VLASTNOSTI nevlastných limít

(3) $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$

ak $f(x) \to 0^-$ $(f(x) < 0)$

$\frac{1}{-1}, \frac{1}{-0{,}5}, \frac{1}{-0{,}1}, \frac{1}{-0{,}01}, \ldots \to -\infty$

(4) $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = \infty$

$f(x) \to 0^+$ $(f(x) > 0)$

$\frac{1}{1}, \frac{1}{0{,}5}, \frac{1}{0{,}1}, \frac{1}{0{,}01} \to \infty$

1, 2, 10, 100

$f(x) \to 0$
$f(x) > 0$

(5) $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \left(\frac{1}{\pm\infty}\right) = 0$

$f(x) \to \infty$ alebo $-\infty$

$\frac{1}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots \to 0$

! NEKONEČNO! ← nevlastné číslo
používame s $\boxed{\infty}$

príklady:
$\infty + 4 = \infty$
$\infty + k = \infty$
$k.\infty = \infty$ pre $k > 0$
$k.\infty = -\infty$ pre $k < 0$
$\infty + \infty = \infty$
$\boxed{\infty} - \boxed{\infty} = ?$ 0 ? ? ∞ ?
nie je to definované

pr. $\lim_{x\to\infty} (x - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$

$\left(\lim_{x\to a} (\text{konštanta}) = \text{konštanta}\right)$

$\lim_{x\to\infty} (3x - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty$

$\infty - \infty$ je neurčitý výraz

další neurčité výrazy:

? $\frac{0}{0}$?

$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} 2 = 2$

$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} 3 = \boxed{3}$

! nula v menovateli je limitná !

NEURČITÉ VÝRAZY:

$\boxed{\frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ 0.\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}}$

POČÍTANIE LIMÍT:

pr. $\lim_{x\to 2} (2x) = 4$

1. dosadím za $x \to a$
   a dostanem výsledok (určitý výraz)

limita vypočítaná, ako funkčná hodnota.
VEĽMI JEDNODUCHÉ :)

2. dosadím za $x \to a$
   a dostanem neurčitý výraz. → PROBLÉM →
   → riešim problém (odstránim neurčitosť).

príklady:

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2(x-2) + (x-2)}{(x-2)(x+3)} =$
neurč.

$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = 1$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+1} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{3x+1} + 1}{\sqrt{3x+1} + 1}$
neurč.

$(a-b).(a+b)$, 1

$= \lim_{x\to 0} \frac{3x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x(\sqrt{3x+1} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{3x+1} + 1)} = \frac{3}{2}$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{4x^2 + x + 3} \Big/ \cdot \frac{1}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{4\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}$
neurč. výraz

použijem: predelím čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou x (v menovateli)

$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \boxed{\frac{3}{4}}$

$3 \quad 0 \quad \to 0$
$4 \quad 0 \quad \to 0$

skrátený výpočet: $\lim_{x\to\infty} \frac{\text{polynóm}}{\text{polynóm}}$ (rovnakého stupňa),

vezmem podiel koeficientov pri najvyšších mocninách

$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 4x + 8}{2x^3 + x^2 - 10} = \frac{5}{2}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 4x + 8}{x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \infty$

v čitateli polynóm vyššieho stupňa ako v menovateli,
výsledok $= \infty$
$-\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^4 + 5x^2 - 10} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \boxed{0}$

(v menovateli polynóm vyššieho stupňa).

VETA o policajtoch

na $O_\delta^\circ(a)$ $h(x) \le f(x) \le g(x)$

$h(x) \xrightarrow{x\to a} b$, $g(x) \xrightarrow{x\to a} b$

potom $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

$\boxed{\forall \text{ pre všetky}}$
$\exists$ existuje

VZŤAH: platí

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

dôkaz: o týždeň