Sústavy lineárnych algebrických rovníc

streda 9. októbra 2024 7:30

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = -12$$

$$0 \neq -12 \qquad \nexists \text{ riešenie}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 10x_4 = 0$$
$$10x_4 = 0$$
$$x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_5 = 2 \quad / +x_2 - 2$$
$$x_3 + 4x_5 = 3$$

2 VOĽNÉ PREMENNÉ

x_3 A x_5 NEMÔŽU BYŤ OBE VOĽNÉ PREMENNÉ

$$x_3 = 3 - 4x_5$$

$x_5 = t$ VOĽNÁ PREMENNÁ

$$x_3 = 3 - 4t$$

$$x_2 = -2 + 2x_1 + x_3 + 3x_5$$

$x_1 = s$ VOĽNÁ PREMENNÁ

$$x_2 = -2 + 2s + 3 - 4t + 3t$$
$$x_2 = 1 + 2s - t$$

VŠETKY RIEŠENIA:

$$\bar{x} = (s,\ 1+2s-t,\ 3-4t,\ 0,\ t)^T \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

NECH: $s = 1 \quad t = 0$

$$\bar{x} = (1, 3, 3, 0, 0)^T$$

NECH: $s = 0 \quad t = 1$

$$\bar{x} = (0, 0, -1, 0, 1)^T$$

KONKRETNE RIEŠENIA PRI DANEJ VOĽBE VOĽNÝCH PREMENNÝCH

CRAMEROVO PRAVIDLO

PR.
$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35 \neq 0 \Rightarrow A \text{ JE REGULÁRNA}$$

$\Rightarrow$ SÚSTAVA MÁ PRÁVE 1 RIEŠENIE

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot 1 + 5\cdot 1\cdot(-2) + 9\cdot 3\cdot 2 -$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{matrix}$$

$$-(-2)\cdot(-3)\cdot 9 - 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 5 =$$

$$= -6 - 10 \cancel{+54} \cancel{-54} - 4 - 15 = -35$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot 5\cdot 1 + 1\cdot 9\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-2)\cdot 5\cdot 2 - 2\cdot 9\cdot 6 - 1\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= 30 \cancel{-18} + 8 \cancel{+20} - 108 \cancel{-2} =$$

$$= -70$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 6\cdot(-3)\cdot 9 + 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 5 -$$

$$-2(-3)\cdot 2 - 5\cdot 1\cdot 6 - 9\cdot 3\cdot 1 =$$

$$= -162 + 2 \cancel{+30} + 12 \cancel{-30} - 27 =$$

$$= -160 - 15 = -175$$

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$x_1 = \frac{-35}{-35} = 1$$

$$x_2 = \frac{-70}{-35} = 2$$

$$x_3 = \frac{-175}{-35} = 5$$

$$\bar{x} = (1, 2, 5)^T$$

RIEŠENIE SÚSTAVY AKO MATICOVEJ ROVNICE

$A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad / \cdot A^{-1}$

A JE REGULÁRNA $\Rightarrow \exists A^{-1}$

INVERZNÁ MATICA

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot \bar{x} = A^{-1} b$

$E \cdot \bar{x} = A^{-1} b$

$x = A^{-1} b$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$A \cdot E = E \cdot A = A$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$