LIMITA FUNKCIE

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Nech $a, b \in \mathbb{R}^*$ a nech funkcia f je definovaná na prstencovom okolí bodu a. ($O^o(a)$). Ak pre každé $O_\varepsilon(b)$ existuje také prstencové okolie $O^o_\delta(a)$, že pre každé $x \in O^o_\delta(a)$ platí, že $f(x) \in O_\varepsilon(b)$, potom hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu b. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

skrátený zápis definície:

$$(\forall O_\varepsilon(b))(\exists O^o_\delta(a)); f(O^o_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(b)$$

Veta

Nech $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$ *a* $\lim_{x \to a} f(x) = b_2$*, potom* $b_1 = b_2$*.*

Funkcia má v bode nanajvýš jednu limitu!

Definícia

Limita sprava

Nech f je definovaná na pravom okolí bodu a. Hovoríme, že b je limitou sprava funkcie f v bode a, pričom píšeme $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ práve vtedy, ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ existuje okolie $O_\delta^+(a)$, že pre každé $x \in O_\delta^+(a)$ je $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.

Limita zľava

Nech f je definovaná na ľavom okolí bodu a. Hovoríme, že b je limitou zľava funkcie f v bode a, pričom píšeme $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ práve vtedy, ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ existuje okolie $O_\delta^-(a)$, že pre každé $x \in O_\delta^-(a)$ je $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.

Definícia

Limita sprava

Nech f je definovaná na pravom okolí bodu a. Hovoríme, že b je limitou sprava funkcie f v bode a, pričom píšeme $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ práve vtedy, ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ existuje okolie $O_\delta^+(a)$, že pre každé $x \in O_\delta^+(a)$ je $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.

Limita zľava

Nech f je definovaná na ľavom okolí bodu a. Hovoríme, že b je limitou zľava funkcie f v bode a, pričom píšeme $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ práve vtedy, ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ existuje okolie $O_\delta^-(a)$, že pre každé $x \in O_\delta^-(a)$ je $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.

Veta

Funkcia má v bode a limitu práve vtedy, ak má v bode a limitu sprava aj zľava a platí

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

.

Pozn.: Nech $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Potom

- ak $b \in \mathbb{R}$, hovoríme, že ide o vlastnú limitu
- ak $b \in \{\pm\infty\}$, hovoríme, že ide o nevlastnú limitu

Veta

Funkcia má v bode a limitu práve vtedy, ak má v bode a limitu sprava aj zľava a platí

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

.

Pozn.: Nech $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Potom

- ak $b \in \mathbb{R}$, hovoríme, že ide o vlastnú limitu
- ak $b \in \{\pm\infty\}$, hovoríme, že ide o nevlastnú limitu

Veta

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

1. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$
3. *nech* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x\to a} [k.\, f(x)] = k.\, b$
4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = b\,.\,c$
5. *ak* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$
6. *ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a g je ohraničená funkcia, potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Veta

Nech $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

1. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|$
2. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$
3. *nech* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, *potom* $\lim_{x\to a} [k.\, f(x)] = k.\, b$
4. $\lim_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = b\,.\,c$
5. *ak* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, *potom* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$
6. *ak* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a* g *je ohraničená funkcia, potom* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Veta

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$*. Potom platí*

1. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$
3. *nech* $k \in \mathbb{R}$*,* $k \neq 0$*, potom* $\lim\limits_{x\to a} [k.\, f(x)] = k.\, b$
4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = b\,.\, c$
5. *ak* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$*, potom* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$
6. *ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a g je ohraničená funkcia, potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$

Veta

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$*. Potom platí*

1. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$
3. *nech* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x\to a} [k.\, f(x)] = k.\, b$
4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = b\,.\,c$
5. *ak* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$
6. *ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a g je ohraničená funkcia, potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Veta

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

1. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$
3. *nech* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x\to a} [k.\, f(x)] = k.\, b$
4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = b\, .\, c$
5. *ak* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$
6. *ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a* g *je ohraničená funkcia, potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$

Veta

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

1. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$
3. *nech* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x\to a} [k.\, f(x)] = k.\, b$
4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = b\,.\,c$
5. *ak* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$
6. *ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a* g *je ohraničená funkcia, potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Veta

1. *ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} [-f(x)] = -\infty$
2. *ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$
3. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) < 0$ *a* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
4. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) > 0$ *a* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
5. *ak* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Veta

1. *ak* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$*, tak* $\lim_{x\to a} [-f(x)] = -\infty$
2. *ak* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$*, tak* $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$
3. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) < 0$ *a* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*, tak* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
4. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) > 0$ *a* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*, tak* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
5. *ak* $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$*, tak* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Veta

1. *ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$*, tak* $\lim\limits_{x \to a} [-f(x)] = -\infty$
2. *ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$*, tak* $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$
3. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) < 0$ *a* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$*, tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
4. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) > 0$ *a* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$*, tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
5. *ak* $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$*, tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Veta

1. *ak* $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$*, tak* $\lim_{x \to a} [-f(x)] = -\infty$
2. *ak* $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$*, tak* $\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty$
3. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) < 0$ *a* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$*, tak* $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
4. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) > 0$ *a* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$*, tak* $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
5. *ak* $\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty$*, tak* $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Veta

1. *ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} [-f(x)] = -\infty$
2. *ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$
3. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) < 0$ *a* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
4. *ak* $\forall x \in D(f)$ *je* $f(x) > 0$ *a* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
5. *ak* $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

neurčité výrazy:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ \frac{0}{0},\ 0.\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$$

Veta

Nech existuje $O^o_\delta(a)$ také, že $\forall x \in O^o_\delta(a)$ platí, že $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, tak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

pre $f(x) \to \infty$

Veta

Nech existuje $O^o_\delta(a)$ také, že $\forall x \in O^o_\delta(a)$ platí, že $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ a $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, tak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

pre $f(x) \to \infty$

Veta

Nech existuje $O^o_\delta(a)$ také, že $\forall x \in O^o_\delta(a)$ platí, že $h(x) \le f(x) \le g(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, tak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

pre $f(x) \to \infty$