DERIVÁCIA FUNKCIE

↓ aplikácia vo fyzike, chémii, ekonómii

pomocou derivácie budeme vedieť charakterizovať rôzne vlastnosti funkcie (monotónnosť, extrémy, ...)

úvodné príklady:

① fyzika: pohyb hmotného bodu

nech $s(t)$ ... je dráha

funkcia — premenná: čas t

vezmime časový interval $\langle t_0, t\rangle$

prejdená dráha $s(t) - s(t_0)$

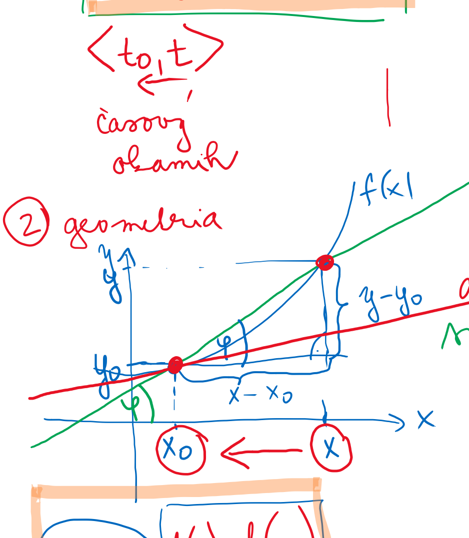
$\boxed{\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}}$ ... priemerná rýchlosť pohybu hmotného bodu

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}} = \text{okamžitá rýchlosť v } t_0$$

$\langle t_0, t\rangle$

časový okamih

② geometria



$[x_0, y_0]$

$[x, y]$

smernica sečnice $= \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \boxed{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \text{smernica dotyčnice v bode } [x_0, y_0]$$

Definícia derivácie funkcie v bode x_0 !

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \boxed{f'(x_0)}$$

ak existuje, ! VLASTNÁ LIMITA ! — derivácia funkcie v bode x_0

! v bode x_0 musí byť $f(x)$ definovaná, aj na okolí !

iný zápis limity $x = x_0 + h$; $h = \boxed{x - x_0}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

alternatívny zápis

označenie derivácie: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$

príklad $f(x) = \sqrt{x}$; $D(f) = \langle 0, \infty)$

nech $x_0 \in \langle 0, \infty)$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\text{upravím}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}}_{=1} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \quad x_0 \neq 0$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \forall x_0 \in (0, \infty) \qquad \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

↓ derivácia funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ v bode x_0

derivácia fce v bode je ČÍSLO

derivácia fce je funkcia

JEDNOSTRANNÉ DERIVÁCIE:

derivácia zľava $\boxed{f'_-(x_0)} = \lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

derivácia sprava $\boxed{f'_+(x_0)} = \lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

! Ak má funkcia f v bode x_0 deriváciu, potom je v bode x_0 spojitá !

dôkaz: predpoklad. $\exists \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

chcem ukázať: $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$,

resp. $\boxed{\lim_{x\to x_0} \left(f(x)-f(x_0)\right) = 0}$

počítajme $\lim_{x\to x_0} \left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0} \boxed{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \cdot \boxed{(x-x_0)}$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \boxed{\lim_{x\to x_0} (x-x_0)} = 0$$

existuje a je vlastná $f'(x_0) \cdot 0$

áno $f(x)$ je spojitá v bode x_0

! naopak hovoriť neplatí !

príklad $\boxed{f(x) = |x|}$, $x_0 = 0$ vypočítajme deriváciu v bode 0

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} =$$

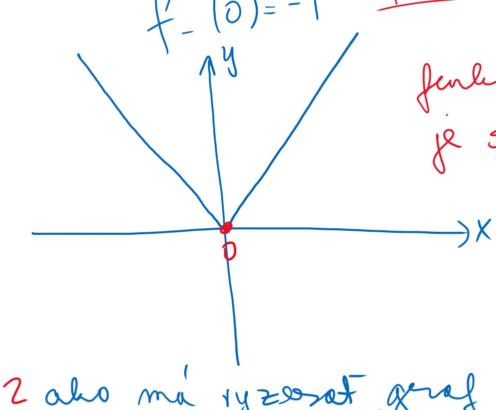
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1$$

$|h| = -h$ ak $h < 0$

$f'_+(0) = 1$

$f'_-(0) = -1$

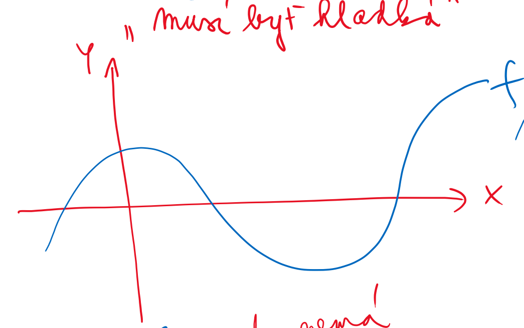
$\boxed{f'(0) = \text{neexistuje !}}$



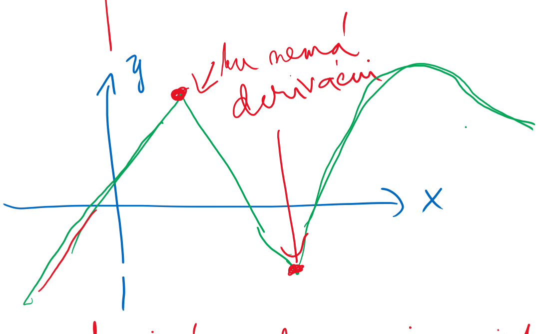
funkcia $f(x) = |x|$ je spojitá v bode 0.

? ako má vyzerať graf funkcie, aby mala všade deriváciu ?

„musí byť hladká"



f(x) má všade deriváciu je hladká



pojmy: derivácia funkcie na intervale (a, b), $\langle a, b\rangle$

pre elegantné počítanie derivácií funkcií:

PRAVIDLÁ:

1) $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

2) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

3) $\boxed{[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$

DERIVÁCIA SÚČINU

dôkaz

vezmem ľub. $\boxed{x \in J}$

$$\left(\boxed{f(x) \cdot g(x)}\right)' \underset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

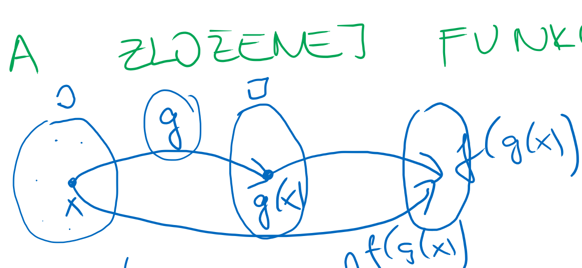
$$= \lim_{h\to 0} \left(g(x+h) \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)} \right)$$

$$= \boxed{g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

④ DERIVÁCIA PODIELU

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}} \quad !$$

DERIVÁCIA ZLOŽENEJ FUNKCIE



g má der. na J

f má der na J.

tak $f(g(x))$ má der. na J

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

DERIVÁCIA INVERZNEJ FUNKCIE

(v príkladoch nie, ale pre odvodenie niektorých derivačných vzorcov)!

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

DERIVAČNÉ VZORCE:

$[c]' = 0$ $\quad c \in \mathbb{R}$

prečo ? $\quad f(x) = c$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{c-c}^{=0}}{x-x_0} = 0$$

$x_0 \in \mathbb{R}$

pr. $(x^2)' = 2x$

$(x^5)' = 5x^4$

$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

pr. $(\pi^x) = \pi^x \cdot \ln \pi$