. Tento fakt vyjadríme tým, že premennú y vo formule $Q(x,y)$ nahradíme termom $f(x)$, kde f je nový funkčný symbol. Dostaneme formulu $\psi: \ (\forall x)Q(x,f(x))$, ktorá je splniteľná práve vtedy, keď je splniteľná formula φ. Presný dôkaz neuvádzame, myšlienkový postup je obdobný ako v predchádzajúcom príklade. □

Zovšeobecníme postup uvedený v predchádzajúcich príkladoch:
Ak obsahuje formula φ v prenexnom tvare existenčný kvantifikátor, nahradíme každú podformulu tvaru $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n)(\exists y)\psi$ formulou $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n)\psi(y/f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, kde f je ľubovoľný nový funkčný symbol arity n. Ak je $n = 0$, t.j. formula φ má tvar $(\exists y)\psi$ nahradíme premennú y novým konštantným symbolom $\boldsymbol{a}$. Uvedený proces sa nazýva **skolemizácia**, nový funkčný symbol f je **skolemovská funkcia** a konštanta $\boldsymbol{a}$ je **skolemovská konštanta**. Tento postup opakujeme dovtedy, kým nedostaneme formulu v prenexnom tvare bez existenčných kvantifikátorov.

Definícia 3.4.3 ***Skolemovský variant $\boldsymbol{\varphi^S}$*** *formuly φ je formula v tvare $(\forall x_1, x_2, \dots x_k)\,\theta$, kde θ je otvorená formula získaná skolemizáciou. Formulu θ nazývame* ***otvorený skolemovský variant formuly*** *φ.*

Príklad 3.4.6 Nájdime skolemovský variant uzáveru formuly
$\varphi:\ (\exists z)(\forall x)(\exists t)[((x \rhd z) \vee W(y)) \Rightarrow (\neg W(z) \wedge W(t))]$.
Riešenie.
Formula φ je v prenexnom tvare. Keďže premenná y má vo formule φ voľný výskyt, musíme najprv napísať uzáver formuly φ. Dostávame

$$cl(\varphi):\ (\forall y)(\exists z)(\forall x)(\exists t)[(x \rhd z \vee W(y)) \Rightarrow (\neg W(z) \wedge W(t))].$$

Skolemovský variant dostaneme tak, že premennú z nahradíme skolemovskou funkciou $f(y)$ a premennú t skolemovskou funkciou $g(x, y)$ a dostaneme

$$cl(\varphi)^S:(\forall y)(\forall x)[((x \rhd f(y)) \vee W(y)) \Rightarrow (\neg W(f(y)) \wedge W(g(x,y)))].$$ □

Príklad 3.4.7 Nájdime skolemovský variant k uzáveru formuly φ z príkladu 3.4.3.
Riešenie.
Skolemovský variant bude závisieť od toho, ktorú z formúl $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ budeme skolemizovať. Pripomeňme, že ku každej z formúl musíme najprv napísať jej uzáver. Dostávame
$cl(\varphi_1):\ (\forall y)(\exists x)(\forall t)(\exists u)(\exists z)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$,
$cl(\varphi_1)^S:\ (\forall y)(\forall t)[(P(f(y),y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(f(y),g(y,t)) \Rightarrow Q(y,h(y,t)))]$.

$cl(\varphi_2):\ (\forall y)(\exists x)(\exists u)(\forall t)(\exists z)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$,
$cl(\varphi_2)^S:\ (\forall y)(\forall t)[(P(f(y),y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(f(y),g(y)) \Rightarrow Q(y,h(y,t)))]$.

$cl(\varphi_3):\ (\forall y)(\exists x)(\exists z)(\forall t)(\exists u)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$,
$cl(\varphi_3)^S:\ (\forall y)(\forall t)[(P(f(y),y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(f(y),h(y,t)) \Rightarrow Q(y,g(y)))]$,

$cl(\varphi_4):\ (\forall y)(\exists x)(\exists u)(\exists z)(\forall t)[(P(x,y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(x,u) \Rightarrow Q(y,z))]$,
$cl(\varphi_4)^S:\ (\forall y)(\forall t)[(P(f(y),y) \wedge Q(t,\boldsymbol{a})) \vee (P(f(y),g(y)) \Rightarrow Q(y,h(y)))]$.
Každá z uvedených možností je správna. Vidíme, že arita použitých skolemovských funkcií závisí od poradia existenčných a všeobecných kvantifikátorov v prefixe prenexného tvaru. Z hľadiska jednoduchšieho použitia pri rezolučnej metóde je vhodné pri prepise do prenexného tvaru voliť poradie kvantifikátorov, ktoré vedie k zavedeniu skolemovských funkcií čo najmenšej arity. Z tohto hľadiska má „najvýhodnejší" tvar formula φ_4, lebo $cl(\varphi_4)$ obsahuje len skolemovské funkcie arity 1. Teda je výhodné vytvoriť prenexný tvar, v ktorom sú existenčné kvantifikátory čo najviac vľavo. □

3.4.3 Klauzulárny tvar

Definícia 3.4.4 ***Literálom*** *v predikátovej logike budeme nazývať základnú formulu alebo jej negáciu.*

Klauzula *je uzavretá formula v tvare* $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_k)(l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_p)$, *kde* $l_1, l_2, \ldots, l_p$ *sú literály (môže byť* $p = 1$*). Disjunkciu* $l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_p$ *budeme nazývať* ***telo klauzuly****. Formula má* ***klauzulárny tvar****, keď je konjunkciou klauzúl.*

Postup pri vytváraní klauzulárneho tvaru formuly:

1. Uzáver formuly.
2. Prenexný tvar uzáveru formuly.
3. Otvorený skolemovský variant v klauzulárnom tvare.
4. Formula v klauzulárnom tvare.

Príklad 3.4.8 Nájdime klauzulárny tvar k uzáveru formuly a vypíšme klauzuly:

$$\varphi : \neg(x \rhd y) \Rightarrow (\exists z)(W(z) \wedge (\forall y)(z \rhd y))$$

Riešenie.

1. $cl(\varphi) : (\forall x)(\forall y)[\neg(x \rhd y) \Rightarrow (\exists z)(W(z) \wedge (\forall y)(z \rhd y))]$
2. $(\forall x)(\forall y)[\neg(x \rhd y) \Rightarrow (\exists z)(W(z) \wedge (\forall y)z \rhd y)] \models\!\!\!\dashv$
   $(\forall x)(\forall y)[x \rhd y \vee (\exists z)(W(z) \wedge (\forall y)z \rhd y)] \models\!\!\!\dashv$
   $(\forall x)(\forall y)(\exists z)[x \rhd y \vee (\forall t)(W(z) \wedge z \rhd t)] \models\!\!\!\dashv$
   $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)[x \rhd y \vee (W(z) \wedge z \rhd t)]$
3. $cl(\varphi)^S :\ (\forall x)(\forall y)(\forall t)[x \rhd y \vee (W(f(x,y)) \wedge f(x,y) \rhd t)] \models\!\!\!\dashv$
   $(\forall x)(\forall y)(\forall t)[(x \rhd y \vee W(f(x,y))) \wedge (x \rhd y \vee f(x,y) \rhd t)]$

4. $(\forall x)(\forall y)(x \rhd y \vee W(f(x,y))) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall t)(x \rhd y \vee f(x,y) \rhd t)$.
   Tento tvar je klauzulárnym tvarom.

Klauzuly sú:
$\mathcal{K}_1 :\ (\forall x)(\forall y)(x \rhd y \vee W(f(x,y)))$, $\quad \mathcal{K}_2 :\ (\forall x)(\forall y)(\forall t)(x \rhd y \vee f(x,y) \rhd t)$.

3.4.4 Rezolventy

Pripomeňme si *pravidlo rezolúcie* vo výrokovej logike:

Z klauzúl $\alpha \vee \neg l$ a $\beta \vee l$ odvodíme **rezolventu** $\alpha \vee \beta$, kde l je literál.

V predikátovej logike najjednoduchším prípadom, keď vieme odvodiť rezolventu rovnakým spôsobom ako vo výrokovej logike, je prípad, keď telá klauzúl obsahujú komplementárne literály.

Príklad 3.4.9 Nájdime rezolventu klauzúl

$$\mathcal{K}_1 : (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee \neg Q(x,y)), \qquad \mathcal{K}_2 : (\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \vee R(y)).$$

Riešenie. Klauzuly obsahujú dvojicu komplementárnych literálov: $\neg Q(x,y) \in \mathcal{K}_1,\ Q(x,y) \in \mathcal{K}_2$. Rezolventou je klauzula

$$K : (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee R(y)). \qquad \square$$

Príklad 3.4.10 Nájdime rezolventu klauzúl

$$\mathcal{K}_1 : (\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x)), \quad \mathcal{K}_2 :\ Q(\boldsymbol{a}) \vee R(\boldsymbol{b}).$$

Riešenie. Klauzuly $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ neobsahujú komplementárne literály, ale klauzula $(\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x))$ zahŕňa aj klauzulu $P(\boldsymbol{a}) \vee \neg Q(\boldsymbol{a})$. Pri tzv. *substitúcii* konštanty $\boldsymbol{a}$ za premennú x dostávame klauzuly

$$\mathcal{K}_1^{'} = P(\boldsymbol{a}) \vee \neg Q(\boldsymbol{a}), \quad \mathcal{K}_2^{'} = Q(\boldsymbol{a}) \vee R(\boldsymbol{b}),$$

ktoré už obsahujú komplementárne literály. Platí, že rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_1', \mathcal{K}_2'$ je zároveň rezolventou klauzúl $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$. Je to klauzula

$$\mathcal{K} :\ P(\boldsymbol{a}) \vee R(\boldsymbol{b}). \qquad \square$$

Zadefinujeme pojem substitúcia, intuitívne použitý v predchádzajúcom príklade.

Definícia 3.4.5 ***Substitúciou v procese unifikácie*** *budeme nazývať každú konečnú množinu* $\alpha = \{x_1/\mathtt{t}_1, x_2/\mathtt{t}_2, \ldots, x_n/\mathtt{t}_n\}$, *kde* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sú navzájom rôzne premenné a term* $\mathtt{t}_i$ *neobsahuje premennú* x_i *pre* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Pre ľubovoľný literál* l *označíme symbolom* $\alpha(l)$ *literál, ktorý dostaneme súčasným nahradením všetkých výskytov premenných* x_i *v literáli* l *termami* $\mathtt{t}_i$.

Príklad 3.4.11 Nájdime rezolventu klauzúl $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$, ak

$$\mathcal{K}_1 : (\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y,\boldsymbol{a})), \quad \mathcal{K}_2 : (\forall v)(\forall z)(\neg Q(g(v),z,z) \vee R(v,z)).$$

Riešenie. Snažíme sa vhodnou substitúciou vytvoriť z literálov $Q(x,y,\boldsymbol{a})$, $\neg Q(g(v),z,z)$ dvojicu komplementárnych literálov.
1. Za premennú x dosadíme term $g(v)$ a dostaneme:

$$Q(g(v),y,\boldsymbol{a}),\ \neg Q(g(v),z,z).$$

2. Za premennú y dosadíme z a dostaneme:

$$Q(g(v),z,\boldsymbol{a}),\ \neg Q(g(v),z,z).$$

3. Za premennú z dosadíme konštantu $\boldsymbol{a}$ a dostaneme:

$$Q(g(v),\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}),\ \neg Q(g(v),\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}).$$

Dostali sme dvojicu komplementárnych literálov. Postupným aplikovaním všetkých substitúcií na klauzuly $\mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2$ dostaneme klauzuly

$$\mathcal{K}_1^{'} : (\forall v)(\neg P(g(v),\boldsymbol{a}) \vee Q(g(v),\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})), \quad \mathcal{K}_2^{'} : (\forall v)(\neg Q(g(v),\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \vee R(v,\boldsymbol{a})).$$

Hľadaná rezolventa je klauzula $\mathcal{K} : (\forall v)(\neg P(g(v),\boldsymbol{a}) \vee R(v,\boldsymbol{a}))$. $\square$

Tento postup sa môže zdať náhodný. Proces, pri ktorom dostaneme z rôznych základných formúl s rovnakým predikátovým symbolom identické základné formuly, budeme nazývať *unifikačný proces*. Pri hľadaní správnych substitúcií pri unifikačnom procese nám poslúži pojem *diferenčná množina*.

Definícia 3.4.6 ***Diferenčnou množinou*** *disjunkcie základných formúl* $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_N$ *tvaru*

$$P(\mathsf{t}_1^{(1)}, \mathsf{t}_2^{(1)}, \ldots, \mathsf{t}_k^{(1)}) \vee P(\mathsf{t}_1^{(2)}, \mathsf{t}_2^{(2)}, \ldots, \mathsf{t}_k^{(2)}) \vee \ldots \vee P(\mathsf{t}_1^{(N)}, \mathsf{t}_2^{(N)}, \ldots, \mathsf{t}_k^{(N)})$$

rozumieme množinu termov $\{\mathsf{s}^{(1)}, \mathsf{s}^{(2)}, \ldots, \mathsf{s}^{(N)}\}$*, obsahujúcich prvé symboly zľava, ktoré nie sú spoločné všetkým formulám v disjunkcii, pričom term* $\mathsf{s}^{(j)}$ *je podtermom formuly* φ_j *pre* $j = 1, 2, \ldots, N$.

Príklad 3.4.12 Určme diferenčnú množinu disjunkcií základných formúl:

a) $P(x, y, \boldsymbol{a}) \vee P(x, x, y)$,

b) $P(x, y, \boldsymbol{a}) \vee P(x, f(x), y)$,

c) $P(f(y), \boldsymbol{a}, y) \vee P(f(x), y, x) \vee P(f(g(\boldsymbol{a})), y, z)$,

d) $P(g(x), \boldsymbol{a}, y) \vee P(f(x), y, x)$.

Riešenie.

a) Prvá dvojica odlišných symbolov je na druhom mieste v argumente predikátového symbolu P, teda $D = \{y, x\}$.

b) Na druhom mieste v argumente predikátového symbolu P máme v prvej formule premennú y, v druhej formule je to term $f(x)$ (nie samotné f), teda $D = \{y, f(x)\}$.

c) Na prvom mieste v argumente predikátového symbolu P máme vo všetkých troch formulách funkčný symbol f, rozdiel je v jeho argumentoch, máme $D = \{y, x, g(\boldsymbol{a})\}$.

d) Na prvom mieste v argumente predikátového symbolu P máme vo formulách rôzne funkčné symboly f a g, v tomto prípade $D = \{g(x), f(x)\}$. □

Definícia 3.4.7 *Substitúcia* α *je* ***unifikátor*** *disjunkcie základných formúl* $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_N$ *práve vtedy, keď sú všetky formuly* $\alpha(\varphi_j)$, $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *identické. Substitúcia* β *je* ***optimálny unifikátor****, ak je najvšeobecnejšia možná. Základná formula* $\beta(\varphi_j)$*,identická pre všetky* j*, ktorú dostaneme po aplikácii optimálneho unifikátora, sa nazýva* ***faktor disjunkcie****.*

Unifikačný algoritmus (nájdenie optimálneho unifikátora):

1. $k = 0$, α_0 je prázdna substitúcia.

2. Ak sú všetky formuly $\alpha_k(\varphi_j)$ pre $j \leqq N$ rovnaké, tak $\beta = \alpha_k$ je optimálny unifikátor disjunkcie $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_N$ a algoritmus končí. V opačnom prípade vykonáme takú modifikáciu substitúcie α_k, aby sme stotožnili vhodné dva prvky diferenčnej množiny D_k.

   Ak D_k obsahuje premennú x_i a term t_i, ktorý premennú x_i neobsahuje, tak substitúcia α_{k+1} obsahuje všetky prvky substitúcie α_k s nahradenými všetkými výskytmi premennej x_i termom t_i a naviac obsahuje zložku $\{x_i/\mathsf{t}_i\}$. Položíme $k := k+1$ a vrátime sa na na začiatok 2. kroku.

Ak D_k neobsahuje takú premennú x_i a term t_i, ktorý neobsahuje premennú x_i, disjunkcia nie je unifikovateľná a algoritmus končí.

V súlade s týmto algoritmom môžeme zapísať postup pri hľadaní optimálneho unifikátora v príklade 3.4.11 pomocou prehľadnej tabuľky.

k	α_k	$\alpha_k(\varphi_1) \vee \alpha_k(\varphi_2)$	D_k
0	$\emptyset$	$Q(x, y, \boldsymbol{a}) \vee Q(g(v), z, z)$	$\{x,\ g(v)\}$
1	$\{x/g(v)\}$	$Q(g(v), y, \boldsymbol{a}) \vee Q(g(v), z, z)$	$\{y,\ z\}$
2	$\{x/g(v), y/z\}$	$Q(g(v), z, \boldsymbol{a}) \vee Q(g(v), z, z)$	$\{z,\ \boldsymbol{a}\}$
3	$\{x/g(v), y/\boldsymbol{a},\ z/\boldsymbol{a}\}$	$Q(g(v), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \vee Q(g(v), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$	$\emptyset$

Substitúcia $\beta = \alpha_3$ je **optimálny unifikátor**. Formula $Q(g(v), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ je **faktor disjunkcie**. Po aplikácii optimálneho unifikátora na klauzuly $\mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2$ odvodíme rezolventu $\mathcal{K}$ (viď príklad 3.4.11).

Príklad 3.4.13 Nájdime rezolventu klauzúl $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$, ak

$$\mathcal{K}_1 : \ (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(f(x), \boldsymbol{a})), \quad \mathcal{K}_2 : \ (\forall y, z)(\neg Q(y, y) \vee R(f(y), z)).$$

Riešenie. Hľadáme unifikátor disjunkcie $Q(f(x), \boldsymbol{a}) \vee Q(y, y)$.

k	α_k	$\alpha_k(\varphi_1) \vee \alpha_k(\varphi_2)$	D_k
0	$\emptyset$	$Q(f(x), \boldsymbol{a}) \vee Q(y, y)$	$\{f(x),\ y\}$
1	$\{y/f(x)\}$	$Q(f(x), \boldsymbol{a}) \vee Q(f(x), f(x))$	$\{f(x),\ \boldsymbol{a}\}$

Pretože množina D_1 neobsahuje žiadnu premennú, neexistuje unifikátor danej disjunkcie. Disjunkcia **nie je unifikovateľná**, a teda sa nedá odvodiť rezolventu z klauzúl $\mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2$. $\square$

Príklad 3.4.14 Nájdime všetky rezolventu klauzúl $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$, ak

$$\mathcal{K}_1 : \ (\forall x)(\neg R(x, x) \vee Q(f(x), x)), \quad \mathcal{K}_2 : \ (\forall y, z)(\neg Q(y, y) \vee R(f(y), z)).$$

Riešenie.Vzhľadom na to, že máme pozitívny aj negatívny literál pre predikátový symbol P aj pre predikátový symbol Q, máme dve možnosti pre unifikáciu a následné odvodenie rezolventy.

1. Hľadáme unifikátor disjunkcie $R(x, x) \vee R(f(y), z)$.

k	α_k	$\alpha_k(\varphi_1) \vee \alpha_k(\varphi_2)$	D_k
0	$\emptyset$	$R(x, x) \vee R(f(y), z)$	$\{x,\ f(y)\}$
1	$\{x/f(y)\}$	$R(f(y), f(y)) \vee R(f(y), z)$	$\{f(y),\ z\}$
2	$\{x/f(y),\ z/f(y)\}$	$R(f(y), f(y)) \vee R(f(y), f(y))$	$\emptyset$

Substitúcia $\beta = \{x/f(y),\, y/f(y)\}$ je optimálny unifikátor disjunkcie $R(x,x) \vee$ $\vee\, R(f(y),z)$. Dostávame klauzuly

$$\mathcal{K}_1' : (\forall y)(\neg R(f(y),f(y)) \vee Q(f(f(y)),f(y))), \quad \mathcal{K}_2' : (\forall y)(\neg Q(y,y) \vee R(f(y),f(y))).$$

Rezolventou je klauzula

$$\mathcal{K};\ (\forall y)(Q(f(f(y)),f(y)) \vee Q(y,y)).$$

2. Hľadáme unifikátor disjunkcie $Q(f(x),x) \vee Q(y,y)$.

k	α_k	$\alpha_k(\varphi_1) \vee \alpha_k(\varphi_2)$	D_k
0	$\emptyset$	$Q(f(x),x) \vee Q(y,y)$	$\{f(x),\ y\}$
1	$\{y/f(x)\}$	$Q(f(x),x) \vee Q(f(x),f(x))$	$\{f(x),x\}$

Diferenčná množina D_1 obsahuje premennú x a term $f(x)$, ktorý túto premennú obsahuje. Keďže podľa definície 3.4.7 nie je možné nahradiť premennú takým termom, ktorý danú premennú obsahuje, neexistuje unifikátor danej disjunkcie. Disjunkcia nie je unifikovateľná, a teda sa nedá odvodiť ďalšia rezolventu z klauzúl $\mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2$. □

Príklad 3.4.15

a) Nájdime optimálny unifikátor a faktor disjunkcie základných formúl

$$(x \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd z) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (t \rhd u).$$

b) Využitím unifikácie z bodu a) odvodíme rezolventu klauzúl

$$\mathcal{K}_1 : (\forall x,y,z)(\neg(x \rhd y) \vee \neg(\boldsymbol{a} \rhd z) \vee \neg(\boldsymbol{a} \rhd y)),$$
$$\mathcal{K}_2 : (\forall t,u)((t \rhd u) \vee W(t) \vee \neg W(u)).$$

Riešenie.

a)

k	α_k	$\alpha_k(\varphi_1) \vee \alpha_k(\varphi_2) \vee \alpha_k(\varphi_3) \vee \alpha_k(\varphi_4)$	D_k
0	$\emptyset$	$(x \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd z) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (t \rhd u)$	$\{\boldsymbol{a},\, x,\, t\}$
1	$\{x/\boldsymbol{a}\}$	$(\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd z) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (t \rhd u)$	$\{\boldsymbol{a},\, t\}$
2	$\{x/\boldsymbol{a}, t/\boldsymbol{a}\}$	$(\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd z) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd u)$	$\{y,\, u,\, z\}$
3	$\{x/\boldsymbol{a}, t/\boldsymbol{a}, z/y\}$	$(\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd u)$	$\{y,\, u\}$
4	$\{x/\boldsymbol{a}, t/\boldsymbol{a}, z/y, u/y\}$	$(\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y) \vee (\boldsymbol{a} \rhd y)$	$\emptyset$

Optimálny unifikátor je substitúcia $\beta = \{x/\boldsymbol{a}, t/\boldsymbol{a}, z/y, u/y\}$, faktor disjunkcie je formula $(\boldsymbol{a} \rhd y)$.

b) Aplikáciou unifikátora β na klauzuly $\mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2$ dostaneme

$$\mathcal{K}_1' : (\forall y)(\neg(\boldsymbol{a} \rhd y) \vee \neg(\boldsymbol{a} \rhd y) \vee \neg(\boldsymbol{a} \rhd y))\ , \mathcal{K}_2' : (\forall y)((\boldsymbol{a} \rhd y) \vee W(\boldsymbol{a}) \vee \neg W(y)).$$

Rezolventa je klauzula $\mathcal{K} : (\forall y)(W(\boldsymbol{a}) \vee \neg W(y))$. □

Veta 3.4.4 (***Všeobecné pravidlo rezolúcie***)
Nech θ_1, θ_2 sú dve klauzuly bez spoločnej premennej také, že θ_1 obsahuje poddisjunkciu

$$P(\mathsf{t}_1^{(1)},\mathsf{t}_2^{(1)},\ldots,\mathsf{t}_k^{(1)}) \vee P(\mathsf{t}_1^{(2)},\mathsf{t}_2^{(2)},\ldots,\mathsf{t}_k^{(2)}) \vee \ldots \vee P(\mathsf{t}_1^{(N)},\mathsf{t}_2^{(N)},\ldots,\mathsf{t}_k^{(N)})$$

a klauzula θ_2 obsahuje poddisjunkciu

$$\neg P(\mathsf{s}_1^{(1)},\mathsf{s}_2^{(1)},\ldots,\mathsf{s}_k^{(1)}) \vee \neg P(\mathsf{s}_1^{(2)},\mathsf{s}_2^{(2)},\ldots,\mathsf{s}_k^{(2)}) \vee \ldots \vee \neg P(\mathsf{s}_1^{(M)},\mathsf{s}_2^{(M)},\ldots,\mathsf{s}_k^{(M)}),$$

pričom existuje optimálny unifikátor β disjunkcie

$$P(\mathsf{t}_1^{(1)},\mathsf{t}_2^{(1)},\ldots,\mathsf{t}_k^{(1)}) \vee P(\mathsf{t}_1^{(2)},\mathsf{t}_2^{(2)},\ldots,\mathsf{t}_k^{(2)}) \vee \ldots \vee P(\mathsf{t}_1^{(N)},\mathsf{t}_2^{(N)},\ldots,\mathsf{t}_k^{(N)}) \vee$$

$$\vee P(\mathsf{s}_1^{(1)},\mathsf{s}_2^{(1)},\ldots,\mathsf{s}_k^{(1)}) \vee P(\mathsf{s}_1^{(2)},\mathsf{s}_2^{(2)},\ldots,\mathsf{s}_k^{(2)}) \vee \ldots \vee P(\mathsf{s}_1^{(M)},\mathsf{s}_2^{(M)},\ldots,\mathsf{s}_k^{(M)}).$$

Nech $P(\mathsf{r}_1,\mathsf{r}_2,\ldots,\mathsf{r}_k)$ je faktor tejto disjunkcie.
***Rezolventou** klauzúl θ_1 a θ_2 je klauzula θ_3, ktorá je disjunkciou klauzuly $\beta(\theta_1)$ po vypustení všetkých výskytov literálov $P(\mathsf{r}_1,\mathsf{r}_2,\ldots,\mathsf{r}_k)$ a klauzuly $\beta(\theta_2)$ po vypustení všetkých výskytov literálov $\neg P(\mathsf{r}_1,\mathsf{r}_2,\ldots,\mathsf{r}_k)$.*

Rezolučnú metódu používame na zisťovanie splniteľnosti , resp.konzistentnosti množiny formúl (teórie). Nasledujúca veta predstavuje nutnú a postačujúcu podmienku.

Veta 3.4.5 (***Robinsonov rezolučný princíp***) *Systém klauzúl je sporný práve vtedy, keď z neho môžeme opakovaným použitím všeobecného pravidla rezolúcie odvodiť prázdnu formulu **F**.*

3.4.5 Použitie rezolučnej metódy

Riešenie úlohy o splniteľnosti množiny formúl, resp. úloh na sémantický dôsledok môžeme zhrnúť do nasledujúcich piatich krokov.

1. Uzáver axióm (formúl) a eliminácia kvantifikátorov, ktoré neviažu žiadnu premennú. V úlohách typu $\mathcal{T} \models \alpha$ pridáme negáciu uzáveru formuly α k axiómam teórie $\mathcal{T}$.

2. Nahradenie spojok implikácie a ekvivalencie. Presun negácie dovnútra až pred základné formuly. Nájdenie ekvivalentných formúl v prenexnom tvare.

3. Skolemizácia.

4. Pridanie verzií axióm rovnosti, ak ide o teóriu s rovnosťou. Prepis formúl do klauzulárneho tvaru. Odlíšenie premenných v klauzulách.

5. Odvodzovanie rezolvent, až kým neodvodíme prázdnu rezolventu alebo už nie je možné ďalšie rezolventy odvodiť.

Príklad 3.4.16 Zistime či je splniteľná teória $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T} = \{P(x \vee Q(x), (\exists x)\neg P(x), \neg Q(x)\}.$$

Riešenie.

1. $\mathcal{T} = \{(\forall x)(P(x \vee Q(x)), (\exists x)\neg P(x), (\forall x)\neg Q(x)\}$.
2. Formuly sú v prenexnom tvare.
3. Skolemizáciou formuly $(\exists x)\neg P(x)$ dostávame formulu $\neg P(\boldsymbol{a})$. Teda $\mathcal{T} \models\!\!\!\dashv \{(\forall x)(P(x \vee Q(x)), \neg P(\boldsymbol{a}), (\forall x)\neg Q(x)\}$.
4. Všetky formuly sú v klauzulárnom tvare. Odlíšením premenných dostávame klauzuly:
   $\mathcal{K}_1 :\ (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
   $\mathcal{K}_2 :\ \neg P(\boldsymbol{a})$
   $\mathcal{K}_3 :\ (\forall y)\neg Q(y)$
5. *Odvodenie rezolventy klauzúl* $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$: Optimálny unifikátor disjunkcie $P(x) \vee$ $\vee\, P(\boldsymbol{a})$ je substitúcia $\beta = \{x/\boldsymbol{a}\}$. Rezolventa je $\mathcal{K}_4 :\ Q(\boldsymbol{a})$.
   Odvodenie rezolventy klauzúl $\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$: Optimálny unifikátor disjunkcie $Q(y) \vee$ $\vee\, Q(\boldsymbol{a})$ je substitúcia $\beta = \{y/\boldsymbol{a}\}$. Rezolventa je prázdna klauzula $\boldsymbol{F}$.

Odpoveď: Teória $\mathcal{T}$ nie je splniteľná. □

Príklad 3.4.17 Rozhodnime, či platí $\mathcal{T} \models \varphi$, ak

$$\mathcal{T} = \{(\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x)),\ (\exists x)R(x)\}, \quad \varphi :\ (\forall x)Q(x).$$

Riešenie.

1. $\mathcal{T} \cup \neg\varphi = \{(\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x)),\ (\exists x)R(x), (\exists x)\neg Q(x)\}$
2. $\mathcal{T} \cup \neg\varphi = \{(\forall x)(\neg R(x) \vee Q(x)),\ (\exists x)R(x), (\exists x)\neg Q(x)\}$
3. Skolemizáciou formúl $(\exists x)R(x)$, $(\exists x)\neg Q(x)$ dostávame formuly $R(\boldsymbol{a})$, $\neg Q(\boldsymbol{b})$, teda
   $\mathcal{T} \cup \neg\varphi \models\!\!\!\dashv \{(\forall x)(\neg R(x) \vee Q(x)),\ R(\boldsymbol{a}), \neg Q(\boldsymbol{b})\}$.
4. Všetky formuly sú v klauzulárnom tvare. Premenné sú odlíšené. Máme klauzuly:
   $\mathcal{K}_1 :\ (\forall x)(\neg R(x) \vee Q(x))$
   $\mathcal{K}_2 :\ R(\boldsymbol{a})$
   $\mathcal{K}_3 :\ \neg Q(\boldsymbol{b})$

5. *Odvodenie rezolventy klauzúl* $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$:
Optimálny unifikátor disjuncie $R(x) \vee R(\boldsymbol{a})$ je substitúcia $\beta = \{x/\boldsymbol{a}\}$. Rezolventa je $\mathcal{K}_4 : Q(\boldsymbol{a})$.
Odvodenie rezolventy klauzúl $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$:
Optimálny unifikátor disjuncie $Q(x) \vee Q(\boldsymbol{b})$ je substitúcia $\beta = \{x/\boldsymbol{b}\}$. Rezolventa je klauzula $\mathcal{K}_5 : \neg R(\boldsymbol{b})$.
Ďalšia rezolventa sa odvodiť nedá.

Odpoveď: Teória $\mathcal{T}$ je splniteľná, lebo sme neodvodili prázdnu klauzulu.

Príklad 3.4.18 Zistime či je splniteľná teória $\mathcal{T}$

$\mathcal{T} = \{(\forall x, y)(\neg P(x, y) \vee Q(x, y, \boldsymbol{a})),\ (\forall x, y)(\neg Q(g(x), y, y) \vee R(x, y)),\ \neg R(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}),$ $(\forall x)P(x, \boldsymbol{a})\}$.

Riešenie.
Kroky 1 - 3 nepotrebujeme vykonať, lebo máme daný systém klauzúl.

4. Potrebujeme odlíšiť premenné, t. j. každý kvantifikátor musí viazať inú premennú. Máme teda štyri klauzuly:
$\mathcal{K}_1 :\ (\forall x, y)(\neg P(x, y) \vee Q(x, y, \boldsymbol{a}))$,
$\mathcal{K}_2 :\ (\forall z, t)(\neg Q(g(z), t, t) \vee R(z, t))$,
$\mathcal{K}_3 :\ \neg R(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$,
$\mathcal{K}_4 :\ (\forall u)P(u, \boldsymbol{a})$.

5. i) *Odvodenie rezolventy klauzúl* $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$.
Optimálny unifikátor disjunkcie $Q(x, y, \boldsymbol{a}) \vee Q(g(z), t, t)$ je substitúcia $\{x/g(z),\ y/\boldsymbol{a},\ t/\boldsymbol{a}\}$.
Rezolventou je klauzula $\mathcal{K}_5 :\ (\forall z)(\neg P(g(z), \boldsymbol{a}) \vee R(z, \boldsymbol{a}))$.
ii) *Odvodenie rezolventy klauzúl* $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_4$.
Optimálny unifikátor disjunkcie $P(x, y) \vee P(u, \boldsymbol{a})$ je substitúcia $\{u/x, y/\boldsymbol{a}\}$.
Rezolventou je klauzula $\mathcal{K}_6 :\ (\forall x)Q(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$.
iii) *Odvodenie rezolventy klauzúl* $\mathcal{K}_4$, $\mathcal{K}_5$.
Optimálny unifikátor disjunkcie $P(g(z), \boldsymbol{a}) \vee P(u, \boldsymbol{a})$ je substitúcia $\{u/g(z)\}$.
Rezolventou je klauzula $\mathcal{K}_7 :\ (\forall z)R(z, \boldsymbol{a})$.
iv) *Odvodenie rezolventy klauzúl* $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_7$.
Optimálny unifikátor disjunkcie $R(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \vee R(z, \boldsymbol{a})$ je substitúcia $\{z/\boldsymbol{b}\}$.
Rezolventou je prázdna klauzula $\boldsymbol{F}$.

sme prázdnu rezolventu, teda teória $\mathcal{T}$ nie je splniteľná. □

Príklad 3.4.19 Zistime, či je splniteľná formula

$$\varphi : (\exists y)(\forall z)(P(z, y) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(z, x) \vee \neg P(x, z))).$$

Riešenie.

1. Formula je uzavretá a neobsahuje prebytočné kvantifikátory.

2. $\varphi \models\!\!\!\!\!\!\models (\exists y)(\forall z)[(P(z,y) \Rightarrow (\forall x)(\neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)) \wedge ((\forall x)(\neg P(z,x) \vee$
$\vee \neg P(x,z)) \Rightarrow P(z,y))] \models\!\!\!\!\!\!\models$

$(\exists y)(\forall z)[(\neg P(z,y) \vee (\forall x)(\neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)) \wedge ((\exists x)(P(z,x) \wedge$
$\wedge P(x,z)) \vee P(z,y))] \models\!\!\!\!\!\!\models$

$(\exists y)(\forall z)[(\neg P(z,y) \vee (\forall x)(\neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)) \wedge ((\exists t)(P(z,t) \wedge P(t,z)) \vee$
$\vee P(z,y))] \models\!\!\!\!\!\!\models$

$(\exists y)(\forall z)(\exists t)(\forall x)[(\neg P(z,y) \vee (\neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)) \wedge ((P(z,t) \wedge P(t,z)) \vee$
$\vee P(z,y))]$

3. φ^S : $(\forall z)(\forall x)[(\neg P(z,\boldsymbol{a}) \vee \neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)) \wedge (((P(z,f(z)) \wedge$
$\wedge P(f(z),z)) \vee P(z,\boldsymbol{a}))]$

4. Klauzulárny tvar:
$(\forall z)(\forall x)(\neg P(z,\boldsymbol{a}) \vee \neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)) \wedge (\forall z)(P(z,f(z)) \vee P(z,\boldsymbol{a})) \wedge$
$\wedge (\forall z)(P(f(z),z) \vee P(z,\boldsymbol{a}))$
Máme nasledujúce klauzuly, v ktorých sme odlíšili premenné:
$\mathcal{K}_1$: $(\forall z)(\forall x)(\neg P(z,\boldsymbol{a}) \vee \neg P(z,x) \vee \neg P(x,z))$
$\mathcal{K}_2$: $(\forall t)(P(t,f(t)) \vee P(t,\boldsymbol{a}))$
$\mathcal{K}_3$: $(\forall u)(P(f(u),u) \vee P(u,\boldsymbol{a}))$

5. Odvádzame rezolventy nasledujúcich klauzúl:
$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$:
Optimálny unifikátor disjunkcie $P(z,\boldsymbol{a}) \vee P(z,x) \vee P(x,z) \vee P(t,\boldsymbol{a})$ je
$\beta_1 : \{x/\boldsymbol{a}, z/\boldsymbol{a}, t/\boldsymbol{a}\}$.
Rezolventa je $\mathcal{K}_4$: $P(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$.
$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$:
Optimálny unifikátor disjunkcie $P(z,\boldsymbol{a}) \vee P(z,x) \vee P(x,z) \vee P(u,\boldsymbol{a})$ je
$\beta_2 : \{x/\boldsymbol{a}, z/\boldsymbol{a}, u/\boldsymbol{a}\}$.
Rezolventa je $\mathcal{K}_5$: $P(f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a})$.

$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_4$:
Optimálny unifikátor disjunkcie $P(x,z) \vee P(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ je
$\beta_3 : \{x/\boldsymbol{a}, z/f(\boldsymbol{a})\}$.
Rezolventa je $\mathcal{K}_6$: $\neg P(f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a})$.
Z klauzúl $\mathcal{K}_5, \mathcal{K}_6$ odvodíme prázdnu rezolventu $\boldsymbol{F}$.

Formula nie je splniteľná. □

Príklad 3.4.20 Nasledujúci úsudok sformalizujme a rezolučnou metódou rozhodnime, či je správny.

Žiaden žiak tejto triedy nie je hudobník.
Všetci hudobníci sú umelci.

Žiaden žiak tejto triedy nie je umelec.

Riešenie. Na formalizáciu zavedieme predikáty $Z(x) - x$ je žiak 1.A triedy, $H(x) - x$ je hudobník, $U(x) - x$ je umelec. Dostávame:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(Z(x) \Rightarrow \neg H(x)) \\ (\forall x)(H(x) \Rightarrow U(x)) \\ \hline \varphi: \ (\forall x)(Z(x) \Rightarrow \neg U(x)) \end{array}$$

1. $\mathcal{T} \cup \neg\varphi = \{(\forall x)(Z(x) \Rightarrow \neg H(x)),\ (\forall x)(H(x) \Rightarrow U(x)), (\exists x)(Z(x) \wedge \wedge\, U(x))\}$
2. $\mathcal{T} \cup \neg\varphi = \{(\forall x)(\neg Z(x) \vee \neg H(x)),\ (\forall x)(\neg H(x) \vee U(x)), (\exists x)(Z(x) \wedge \wedge\, U(x))\}$
3. Skolemizácia: $\{(\forall x)(\neg Z(x) \vee \neg H(x)),\ (\forall x)(\neg H(x) \vee U(x)), Z(\boldsymbol{a}) \wedge \wedge\, U(\boldsymbol{a})\}$
4. Všetky formuly sú v klauzulárnom tvare. Odlíšením premenných dostávame klauzuly:
   $\mathcal{K}_1:\ (\forall x)(\neg Z(x) \vee H(x))$,
   $\mathcal{K}_2:\ (\forall y)(\neg H(y) \vee U(y))$,
   $\mathcal{K}_3\ : Z(\boldsymbol{a})$,
   $\mathcal{K}_4:\ U(\boldsymbol{a})$.

5. *Odvodenie rezolventy klauzúl* $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$:
   Optimálny unifikátor disjunkcie $H(x) \vee H(y)$ je substitúcia $\beta = \{y/x\}$.
   Rezolventa je $\mathcal{K}_5:\ \neg Z(x) \vee U(x)$.

   Odvodenie rezolventy klauzúl $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$:
   Optimálny unifikátor disjunkcie $Z(x) \vee Z(\boldsymbol{a})$ je substitúcia $\beta = \{x/\boldsymbol{a}\}$.
   Rezolventa je klauzula $\mathcal{K}_6:\ H(\boldsymbol{a})$.

   Ďalšie rezolventy odvodiť nevieme.

Odpoveď: Teória $\mathcal{T} \cup \neg\varphi$ je splniteľná, teda úsudok nie je správny. $\square$

Príklad 3.4.21 Nasledujúci úsudok sformalizujme a rezolučnou metódou rozhodnime, či je správny.

Každý atlét má dobrú fyzickú kondíciu.
Niektorí prítomní sú atléti.

Niektorí prítomní majú dobrú fyzickú kondíciu.

Riešenie. Na formalizáciu zavedieme predikáty $A(x) - x$ je atlét, $K(x) - x$ má dobrú fyzickú kondíciu, $P(x) - x$ je prítomný. Dostávame:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(A(x) \Rightarrow K(x)) \\ (\exists x)(P(x) \wedge A(x)) \\ \hline \varphi: \ (\exists x)(P(x) \wedge K(x)) \end{array}$$

1. $\mathcal{T} \cup \neg\varphi = \{(\forall x)(A(x) \Rightarrow K(x)),\ (\exists x)(P(x) \wedge A(x)), (\forall x)(\neg P(x) \vee$ $\vee \neg K(x))\}$
2. $\mathcal{T} \cup \neg\varphi = \{(\forall x)(\neg A(x) \vee K(x)),\ (\exists x)(P(x) \wedge A(x)), (\forall x)(\neg P(x) \vee$ $\vee \neg K(x))\}$
3. Skolemizácia: $\{(\forall x)(\neg A(x) \vee K(x)),\ P(\boldsymbol{a}) \wedge A(\boldsymbol{a}), (\forall x)(\neg P(x) \vee$ $\vee \neg K(x))\}$
4. Všetky formuly sú v klauzulárnom tvare. Odlíšením premenných dostávame klauzuly:
   $\mathcal{K}_1 :\ (\forall x)(\neg A(x) \vee K(x))$
   $\mathcal{K}_2 :\ (\forall y)(\neg P(y) \vee \neg K(y))$
   $\mathcal{K}_3\ : P(\boldsymbol{a})$
   $\mathcal{K}_4 :\ A(\boldsymbol{a})$
5. *Odvodenie rezolventy klauzúl* $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$:
   Optimálny unifikátor disjunkcie $P(\boldsymbol{a}) \vee P(y)$ je substitúcia $\beta = \{y/\boldsymbol{a}\}$.
   Rezolventa je $\mathcal{K}_5 :\ \neg K(\boldsymbol{a})$.
   Odvodenie rezolventy klauzúl $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_5$:
   Optimálny unifikátor disjunkcie $K(x) \vee K(\boldsymbol{a})$ je substitúcia $\beta = \{x/\boldsymbol{a}\}$.
   Rezolventa je klauzula $\mathcal{K}_6 :\ \neg A(\boldsymbol{a})$.
   Odvodenie rezolventy klauzúl $\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_6$:
   Rezolventa je prázdna formula $\boldsymbol{F}$.

Odpoveď: Teória $\mathcal{T} \cup \neg\varphi$ je sporná, teda úsudok je správny.

Príklad 3.4.22 Nasledujúce úsudky sformalizujme a rezolučnou metódou rozhodnime, či sú správne.

a) Každý učiteľ matematiky učí aj fyziku.
   Žiaden učiteľ angličtiny neučí fyziku.
   Nejaký učiteľ učí angličtinu.
   ―――――――――――――――――――――
   Niektorý učiteľ angličtiny neučí matematiku.

b) Niektorý učiteľ matematiky učí aj fyziku.
   Žiaden učiteľ angličtiny neučí fyziku.
   Niektorý učiteľ angličtiny neučí slovenčinu.
   ―――――――――――――――――――――
   Niektorý učiteľ slovenčiny neučí matematiku.

Riešenie. Na formalizáciu zavedieme predikáty $M(x) - x$ je učiteľom matematiky, $F(x) - x$ je učiteľom fyziky, $A(x) - x$ je učiteľom angličtiny, $S(x) - x$ je učiteľom slovenčiny.

a) $(\forall x)(M(x) \Rightarrow F(x))$
   $(\forall x)(A(x) \Rightarrow \neg F(x))$
   $(\exists x)A(x)$
   ―――――――――――――――――――――
   $\alpha :\ (\exists x)(A(x) \wedge \neg M(x))$

   Formulu α negujeme, t.j. $\neg\alpha :\ (\forall x)(\neg A(x) \vee M(x))$ a pridáme ju k formulám nad čiarou, predstavujúcim systém $\mathcal{T}$. V tretej formule vykonáme skolemizáciu, všetky formuly prepíšeme do klauzulárneho tvaru a odlíšime premenné. Dostaneme klauzuly:

$\mathcal{K}_1: \ (\forall x)(\neg M(x) \vee F(x))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall y)(\neg A(y) \vee \neg F(y))$
$\mathcal{K}_3: \ A(\boldsymbol{a})$
$\mathcal{K}_4: \ (\forall z)(\neg A(z) \vee M(z))$

Odvádzame rezolventy:
$\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3:$ Optimálny unifikátor disjunkcie $A(\boldsymbol{a}) \vee A(y)$ je $\beta: \ \{y/\boldsymbol{a}\}$.
Rezolventa je $\mathcal{K}_5: \ \neg F(\boldsymbol{a})$
$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_5:$ Optimálny unifikátor disjunkcie $F(\boldsymbol{a}) \vee F(x)$ je $\beta: \ \{x/\boldsymbol{a}\}$.
Rezolventa je $\mathcal{K}_6: \ \neg M(\boldsymbol{a})$.
$\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_6:$ Optimálny unifikátor disjunkcie $M(\boldsymbol{a}) \vee M(z)$ je $\beta: \ \{z/\boldsymbol{a}\}$.
Rezolventa je $\mathcal{K}_7: \ \neg A(\boldsymbol{a})$.
$\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_7:$ Rezolventa je prázdna formula $\boldsymbol{F}$.
Keďže sme dostali prázdnu formulu, systém $\mathcal{T} \cup \neg\alpha$ je sporný a teda formula α je sémantickým dôsledkom systému $\mathcal{T}$. To znamená, že úvaha je správna.

b)
$$\begin{array}{l} (\exists x)(M(x) \wedge F(x)) \\ (\forall x)(A(x) \Rightarrow \neg F(x)) \\ (\exists x)(A(x) \wedge \neg S(x)) \\ \hline \alpha: \ (\exists x)(S(x) \wedge \neg M(x)) \end{array}$$

Formulu α negujeme, t.j. $\neg\alpha: \ (\forall x)(\neg S(x) \vee M(x))$ a pridáme ju k formulám nad čiarou. V prvej a tretej formule vykonáme skolemizáciu, všetky formuly prepíšeme do klauzulárneho tvaru a odlíšime premenné. Dostaneme klauzuly:

$\mathcal{K}_1: \ M(\boldsymbol{a})$
$\mathcal{K}_2: \ F(\boldsymbol{a})$
$\mathcal{K}_3: \ (\forall x)(\neg A(x) \vee \neg F(x))$
$\mathcal{K}_4: \ A(\boldsymbol{b})$
$\mathcal{K}_5: \ \neg S(\boldsymbol{b})$
$\mathcal{K}_6: \ (\forall y)(\neg S(y) \vee M(y))$

Odvádzame rezolventy:
$\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3:$ Optimálny unifikátor disjunkcie $F(\boldsymbol{a}) \vee F(x)$ je $\beta: \ \{x/\boldsymbol{a}\}$.
Rezolventa je $\mathcal{K}_6: \ \neg A(\boldsymbol{a})$.
$\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4:$ Optimálny unifikátor disjunkcie $A(\boldsymbol{b}) \vee A(x)$ je $\beta: \ \{x/\boldsymbol{b}\}$.
Rezolventa je $\mathcal{K}_7: \ \neg F(\boldsymbol{b})$.
Keďže ďalšie rezolventy sa sa odvodiť nedajú a neodvodili sme prázdnu formulu, systém $\mathcal{T} \cup \neg\alpha$ nie je sporný a teda formula α nie je sémantickým dôsledkom systému $\mathcal{T}$. To znamená, že úvaha je nesprávna. □

Príklad 3.4.23 Tiedna učiteľka chce vedieť viac o vzťahoch medzi žiakmi jej triedy a preto dá žiakom anketu. Na vybraných lístkoch si prečíta:

- Každý, kto sa kamaráti s Petrom, sa kamaráti aj s Romanom.
- Peter má aspoň jedného kamaráta.

- Nikto, kto sa kamaráti so Slavom, sa nekamaráti s Romanom.
- Niekto sa kamaráti s Romanom, ale nekamaráti sa so Slavom.

Je možné, aby boli všetky štyri výpovede žiakov pravdivé?

Riešenie. Na formalizáciu výpovedí žiakov zavedieme predikátové symboly $P(x)-x$ sa kamaráti s Petrom, $R(x)-x$ sa kamaráti s Radom, $S(x)-x$ sa kamaráti so Slavom. Výpovediam zodpovedá systém formúl

$$\mathcal{T} = \{(\forall x)(P(x) \Rightarrow R(x)),\ (\exists x)P(x),\ (\forall x)(S(x) \Rightarrow \neg R(x)),\ (\exists x)(\neg S(x) \wedge R(x))\}.$$

Našou úlohou je zistiť, či je systém $\mathcal{T}$ splniteľný.

Formuly prepíšeme do klauzulárneho tvaru, odlíšime premenné a v druhej a štvrtej formule vykonáme skolemizáciu. Dostávame klauzuly:
$\mathcal{K}_1 :\ (\forall x)(\neg P(x) \vee R(x))$
$\mathcal{K}_2 :\ P(\boldsymbol{a})$
$\mathcal{K}_3 :\ (\forall y)(\neg S(y) \vee \neg R(y))$
$\mathcal{K}_4 :\ \neg S(\boldsymbol{b})$
$\mathcal{K}_5 :\ R(\boldsymbol{b})$

Odvodzovanie klauzúl už nebudeme zapisovať tak podrobne, ako v predchádzajúcich príkladoch. Dostávame:

- Rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ je klauzula $\mathcal{K}_6 :\ R(\boldsymbol{a})$.
- Rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_3$ je klauzula $\mathcal{K}_7 :\ (\forall x)(\neg P(x) \vee \neg S(x))$.
- Rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_5$ je klauzula $\mathcal{K}_4 :\ \neg S(\boldsymbol{b})$.
- Rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_6$ je klauzula $\mathcal{K}_8 :\ \neg S(\boldsymbol{a})$.
- Rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_7$ je klauzula $\mathcal{K}_8 :\ \neg S(\boldsymbol{a})$.

Ďalšie rezolventy sa odvodiť nedajú. Systém $\mathcal{T}$ splniteľný, teda výpovede žiakov si neodporujú. Je možné, že všetci hovoria pravdu. □

Príklad 3.4.24 Žiaci jednej triedy hovoria o zamestnaní svojich rodičov. Ich výpovede sú:

- Niekto má matku maliarku.
- Nikto, kto má matku maliarku, nemá otca hudobníka.
- Každý má otca hudobníka alebo maliara.
- Nikto nemá otca maliara.

Je možné, aby boli všetky štyri výpovede žiakov pravdivé?

Riešenie. Na formalizáciu výpovedí žiakov zavedieme predikáty $M(x)$ – x je maliar a $H(x)$ – x je hudobník a funkčné symboly $m(x)$ – priradí človeku x matku a $o(x)$ – priradí človeku x otca. Výpovediam zodpovedá systém formúl

$$\mathcal{T} = \{(\exists x)M(m(x)),\ (\forall x)(M(m(x)) \Rightarrow \neg H(o(x))),$$
$$(\forall x)(H(o(x)) \vee M(o(x))),\ (\forall x)\neg M(o(x))\}.$$

Našou úlohou je zistiť, či je systém $\mathcal{T}$ splniteľný.

Formuly prepíšeme do klauzulárneho tvaru, odlíšime premenné a v prvej formule vykonáme skolemizáciu. Dostávame klauzuly:
$\mathcal{K}_1:\ M(m(\boldsymbol{a})))$
$\mathcal{K}_2:\ (\forall x)(\neg M(m(x)) \vee \neg H(o(x)))$
$\mathcal{K}_3:\ (\forall y)(H(o(y)) \vee M(o(y)))$
$\mathcal{K}_4:\ (\forall z)\neg M(o(z))$

Odvodzovanie klauzúl:

- Rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ je klauzula $\mathcal{K}_5:\ \neg H(o(\boldsymbol{a}))$.
- Rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_5$ je klauzula $\mathcal{K}_6:\ M(o(\boldsymbol{a}))$.
- Rezolventa klauzúl $\mathcal{K}_4$, $\mathcal{K}_6$ je prázdna klauzula $\boldsymbol{F}$.

Keďže sme odvodili prázdnu formulu, systém $\mathcal{T}$ nie je splniteľný, teda výpovede žiakov si odporujú. Aspoň jeden žiak nehovorí pravdu. □

Úlohy

3.39 Nájdite takú sémanticky ekvivalentnú formulu v prenexnom tvare, aby jej jadro neobsahovalo implikáciu a ekvivalenciu:

a) $(\forall x)M(x) \Rightarrow M(f(x))$,

b) $(\forall x)[P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(y, f(\boldsymbol{b}, y))]$,

c) $\neg(x \rhd y) \Rightarrow (\exists z)(W(z) \wedge (\forall y)(z \rhd y))$,

d) $(\exists z)(z \rhd x) \vee (\forall y)(\exists x)(z \rhd y \wedge W(x))$.

3.40 Nájdite skolemovský variant k uzáveru formuly:

a) $\neg(P(y, y) \Rightarrow (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)\neg(R(x) \Rightarrow (\forall z)Q(z))$,

b) $(\forall x)(P(x, y) \Rightarrow (Q(x) \vee R(z))) \Rightarrow (\exists z)(Q(z) \wedge (\exists y)P(x, y))$.

3.41 Nájdite otvorený skolemovský variant uzáveru formuly v klauzulárnom tvare:

a) $(\exists x)(Q(x, y) \Rightarrow M(y))$,

b) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)[(P(s(x)) \wedge \neg Q(y, z)) \Rightarrow (x = s(z))]$,

c) $(\exists z)(\forall t)[(x \rhd y) \vee (W(z) \wedge (z \rhd t))]$,

d) $(\exists u)(\forall y)(\exists t)[(u \triangleright x) \vee ((z \triangleright y) \wedge W(t))]$,

e) $\neg(\forall x)[(\exists y)Q(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists z)\neg P(x, y, z)]$,

f) $(\exists x)S(x) \Rightarrow [(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)T(x, y)]$.

3.42 Nájdite klauzulárny tvar k uzáveru formuly:

a) $\neg(x \triangleright y) \Rightarrow (\exists z)[W(z) \wedge (\forall y)(z \triangleright y)]$,

b) $(\exists x)S(x) \Rightarrow [(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)T(x, y)]$,

c) $\neg[(\forall x)(S(x) \vee \neg T(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(x, y)]$,

d) $(\exists x)Q(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\neg R(y) \wedge T(\boldsymbol{a}))$,

e) $(\forall y)(\neg S(x, y) \vee T(x, y)) \Rightarrow (\forall y)(\exists z)U(x, y, z)$,

f) $\neg(\exists x)((\forall y)(\neg P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge (\exists y)(\forall z)\neg R(x, y, z))$,

g) $(\forall x)(\exists y)\neg(x \triangleright y) \Rightarrow (\exists z)(W(z) \wedge (\forall y)(z \triangleright y))$,

h) $(\exists x)(\forall y)\neg(x \triangleright y) \Rightarrow (\forall y)[W(y) \wedge (\exists z)(y \triangleright z))]$,

i) $(\forall x)\,[(\exists y)\neg P(x, y) \vee (\exists y)(\forall z)Q(x, y, z)] \Rightarrow (\forall x)R(x)$,

j) $[(\forall x)\neg P(x)] \Leftrightarrow [(\exists x)(\forall y)R(x, y)]$,

k) $(\exists y)\,[(\exists x)P(x, y) \Rightarrow (\exists z)R(y, z)] \Rightarrow (\exists x)(\forall y)S(x, y)$,

l) $(\forall x)(\exists y)\neg P(x, y) \Rightarrow [(\forall x)(\exists y)(\forall z)S(x, y, z) \wedge (\forall x)Q(x)]$.

3.43 Nájdite optimálny unifikátor a faktor disjunkcie základných formúl:

a) $P(y, y, x) \vee P(f(t), f(\boldsymbol{a}), v)$,

b) $P(x, y, z) \vee P(y, f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}) \vee P(t, t, v)$,

c) $P(t, f(u), f(u)) \vee P(z, f(\boldsymbol{b}), z) \vee P(x, x, x)$,

d) $P(x, f(x), \boldsymbol{a}) \vee P(t, f(\boldsymbol{b}), z) \vee P(z, f(z), \boldsymbol{a})$,

e) $Q(x, x, y) \vee Q(f(z), f(\boldsymbol{a}), z)$,

f) $Q(x, g(z), t) \vee Q(x, g(\boldsymbol{a}), t) \vee Q(y, y, u)$,

3.44 Využite unifikácie z predchádzajúceho príkladu na odvodenie rezolvent klauzúl (ak existujú):

a) $\mathcal{K}_1 :\ (\forall x, y, z)(P(y, y, x) \vee Q(f(x), z))$
$\mathcal{K}_2 :\ (\forall t, u, v)(\neg P(f(t), f(\boldsymbol{a}), v) \vee Q(u, f(\boldsymbol{a})))$,

b) $\mathcal{K}_1 :\ (\forall x, y, z)(P(x, y, z) \vee P(y, f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}) \vee Q(y, g(y)))$
$\mathcal{K}_2 :\ (\forall t, u, v)(\neg P(t, t, v) \vee Q(\boldsymbol{a}, u) \vee \neg Q(t, v))$,

c) $\mathcal{K}_1 :\ (\forall x, y, z)(P(z, f(\boldsymbol{b}), z) \vee P(x, x, x) \vee Q(f(x), y) \vee \neg Q(g(\boldsymbol{a}), f(z)))$
$\mathcal{K}_2 :\ (\forall t, u)\neg P(t, f(u), f(u))$,

d) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, y)(P(x, f(x), \boldsymbol{a}) \vee Q(x, y))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall z, t)(\neg P(t, f(\boldsymbol{b}), z) \vee \neg P(z, f(z), \boldsymbol{a}) \vee \neg Q(\boldsymbol{b}, g(z)))$.

e) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, y)(P(y, f(x), \boldsymbol{a}) \vee Q(x, x, y))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall z, t)(P(t, f(\boldsymbol{b}), z) \vee \neg Q(f(z), f(\boldsymbol{a}), z))$,

f) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, t)(P(x, f(y), \boldsymbol{a}) \vee Q(x, g(z), t) \vee Q(x, g(\boldsymbol{a}), t))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall y, u)(P(y, f(\boldsymbol{b}), u) \vee \neg Q(y, y, u))$.

3.45 Odvoďte všetky rezolventy klauzúl:

a) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, y)(\neg P(f(x), y) \vee Q(\boldsymbol{a}, y, x))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall z)(\neg Q(z, f(z), z) \vee P(f(\boldsymbol{a}), z))$,

b) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, y)(P(x, \boldsymbol{a}) \vee Q(x, y, \boldsymbol{a}))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall z)(\neg Q(z, \boldsymbol{a}, f(z)) \vee P(z, z))$,

c) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, y, z)(P(x, f(y)) \vee Q(z, \boldsymbol{a}))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall t, u)(\neg P(t, f(u)) \vee Q(f(u), t))$,

d) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, y, z)(P(x, f(y)) \vee Q(z, \boldsymbol{a}))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall t, u)(\neg P(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})) \vee Q(f(u), t))$,

e) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, y, z)(P(x, y) \vee \neg Q(z, \boldsymbol{a}))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall t, u)(\neg P(u, f(t)) \vee Q(f(u), t))$,

f) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x)(P(x, x) \vee \neg Q(x, f(x)))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall y, z)(Q(z, y) \vee \neg P(y, \boldsymbol{a}))$,

g) $\mathcal{K}_1: \ (\forall x, y)(P(x, y) \vee Q(x, f(x)))$
$\mathcal{K}_2: \ (\forall z, t)(\neg Q(t, t) \vee P(z, \boldsymbol{a}))$.

3.46 Rezolučnou metódou rozhodnite, či teória $\mathcal{T}$ je splniteľná, ak:

a) $\mathcal{T} = \{(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)), \ (\forall x)(Q(x) \Rightarrow R(x)), (\exists x)(P(x) \wedge R(x))\}$,

b) $\mathcal{T} = \{(\forall x)(\neg U(x) \vee \neg T(x)), \ (\exists x)U(x), \ (\forall y)T(y)\}$,

c) $\mathcal{T} = \{(\forall x)(\forall y)(\neg P(x, y) \vee Q(y)), \ (\forall x)\neg Q(x), \ (\exists x)P(x, x)\}$,

d) $\mathcal{T} = \{(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)), \ (\exists x)R(x), (\forall x)\neg Q(x)\}$,

e) $\mathcal{T} = \{P(\boldsymbol{a}) \Rightarrow (\forall x)Q(\boldsymbol{a}, x), \ (\forall x)P(x), (\forall x)\neg Q(x, x)\}$,

f) $\mathcal{T} = \{(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x, y), \ \neg P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\}$,

g) $\mathcal{T} = \{\neg Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \Rightarrow (\forall x)P(x), \ (\exists x)(Q(\boldsymbol{a}, x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}))\}$.

3.47 Rezolučnou metódou rozhodnite, či platí $\mathcal{T} \models \varphi$, ak:

a) $\mathcal{T} = \{(\forall x)(P(x) \vee Q(x)), (\exists x)\neg P(x)\}, \quad \varphi : (\exists x)Q(x)$,

b) $\mathcal{T} = \{(\exists x)(\forall y)P(x, y), \ (\forall x)(\forall y)(\neg P(x, y) \vee Q(x, y))\}$,
$\varphi : (\exists x)(\forall y)Q(x, y)$,

c) $\mathcal{T} = \{(\exists x)P(x) \Rightarrow Q(\boldsymbol{a})\}, \quad \varphi : (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(\boldsymbol{a}))$,

d) $\mathcal{T} = \{(\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x)),\ (\exists x)R(x)\}, \quad \varphi:\ (\forall x)Q(x)$,

e) $\mathcal{T} = \{(\forall x, y)((P(x) \land Q(x,y)) \Rightarrow R(y)),\ (\forall x)Q(f(x), g(x)), P(f(\boldsymbol{a}))\}$,
$\varphi:\ R(g(\boldsymbol{a}))$,

f) $\mathcal{T} = \{(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y)),\ (\forall x, y)(Q(x,y) \Rightarrow P(f(y)))\}$,
$\varphi: (\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)P(f(y)))$.

3.48 Nasledujúce úsudky sformalizujte a rezolučnou metódou rozhodnite, či sú správne.

a) Žiaden zamilovaný človek nie je smutný.
Každý smutný človek je nešťastný.
___
Každý zamilovaný človek je šťastný.

b) Každé dozreté jablko je zdravé.
Nie každé červené jablko je zdravé.
___
Nie každé červené jablko je dozreté.

c) Niektoré dievčatá sú pekné.
Žiadne pekné dievča nie je múdre.
___
Žiadne dievča nie je múdre.

d) Žiaden huslista nemá zlý hudobný sluch.
Niektorí prítomní nie sú huslisti.
___
Niektorí prítomní majú zlý hudobný sluch.

e) Niektorí maliari majú otca maliara.
Janko je maliar.
___
Jankov otec je maliar.

f) Každý futbalista má otca futbalistu.
Každý, kto má otca futbalistu, má matku speváčku.
Braňo je futbalista.
___
Braňova matka je speváčka.

g) Každý matematik má otca matematika.
Adam je matematik alebo fyzik.
Nikto nie je fyzik.
___
Adamov otec je matematik.

3.49 Triedna učiteľka chce vedieť viac o vzťahoch medzi dievčatami v triede a preto dá žiakom anketu. Na vybraných lístkoch si prečíta:

- Každý, kto sa kamaráti so Soňou, sa kamaráti aj s Katkou.
- Niekto sa kamaráti s Katku, ale nekamaráti sa so Zitou.
- Nikto, kto sa kamaráti so Zitou, sa nekamaráti súčasne s Katkou a Soňou.
- Každý sa kamaráti buď so Zitou alebo sa kamaráti s Katkou aj Soňou.

Je možné, aby boli všetky štyri výpovede žiakov pravdivé?

3.50 Zástupcovia potravinárskych firiem sa rozprávajú s lekármi o zdravej výžive. Ich názory sú:

- Všetky sladké potraviny obsahujúce cholesterol sú nezdravé.
- Niektoré sladké potraviny sú zdravé.
- Neexistujú zdravé potraviny ktoré neobsahujú cholesterol.

Je možné, aby mali všetci pravdu?

Výsledky

3.39 a) $(\exists y)(\neg M(y) \vee M(f(x)))$,

b) $(\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(y, f(\boldsymbol{b}, y)))$,

c) $(\exists z)(\forall t)[(x \triangleright y) \vee (W(z) \wedge (z \triangleright t))]$,

d) $(\exists u)(\forall y)(\exists t)[(u \triangleright x) \vee ((z \triangleright y) \wedge W(t))]$.

3.40 a) $(\forall x, y)[\neg P(y, y) \vee Q(x) \vee (R(g(y)) \wedge \neg Q(f(y)))]$,

b) $(\forall x, y, z)[(P(h(x, y, z), y) \wedge \neg Q(h(x, y, z)) \wedge \neg R(z)) \vee$
$\vee (Q(f(x, y, z)) \wedge P(x, g(x, y, z)))]$.

3.41 Zväčša je viac možností. Vyberieme tú, kde skolemovské funkčné symboly sú najnižšej arity:

a) $\neg Q(f(y), y) \vee M(y)$,

b) $\neg P(s(\boldsymbol{a})) \vee Q(y, f(y)) \vee (\boldsymbol{a} = s(f(y)))$,

c) $((x \triangleright y) \vee W(f(x, y))) \wedge ((x \triangleright y) \vee (f(x, y) \triangleright t))$,

d) $((f(x, z) \triangleright x) \vee (z \triangleright y)) \wedge ((f(x, z) \triangleright x) \vee W(g(x, y, z)))$,

e) $Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \wedge P(\boldsymbol{a}, \mathbf{c}, z)$,

f) $(\neg S(x) \vee T(t, f(t)) \vee \neg P(\boldsymbol{a})) \wedge (\neg S(x) \vee T(t, f(t)) \vee \neg Q(\boldsymbol{a}))$.

3.42 a) $(\forall x,y)[(x \triangleright y) \vee W(f(x,y))] \wedge (\forall x,y,t)[(x \triangleright y) \vee (f(x,y) \triangleright t)]$,

b) $(\forall x,t)(\neg S(x) \vee T(t,f(t)) \vee \neg P(\boldsymbol{a})) \wedge (\forall x,t)(\neg S(x) \vee T(t,f(t)) \vee \neg Q(\boldsymbol{a}))$,

c) $(\forall x)(S(x) \vee \neg T(x)) \wedge (\forall y)R(\boldsymbol{a},y)$,

d) $(\forall x,y,t)(\neg Q(x,y) \vee \neg R(x)) \wedge (\forall x,y)(\neg Q(x,y) \vee T(\boldsymbol{a}))$,

e) $(\forall x,t)(S(x,f(x)) \vee U(x,t,g(x,t))) \wedge (\forall x,t)(\neg T(x,f(x)) \vee U(x,t,g(x,t)))$,

f) $(\forall x,t)(P(x,g(x)) \vee \neg R(x,t,f(x,t))) \wedge (\forall x,t)(\neg Q(x,g(x)) \vee \neg R(x,t,f(x,t)))$,

g) $(\forall y)((\boldsymbol{a} \triangleright y) \vee W(\boldsymbol{b})) \wedge (\forall y,t)((\boldsymbol{a} \triangleright y) \vee (\boldsymbol{b} \triangleright t))$,

h) $(\forall x,y)((x \triangleright f(x)) \vee W(y)) \wedge (\forall x,t)((x \triangleright f(x)) \vee (y \triangleright g(x,y)))$,

i) $(\forall y,t)(P(\boldsymbol{a},y) \vee R(t)) \wedge (\forall y,t)(\neg Q(\boldsymbol{a},y,f(y)) \vee R(t))$,

j) $(\forall y)(P(\boldsymbol{a}) \vee R(\boldsymbol{a},y)) \wedge (\forall y,z,t)(\neg P(z) \vee R(t,f(y,t)))$,

k) $(\forall y,z,t)(P(f(y)) \vee S(f(y),t)) \wedge (\forall y,z,t)(\neg R(y,z) \vee S(f(y),t))$,

l) $(\forall y,z,t)(P(\boldsymbol{a},y) \vee S(t,f(t),z)) \wedge (\forall y,t)(P(\boldsymbol{a},y) \vee Q(t))$.

3.43 a) $\beta = \{t/\boldsymbol{a}, y/f(\boldsymbol{a}), v/x\}$, faktor disjunkcie $P(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{a}), x)$,

b) $\beta = \{x/f(\boldsymbol{a}), y/f(\boldsymbol{a}), t/f(\boldsymbol{a}), z/\boldsymbol{a}, v/\boldsymbol{a}\}$, faktor disjunkcie $P(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a})$,

c) $\beta = \{x/f(\boldsymbol{b}), u/\boldsymbol{b}, z/f(\boldsymbol{b}), t/f(\boldsymbol{b})\}$, faktor disjunkcie $P(f(\boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{b}))$,

d) nedá sa unifikovať,

e) $\beta = \{x/f(\boldsymbol{a}), y/\boldsymbol{a}, z/\boldsymbol{a})\}$, faktor disjunkcie $Q(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a})$,

f) $\beta = \{x/g(\boldsymbol{a}), y/g(\boldsymbol{a}), z/\boldsymbol{a}), u/t\}$, faktor disjunkcie $Q(g(\boldsymbol{a}), g(\boldsymbol{a}), t)$.

3.44 a) $\mathcal{K}:\ (\forall x,u,z)(Q(f(x),z) \vee Q(u,f(\boldsymbol{a})))$,

b) $\mathcal{K}:\ (\forall u)(Q(f(\boldsymbol{a}), g(f(\boldsymbol{a}))) \vee Q(\boldsymbol{a},u) \vee \neg Q(f(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a}))$,

c) $\mathcal{K}:\ (\forall y)(Q(f(f(\boldsymbol{b})),y) \vee \neg Q(g(\boldsymbol{a}), f(f(\boldsymbol{b}))))$,

d) nedá sa odvodiť rezolventa,

e) $\mathcal{K}: P(\boldsymbol{a}, f(f(\boldsymbol{a})), \boldsymbol{a}) \vee P(t, f(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{a})$,

f) $\mathcal{K}:\ (\forall t)(P(g(\boldsymbol{a}), f(g(\boldsymbol{a})), \boldsymbol{a}) \vee P(g(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}), t))$.

3.45 a) $\mathcal{K}:\ (\forall y)(Q(\boldsymbol{a},y,\boldsymbol{a}) \vee \neg Q(y,f(y),y))$,
$\mathcal{K}':\ \neg P(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{a})) \vee P(f(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a})$,

b) nedá sa odvodiť rezolventa,

c) $\mathcal{K}: (\forall x,y,z)(\ Q(z,\boldsymbol{a}) \vee Q(f(y),x))$,

d) $\mathcal{K}:\ (\forall z,u,t)(Q(z,\boldsymbol{a}) \vee Q(f(u),t))$,

e) $\mathcal{K}:\ (\forall x,y,u)(P(x,y) \vee \neg P(u,f(\boldsymbol{a})))$,

$\mathcal{K}':\ (\forall x,z,t)(\neg Q(z,\boldsymbol{a}) \vee Q(f(x),t))$

f) $\mathcal{K}:\ (\forall z)(\neg Q(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})) \vee Q(z,\boldsymbol{a}))$,

$\mathcal{K}':\ (\forall x)(P(x,x) \vee \neg P(f(x),\boldsymbol{a}))$,

g) nedá sa odvodiť rezolventa.

3.46 a) Po úprave na klauzulárny tvar a skolemizácii dostávame systém klauzúl $\mathcal{K} = \{(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x)),\ (\forall y)(\neg Q(y) \vee R(y)),\ P(\boldsymbol{a}),\ R(\boldsymbol{a})\}$, ktorý je splniteľný, teda teória $\mathcal{T}$ je splniteľná .

b) Po úprave na klauzulárny tvar a skolemizácii dostávame systém klauzúl $\mathcal{K} = \{(\forall x)(\neg U(x) \vee \neg T(x)),\ (\forall y)T(y),\ U(\boldsymbol{a})\}$, ktorý nie je splniteľný, teda teória $\mathcal{T}$ nie je splniteľná .

c) Po úprave na klauzulárny tvar a skolemizácii dostávame systém klauzúl $\mathcal{K} = \{(\forall x, y)(\neg P(x, y) \vee Q(y)),\ (\forall z)\neg Q(z),\ P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\}$, ktorý nie je splniteľný, teda teória $\mathcal{T}$ nie je splniteľná .

d) Po úprave na klauzulárny tvar a skolemizácii dostávame systém klauzúl $\mathcal{K} = \{(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x)),\ (\forall y)\neg Q(y),\ R(\boldsymbol{a})\}$, ktorý je splniteľný, teda teória $\mathcal{T}$ je splniteľná .

e) Po úprave na klauzulárny tvar a skolemizácii dostávame systém klauzúl $\mathcal{K} = \{(\forall x)(\neg P(\boldsymbol{a}) \vee Q(\boldsymbol{a}, x)),\ (\forall y)\neg Q(y, y),\ (\forall z)P(z)\}$, ktorý nie je splniteľný, teda teória $\mathcal{T}$ nie je splniteľná .

f) Po úprave na klauzulárny tvar a skolemizácii dostávame systém klauzúl $\mathcal{K} = \{(\forall y, t)(\neg P(\boldsymbol{a}, y) \vee P(t, \boldsymbol{b})),\ \neg P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\}$, ktorý je splniteľný, teda teória $\mathcal{T}$ je splniteľná .

g) Po úprave na klauzulárny tvar a skolemizácii dostávame systém klauzúl $\mathcal{K} = \{(\forall x)(P(x) \vee Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})), Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),\ \neg P(\boldsymbol{b}),\ \neg Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\}$, ktorý nie je splniteľný, teda teória $\mathcal{T}$ nie je splniteľná .

3.47 a) Systém formúl $\{(\forall x)(P(x) \vee Q(x)),\ (\exists x)\neg P(x),\ (\forall x)\neg Q(x)\}$ nie je splniteľný, teda platí $\mathcal{T} \models \varphi$,

b) Systém formúl $\{(\exists x)(\forall y)P(x, y),\ (\forall x)(\forall y)(\neg P(x, y) \vee Q(x, y)),$ $(\forall x)(\exists y)\neg Q(x, y)\}$ nie je splniteľný, teda platí $\mathcal{T} \models \varphi$,

c) Systém formúl $\{(\exists x)P(x) \Rightarrow Q(\boldsymbol{a}),\ (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(\boldsymbol{a}))\}$ nie je splniteľný, teda platí $\mathcal{T} \models \varphi$,

d) Systém formúl $\{(\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x)),\ (\exists x)R(x),\ (\forall x)Q(x)\}$ je splniteľný, neplatí $\mathcal{T} \models \varphi$,

e) Systém formúl $\{(\forall x, y)((P(x) \wedge Q(x, y)) \Rightarrow R(y)),\ (\forall x)Q(f(x), g(x)),$ $P(f(\boldsymbol{a})),\ \neg R(g(\boldsymbol{a}))\}$ nie je splniteľný, teda platí $\mathcal{T} \models \varphi$,

f) Systém formúl $\{(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x, y)),\ (\forall x, y)(Q(x, y) \Rightarrow$ $\Rightarrow P(f(y))), (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)\neg P(f(y)))\}$ nie je splniteľný, teda platí $\mathcal{T} \models \varphi$.

3.48 a) Univerzom je množina ľudí. Zavedieme predikáty $Z(x) - x$ je zamilovaný, $N(x) - x$ je nešťastný a $S(x) - x$ je smutný. Úsudok zapíšeme formálne v tvare:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(Z(x) \Rightarrow \neg S(x)) \\ (\forall x)(S(x) \Rightarrow N(x)) \\ \hline (\forall x)(Z(x) \Rightarrow \neg N(x)) \end{array}$$

Úsudok nie je správny.

b) Univerzom je množina jabĺk. Zavedieme predikáty $D(x) - x$ je dozreté, $Z(x) - x$ je zdravé a $C(x) - x$ je červené. Úsudok zapíšeme formálne:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(D(x) \Rightarrow Z(x)) \\ (\exists x)(C(x) \wedge \neg Z(x)) \\ \hline (\exists x)(C(x) \wedge \neg D(x)) \end{array}$$

Úsudok je správny.

c) Univerzom je množina dievčat. Zavedieme predikáty $M(x) - x$ je múdre dievča a $P(x) - x$ je pekné dievča. Úsudok zapíšeme formálne:

$$\begin{array}{l} (\exists x)(P(x)) \\ (\forall x)(P(x) \Rightarrow \neg M(x)) \\ \hline (\forall x)\neg M(x) \end{array}$$

Úsudok nie je správny.

d) Univerzom je množina ľudí. Zavedieme predikáty $H(x) - x$ je huslista, $P(x) - x$ je prítomný, $Z(x) - x$ má zlý hudobný sluch. Úsudok môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(H(x) \Rightarrow \neg Z(x)) \\ (\exists x)(P(x) \wedge \neg H(x)) \\ \hline (\exists x)(P(x) \wedge Z(x)) \end{array}$$

Úsudok nie je správny.

e) Univerzom je množina ľudí. Zavedieme predikát $M(x) - x$ je maliar, funkčný symbol $o(x) -$ priradí človeku x jeho otca a konštantný symbol $\boldsymbol{j}$ pre Janka. Úsudok môžeme zapísať v tvare

$$\begin{array}{l} (\exists x)(M(x) \wedge M(o(x))) \\ M(\boldsymbol{j}) \\ \hline M(o(\boldsymbol{j})) \end{array}$$

Úsudok nie je správny.

f) Univerzom je množina ľudí. Zavedieme predikáty $F(x) - x$ je futbalista, $S(x) - x$ je spevák, funkčné symboly $o(x) -$ priradí človeku x jeho otca, $m(x) -$ priradí človeku x jeho matku a konštantný symbol $\boldsymbol{b}$ pre Braňa. Úsudok môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(F(x) \Rightarrow F(o(x))) \\ (\forall x)(F(o(x)) \Rightarrow S(m(x))) \\ (\forall x)\neg F(x) \\ \hline M(o(\boldsymbol{a})) \end{array}$$

Úsudok je správny.

g) Univerzom je množina ľudí. Zavedieme predikáty $M(x) - x$ je matematik, $F(x) - x$ je fyzik, funkčný symbol $o(x) -$ priradí človeku x jeho otca a konštantný symbol $\boldsymbol{a}$ pre Adama. Úsudok môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(M(x) \Rightarrow M(o(x))) \\ M(\boldsymbol{a}) \vee F(\boldsymbol{a}) \\ (\forall x)\neg F(x) \\ \hline M(o(\boldsymbol{a})) \end{array}$$

Úsudok je správny.

3.49 Univerzom je množina žiakov.Zavedieme predikáty $Z(x) - x$ sa kamaráti so Zitou, $S(x) - x$ sa kamaráti so Soňou, $K(x) - x$ sa kamaráti s Katkou. Výpovediam zodpovedá systém formúl

$$\mathcal{T} = \{(\forall x)(S(x) \Rightarrow K(x)),\ (\exists x)(K(x) \wedge \neg Z(x)),$$

$$(\forall x)(Z(x) \Rightarrow \neg(K(x) \wedge S(x))),\ (\forall x)(Z(x) \vee (K(x) \wedge S(x)))\}$$

Systém $\mathcal{T}$ je splniteľný, všetky výpovede môžu byť pravdivé.

3.50 Univerzom sú potraviny. Zavedieme predikáty $S(x) - x$ je sladká potravina, $C(x) - x$ obsahuje cholesterol a $Z(x) - x$ je zdravá potravina. Výpovediam zodpovedá systém formúl

$$\mathcal{T} = \{(\forall x)((S(x) \wedge C(x)) \Rightarrow \neg Z(x)),\ (\exists x)(S(x) \wedge Z(x)),$$

$$\neg(\exists x)(Z(x) \wedge \neg C(x))\}$$

Systém $\mathcal{T}$ nie je splniteľný, výpovede si odporujú.

Literatúra

[1] Bučko M., Klešč M., *Diskrétna matematika*, Edičné stredisko TU, Košice 1991

[2] Bukovský L., *Úvod do matematickej logiky*, ÚMV PF UPJŠ, Košice 2006.

[3] Chytil M., Kolář J., Štěpánková O., *Logika, algebry a grafy*, SNTL, Praha 1989.

[4] Kvasnička V., Pospíchal J., *Matematická logika*, STU, Bratislava 2006.

[5] Knor M., *Matematická logika a diskrétne štruktúry*, STU, Bratislava 2008.

[6] Sochor A., *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001.

[7] Švejdar V., *Logika*, Academia, Praha 2002.

Emília Draženská – Helena Myšková

Matematická logika

Technická univerzita v Košiciach, Letná 9, 04200 Košice
Počet strán: 148

ISBN 978-80-553-1821-9