DERIVÁCIE VYŠŠÍCH RÁDOV

$f'(x)$ ... prvá derivácia

$(f'(x))' = f''(x)$ druhá derivácia (resp. derivácia druhého rádu)

$(f''(x))' = f'''(x)$ tretia derivácia

$f^{(n)}(x)$; $n \geq 4$

$f(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 8$

$f'(x) = \boxed{4x^3 + 15x^2 - 8x}$

$f''(x) = \boxed{12x^2 + 30x - 8}$

$f'''(x) = 24x + 30$

$f^{(4)}(x) = 24$

$f^{(5)}(x) = 0$

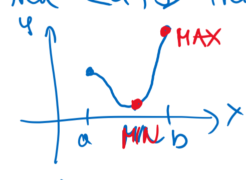
VLASTNOSTI DIFERENCOVATEĽNÝCH FUNKCIÍ NA INTERVALE (majúce deriváciu).

Vieme: ak $f(x)$ má deriváciu na $\langle a, b\rangle \Rightarrow$

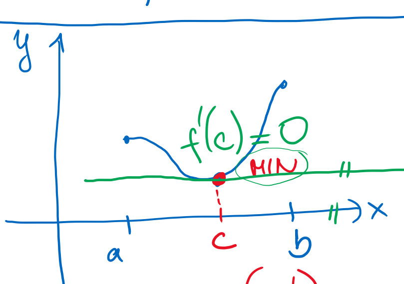
fakty

$\Rightarrow f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$.

Spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$ nadobúda MIN, MAX.



VETA Nech $f: \langle a,b\rangle \to R$ nadobúda vo vnútornom bode $c \in (a,b)$ MIN, resp. MAX. Ak existuje $f'(c)$, potom $f'(c) = 0$.



($f'(c)$)... smernica dotyčnice $f(x)$ v bode c.)

$f'(c) = 0$

$\forall x \in O(c)\ f(x) \geq f(c) \Rightarrow f(x) - f(c) \geq 0$

nech napr. v bode c $f(x)$ má minimum.

dôkaz:

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \boxed{\leq 0}$$

$f(x) - f(c) \geq 0$, $x - c < 0$

$x < c$

$x - c < 0$

porovnajme

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \boxed{\geq 0}$$

$f(x) - f(c) \geq 0$, $x - c > 0$

$x > c$

$x - c > 0$

ale podľa podľa predpokladov vety $f'(c)$ existuje, teda $f'_-(c) = f'_+(c) = 0 = f'(c)$

veta dokázaná.

VETA Rolleho veta

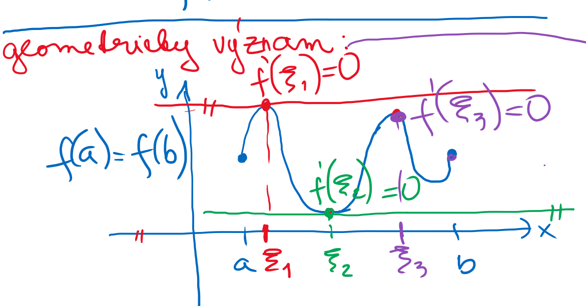
Nech f má vlastnosti:

1. je spojitá na $\langle a, b\rangle$
2. má deriváciu na (a, b)
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a,b)$ (xí) taký, že

$f'(\xi) = 0$.

geometrický význam:



dotyčnica v danom bode je rovnobežná s Ox.

dôkaz: vyplýva z predchádzajúcej vety (zjednodušene).

Lagrangeova veta:

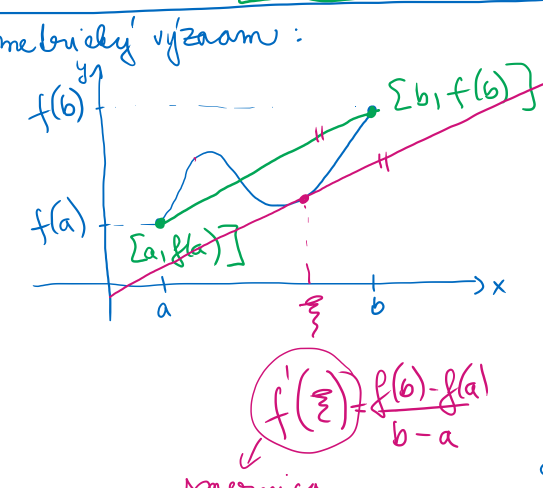
Nech funkcia f má vlastnosti:

1. je spojitá na $\langle a, b\rangle$
2. má deriváciu na (a, b).

Potom existuje aspoň 1 bod $\xi \in (a,b)$ taký, že

$$f'(\xi) = \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

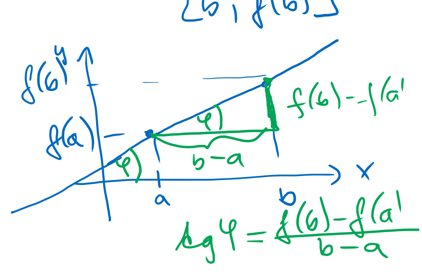
geometrický význam:



$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$ číslo, ktoré vyjadruje smernicu priamky, ktorá spája body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$

$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

smernica dotyčnice



$tg\,\varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

geom. význam Lagrangeovej vety: existuje bod, v ktorom dotyčnica je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$.

dôkaz: zvolím pomocnú funkciu

$$F(x) = \boxed{f(x)} - \boxed{f(a)} - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

ukážeme, že pre $F(x)$ sú splnené predpoklady Rolleho vety:

$F(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ ✓

$F(x)$ má deriv. na (a, b) ✓

$$F(a) = \underbrace{f(a) - f(a)}_{0} - \underbrace{\frac{a-a}{b-a}}_{0}(f(b) - f(a)) = 0$$

$$F(b) = \underbrace{f(b) - f(a)}_{} - \underbrace{\boxed{\frac{b-a}{b-a}}}_{1}(f(b) - f(a)) = 0$$

teda platí $F(a) = F(b)$

teda použijem záver Rolleho vety:

$\exists\, \xi \in (a,b);\ F'(\xi) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{1}{b-a} \cdot (f(b) - f(a))$$

$$\boxed{F'(\xi)} = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$\Downarrow$

$\exists\, \xi \in (a,b);\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ koniec dôkazu Lagrang. vety.

Poznámka:

Lagr. veta sa zvykne nazývať aj veta o prírastku funkcie, lebo

$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{\text{prírastok funkcie}} = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

$\downarrow$

využitie uvedených vlastností: pri priebehu funkcie.

ešte jedna vlastnosť: Taylorov polynóm

nabudúce.