

# Základy lineárnej algebry

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

# Obsah

- 1 Nehomogénne sústavy lineárnych rovníc
  - Riešenie sústavy lineárnych rovníc
  - Gaussova eliminačná metóda
  - Cramerovo pravidlo
  - Riešenie sústavy ako maticovej rovnice
- 2 Ekonomické aplikácie sústav
  - Ekonomické aplikácie sústav
- 3 Homogénne sústavy
  - Homogénne sústavy lineárnych rovníc
- 4 Sústavy s parametrom
  - Sústava lineárnych rovníc s parametrom











# Ekvivalentné úpravy rovníc

## Veta

Nech sústava  $S_2$  vznikla zo sústavy  $S_1$  niektorou z nasledujúcich úprav:

- 1 zmena poradia rovníc,
- 2 vynásobenie rovnice nenulovou konštantou,
- 3 pripočítanie lineárnej kombinácie iných rovníc k niektorej rovnici.

Potom sústavy  $S_1$  a  $S_2$  majú rovnakú množinu riešení.

Ekvivalentné úpravy rovníc uvedené v predošlej vete sú totožné s ekvivalentnými riadkovými úpravami matíc. Z toho plynie, že stačí upravovať namiesto sústavy rovníc rozšírenú maticu sústavy.



# Gaussova eliminačná metóda - algoritmus

## Algoritmus

1. *Nahradíme sústavu lineárnych algebraických rovníc rozšírenou maticou sústavy.*
2. *Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme maticu na stupňovitý tvar.*
3. *Ak existuje riešenie sústavy, vyjadríme ho v tvare vektora.*

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 1.

Príklad:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$$

$$8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12$$

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6$$

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} | \bar{\mathbf{b}}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 1.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} -R_4 \\ \\ \\ \end{array} \approx \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} +4R_1 \\ +8R_1 \\ +3R_1 \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -3R_2 \\ \\ \end{array} \approx \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +4R_3 \\ \end{array} \approx \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 1.

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2$$

$$-x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

$$-2x_4 = 2$$

$$\Rightarrow x_4 = -1$$

Z tretej rovnice dostávame  $x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$ .

Z druhej rovnice dostávame  $-x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \Rightarrow x_2 = 1$ .

Z prvej rovnice dostávame  $-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \Rightarrow x_1 = 1$ .

Riešením sústavy je vektor  $\bar{x} = (1, 1, -1, -1)^T$ .

## Frobeniova veta

## Veta

Nech  $\mathbf{A}$  je matica sústavy a  $\mathbf{A}^*$  je rozšírená matica sústavy (1). Sústava (1) má riešenie vtedy a len vtedy, ak  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^*)$ . Ďalej platí:

- ① Sústava (1) má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^*) = n$ .
- ② Sústava (1) má nekonečne veľa riešení vtedy a len vtedy, ak  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^*) < n$ .

V prípade ak  $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}^*)$ , sústava (1) nemá riešenie.

V prípade, ak má sústava nekonečne veľa riešení, je počet voľných premenných  $n - h(\mathbf{A})$ .

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 1.

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array} \right) \approx \dots \approx \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

$h(\mathbf{A}) = 4 = h(\mathbf{A}^*) = n \implies$  sústava má práve jedno riešenie

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 2.

Príklad:

$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_4 = 6$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1$$

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} | \bar{\mathbf{b}}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array} \right)$$

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \end{array} \approx \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -2R_1 \\ -5R_1 \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -18 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -2R_2 \end{array} \approx \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$h(\mathbf{A}) = 3 \neq h(\mathbf{A}^*) = 4 \implies$  sústava nemá riešenie



## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 3.

Príklad:

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$$

$$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3$$

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1$$

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} | \bar{b}) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 3.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3R_1 \\ -3R_1 \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +R_2 \\ -R_2 \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \approx
 \end{aligned}$$

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 3.

$$\approx \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^*) = 3 \quad \implies \quad \text{sústava má riešenie}$$

$$n = 5 > h(\mathbf{A}) = 3 \quad \implies \quad \text{sústava má nekonečne veľa riešení}$$

$$n - h(\mathbf{A}) = 5 - 3 = 2 \quad \text{je počet voľných premenných}$$

## Gaussova eliminačná metóda – Príklad 3.

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\
 x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 3 \\
 x_4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 0
 \end{aligned}$$

Nech  $x_5 = t$  a  $x_1 = s$ , z druhej rovnice dostávame

$$x_3 + x_4 + 4x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3 - 4t$$

Z prvej rovnice dostávame

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - t + 2s$$

Riešením sústavy je vektor

$$\bar{x} = (s, 1 - t + 2s, 3 - 4t, 0, t)^T \quad \text{pre } s, t \in \mathbb{R}$$

## Sústavy lineárnych rovníc so štvorcovou maticou sústavy

## Definícia

Pre  $n \in \mathbb{N}$  majme sústavu  $n$  algebraických rovníc o  $n$  neznámych

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \dots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

## Veta

Sústava (2) má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak je matica sústavy regulárna.

## Cramerovo pravidlo

## Veta

Nech  $D \neq 0$  je determinant matice sústavy (2). Nech  $D_i$  je determinant matice, ktorá vznikla z matice sústavy nahradením  $i$ -tého stĺpca vektorom pravej strany. Riešením sústavy (2) je vektor  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , kde

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n.$$

## Cramerovo pravidlo – Príklad 1

Príklad:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$D = 0 \implies$  matica sústavy je singulárna  $\implies$   
nemôžeme použiť Cramerovo pravidlo

## Cramerovo pravidlo – Príklad 2

Príklad:

$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35$$

$D \neq 0 \implies$  matica sústavy je regulárna



## Cramerovo pravidlo – Príklad 2

$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

## Cramerovo pravidlo – Príklad 2

Sústava má práve jedno riešenie  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ , kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-35}{-35} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-70}{-35} = 2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-175}{-35} = 5$$

## Riešenie sústavy ako maticovej rovnice

Príklad:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





## Príklad 1

## Príklad 1:

V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov A, B a C určitého výrobku na jednotlivých výrobných linkách:

| linka | A       | B       | C       |
|-------|---------|---------|---------|
| 1.    | 40 min. | 30 min. | 25 min. |
| 2.    | 25 min. | 20 min. | 20 min. |
| 3.    | 10 min. | 10 min. | 5 min.  |

- a) Vypočítajme, koľko kusov výrobkov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď pre 1. linku máme týždenne k dispozícii 4 500 minút, pre 2. linku 3 050 minút a pre 3. linku 1 200 minút, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.
- b) Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 3. linku?

## Príklad 1 – a)

$$40x + 30y + 25z = 4500$$

$$25x + 20y + 20z = 3050$$

$$10x + 10y + 5z = 1200$$

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} | \bar{\mathbf{b}}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array} \right)$$





## Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) -2R_3 \approx$$

## Príklad 1 – a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) -2R_3 \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -8R_1 \\ -2R_1 \end{array}
 \end{aligned}$$



## Príklad 1 – a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) -2R_3 \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) \begin{array}{l} -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \end{array} \right) -3R_2
 \end{aligned}$$

## Príklad 1 – a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) -2R_3 \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) \begin{array}{l} -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \end{array} \right) -3R_2 \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

## Príklad 1 – a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) -2R_3 \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) \begin{array}{l} -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \end{array} \right) -3R_2 \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}^*) = n \implies$$

## Príklad 1 – a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) -2R_3 \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array} \right) \begin{array}{l} -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \end{array} \right) -3R_2 \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}^*) = n \implies \bar{x} = (50, 50, 40)^T$$

## Príklad 1 – b)

$$40x + 30y + 25z = 4500$$

$$25x + 20y + 20z = 3050$$

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} | \bar{\mathbf{b}}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right)$$



## Príklad 1 – b)

$$A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5}$$

## Príklad 1 – b)

$$A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array} \right)$$

## Príklad 1 – b)

$$A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array} \right) \cdot 8 - 5R_1 \approx$$

## Príklad 1 – b)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array} \right) \cdot 8 - 5R_1 \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 0 & 2 & 7 & 380 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

## Príklad 1 – b)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array} \right) \cdot 8 - 5R_1 \approx$$

$$\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 0 & 2 & 7 & 380 \end{array} \right)$$

$$h(\mathbf{A}) = 2 = h(\mathbf{A}^*) < n = 3 \implies$$

## Príklad 1 – b)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right) \cdot \begin{array}{l} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array} \right) \cdot 8 - 5R_1 \approx$$

$$\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 0 & 2 & 7 & 380 \end{array} \right)$$

$$h(\mathbf{A}) = 2 = h(\mathbf{A}^*) < n = 3 \implies$$

$$\bar{x} = \left( -30 + 2t, 190 - \frac{7}{2}t, t \right)^T \quad \text{pre } t \in \langle 15, 54 \rangle \text{ párne} \implies$$

$$t \in \{16, 18, \dots, 54\}$$

## Príklad 2

## Príklad 2:

V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov hodínok:

| model | pracovná sila | materiál | reklama |
|-------|---------------|----------|---------|
| A     | 10 €          | 15 €     | 5 €     |
| B     | 8 €           | 6 €      | 2 €     |
| C     | 12 €          | 16 €     | 8 €     |

- Vypočítajte, koľko kusov hodínok modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne  $k$  dispozícií 620 €, na materiál 750 € a na reklamu 330 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.
- Ako by sa zmenila výroba, ak peniaze na reklamu využijeme na iný účel?

## Príklad 2 – a)

$$10x + 8y + 12z = 620$$

$$15x + 6y + 16z = 750$$

$$5x + 2y + 8z = 330$$

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} | \bar{\mathbf{b}}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array} \right)$$



## Príklad 2 – a)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array} \right) \approx \dots \approx$$

## Príklad 2 – a)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array} \right) \approx \dots \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 8 & 330 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array} \right)$$



## Príklad 2 – a)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array} \right) \approx \dots \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 8 & 330 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array} \right)$$

$$h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}^*) = n \implies \bar{x} = (10, 20, 30)^T$$

## Príklad 2 – b)

$$10x + 8y + 12z = 620$$

$$15x + 6y + 16z = 750$$

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} | \bar{\mathbf{b}}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array} \right)$$



## Príklad 2 – b)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array} \right) \approx \dots \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 310 \\ 0 & 3 & 1 & 90 \end{array} \right)$$

## Príklad 2 – b)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array} \right) \approx \dots \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 310 \\ 0 & 3 & 1 & 90 \end{array} \right)$$

$$h(\mathbf{A}) = 2 = h(\mathbf{A}^*) < n = 3 \implies$$



## Príklad 2 – b)

$$\mathbf{A}^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array} \right) \approx \dots \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 310 \\ 0 & 3 & 1 & 90 \end{array} \right)$$

$$h(\mathbf{A}) = 2 = h(\mathbf{A}^*) < n = 3 \implies$$

$$\bar{x} = \left( -46 + \frac{14}{5}t, t, 90 - 3t \right)^T \quad \text{pre } t \in \langle 17, 30 \rangle \text{ deliteľné } 5 \\ \implies t \in \{20, 25, 30\}$$

## Riešenie homogénnej sústavy

## Definícia

Pre  $n \in \mathbb{N}$  majme sústavu  $m$  algebrických rovníc o  $n$  neznámých

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\
 \dots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Keďže v tomto prípade  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^*)$ , má sústava (3) vždy aspoň jedno (triviálne) riešenie. Podľa Frobeniovej vety môžu nastať nasledujúce prípady

- 1  $h(\mathbf{A}) = n \implies \bar{x} = (0, 0, \dots, 0)^\top$  je jediné riešenie sústavy (3).
- 2  $h(\mathbf{A}) < n \implies$  má sústava (3) nekonečne veľa riešení.

## Homogénna sústava – príklad 1.

Príklad:

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\
 -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\
 x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\
 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

## Homogénna sústava – príklad 1.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2R_1 \\ +R_1 \\ +2R_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +3R_2 \\ +5R_2 \end{array} \approx \\
 &\approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 17 & -24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ .5 - 17R_3 \end{array} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 101 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$h(\mathbf{A}) = n = 4 \implies$  sústava má jediné riešenie  $\bar{x} = (0, 0, 0, 0)^T$

## Homogénna sústava – príklad 2.

Príklad:

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 8x_5 = 0$$

$$9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

## Homogénna sústava – príklad 2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3R_1 \\ -R_1 \\ -R_1 \end{matrix} \approx \\
 &\approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot \frac{1}{3} \end{matrix} \approx \\
 &\approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -R_2 \\ -R_2 \end{matrix} \approx
 \end{aligned}$$

## Homogénna sústava – príklad 2.

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n = 5 > h(\mathbf{A}) = 2 \implies$  sústava má nekonečne veľa riešení

$n - h(\mathbf{A}) = 5 - 2 = 3$  je počet voľných premenných

## Homogénna sústava – príklad 2.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 8x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Nech  $x_1 = s$ ,  $x_3 = t$  a  $x_5 = u$ , z druhej rovnice dostávame

$$2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 3u - 2t$$

Z prvej rovnice dostávame

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 8x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3s - 4t + 11u$$

Riešením sústavy je vektor

$$\bar{x} = (s, 3s - 4t + 11u, t, 3u - 2t, u)^T \quad \text{pre } s, t, u \in \mathbb{R}$$



## Sústavy s parametrom v štvorcovej matici sústavy – algoritmus

## Algoritmus

1. *Vypočítame determinant matice sústavy.*
2. *Položíme determinant rovný nule a vyriešime vzniknutú algebrickú rovnicu.*
3. *Korene tejto rovnice postupne dosadíme do sústavy, ktorú následne vyriešime pomocou Gaussovej eliminačnej metódy.*
4. *Pre všetky ostatné hodnoty parametra je determinant rôzny od nuly a teda sústava má práve jedno riešenie. Toto riešenie nájdeme pomocou Cramerovho pravidla.*

## Sústava s parametrom – príklad 1.

Príklad:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ax_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

1.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2$$

2.

$$\begin{aligned}-a^3 + 3a - 2 = 0 &\Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = 1 \vee a = -2\end{aligned}$$

## Sústava s parametrom – príklad 1.

3. • Nech  $a = 1$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \iff x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$n = 3 > h(\mathbf{A}) = 1 \implies$  sústava má nekonečne veľa riešení

$n - h(\mathbf{A}) = 3 - 1 = 2$  je počet voľných premenných

Nech  $x_1 = s$  a  $x_2 = t \implies x_3 = 1 - s - t$

Riešením sústavy je vektor

$$\bar{x} = (s, t, 1 - s - t)^T \quad \text{pre } s, t \in \mathbb{R}$$

## Sústava s parametrom – príklad 1.

- Nech  $a = -2$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\-2x_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -R_1 \\ +2R_1 \end{array} \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +R_2 \end{array} \approx \\ &\approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)\end{aligned}$$

$$h(\mathbf{A}) = 2 \neq h(\mathbf{A}^*) = 3 \implies \text{sústava nemá riešenie}$$

## Sústava s parametrom – príklad 1.

4. Nech  $a \neq 1$  a  $a \neq -2$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ax_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

## Sústava s parametrom – príklad 1.

Sústava má práve jedno riešenie  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ , kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

## Sústava s parametrom – príklad 2.

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešime sústavy

- parameter vystupuje len vo vektore pravej strany
- matica sústavy nie je štvorcová

Príklad:

$$12x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 21x_4 = 3 + a$$

$$11x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 24x_4 = 1 + a$$

$$7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = a$$

$$8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9$$

## Sústava s parametrom - príklad 2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^* &= \left( \begin{array}{cccc|c} 12 & -6 & 9 & 21 & 3+a \\ 11 & -5 & 10 & 24 & 1+a \\ 7 & -3 & 7 & 17 & a \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 11 & -5 & 10 & 24 & 1+a \\ 7 & -3 & 7 & 17 & a \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -11R_1 \\ -7R_1 \\ -8R_1 \end{array} \approx \\
 &\approx \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 21 & 57 & a-21 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & a-14 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \Leftrightarrow \\ \\ \Leftrightarrow \end{array} \approx
 \end{aligned}$$



## Sústava s parametrom – príklad 2.

$$\approx \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & a - 14 \\ 0 & 6 & 21 & 57 & a - 21 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2R_2 \\ -3R_2 \end{array} \approx$$

$$\approx \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -R_3 \end{array} \approx$$

$$\approx \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

## Sústava s parametrom – príklad 2.

- Nech  $a \neq 0$

$$h(\mathbf{A}) = 2 \neq h(\mathbf{A}^*) = 3 \implies \text{sústava nemá riešenie}$$

## Sústava s parametrom – príklad 2.

- Nech  $a = 0$

$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^*) = 2 \implies$  sústava má riešenie

$n = 4 > h(\mathbf{A}) = 2 \implies$  sústava má nekonečne veľa riešení

$n - h(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$  je počet voľných premenných

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 19x_4 & = & -7 \end{array}$$

Nech  $x_3 = s$  a  $x_4 = t \implies x_2 = \frac{1}{2}(-7 - 7s - 19t)$

$\implies x_1 = \frac{1}{2}(-3 - 5s - 13t)$

Riešením sústavy je vektor

$$\bar{x} = \left( \frac{1}{2}(-3 - 5s - 13t), \frac{1}{2}(-7 - 7s - 19t), s, t \right)^T \quad \text{pre } s, t \in \mathbb{R}$$

Ďakujem za pozornosť.