Matematika 1 – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr.1: 47 / 11 Určte ASS a ABS funkcie

$$y = x - \frac{1}{x}$$

Pr.2: 47/ 2 Určte ASS a ABS funkcie 1. Určiť D(f) a bod nespojitosti.

$$y = x^3 + 3x^2 - 2$$

$$D(f) = R$$

bod nespojitosti $\boldsymbol{x_0}$ nemá

2. Určiť ABS v bode nespojitosti – ABS nemá, lebo nemá bod nespojitosti

3. Určiť ASS

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 + 3x - \frac{2}{x}) = \pm\infty$$

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] \; - nerátame\ , k\ sa\ nerovná\ vlastnému\ číslu$$

ASS nemá

Pr.3: Určte ASS a ABS funkcie

$$y = \frac{2x^2}{2x-1}$$

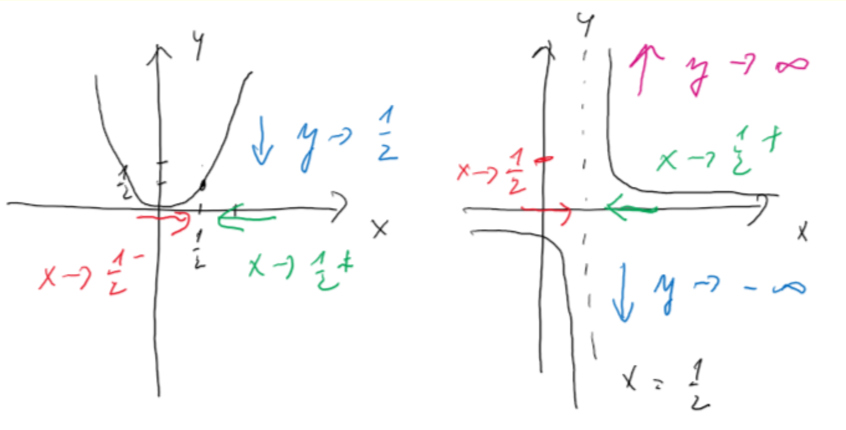
$2x - 1 \neq 0$

$x \neq \frac{1}{2}$, $D(f) = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

bod nespojitosti $\boldsymbol{x_0 = 0,5}$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to 0,5^+} \frac{2x^2}{2x-1} = \lim_{x \to 0,5^+} \frac{1}{2x-1} . \lim_{x \to 0,5^+} 2x^2 = \frac{1}{0^+} . (+\ \check{c}\acute{\imath}slo) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to 0,5^-} \frac{2x^2}{2x-1} = \lim_{x \to 0,5^-} \frac{1}{2x-1} . \lim_{x \to 0,5^-} 2x^2 = \frac{1}{0^-} . (+\ \check{c}\acute{\imath}slo) = -\infty$$

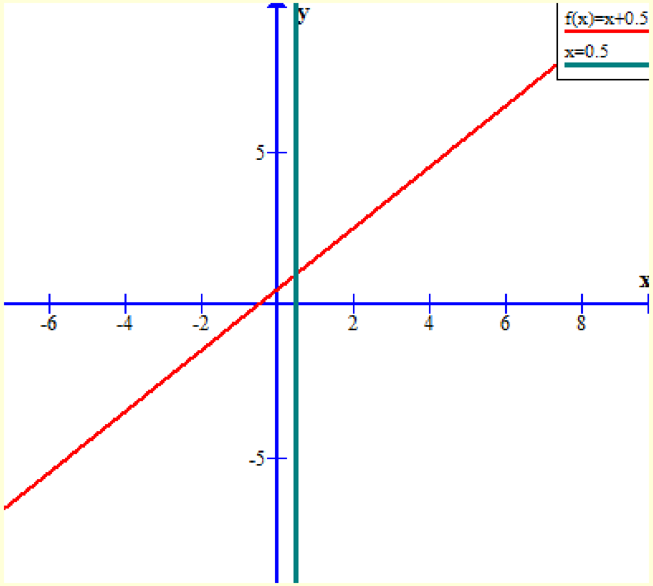


ABS: $x = 0,5$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{2x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{2x^2 - x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2x^2}{2x-1} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2x^2 - 2x^2 + x}{2x-1}\right] = \frac{1}{2}$$

ASS: $y = x + 0{,}5 \quad pre \;\; x \to \pm\infty$



ASS: $y = x + 0{,}5 \quad pre \;\; x \to \pm\infty$

ABS: $x = 0{,}5$

Pr.4: 47 / 12 Určte ASS a ABS funkcie

$$y = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{4 - x^2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{4 - x^2} \cdot \lim_{x \to -2^+} x^2 = \frac{1}{0^+} \cdot 4^- = \infty$$

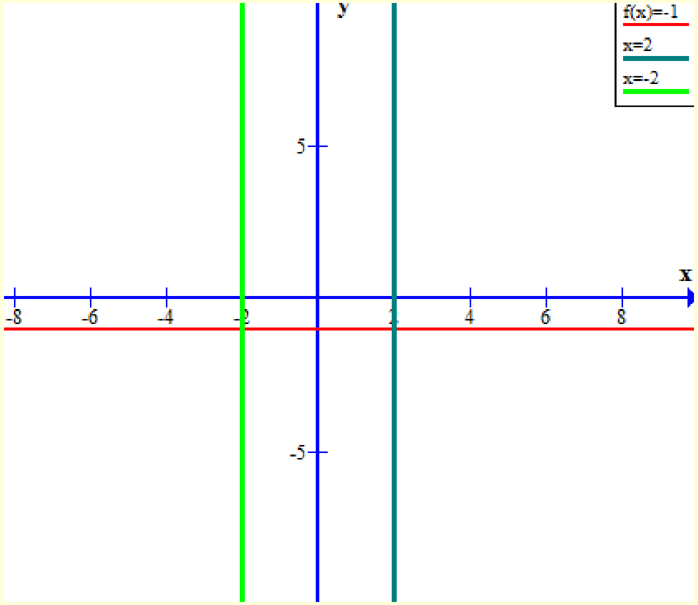
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{4 - x^2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{4 - x^2} \cdot \lim_{x \to -2^-} x^2 = \frac{1}{0^-} \cdot 4^- = -\infty$$

ABS: $x = -2$

$$k = 0$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2}{4 - x^2} \right] = -1$$

ASS: $y = -1 \; pre \;\; x \to \pm\infty$



ASS: $y = -1 \;\; pre \;\; x \to \pm\infty$

ABS: $x = -2$

ABS: $x = 2$

Dú – 47 / 1,5,6,8,9,12,13,16

Testík: Vyberte správne tvrdenia.

1. Asymptotu bez smernice určujeme
   a) v ľubovoľnom bode z definičného odboru funkcie,
   b) v bode nespojitosti funkcie,
   c) v žiadnom bode.

2. Funkcia má asymptotu so smernicou, ak limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$
   a) sú vlastné čísla,
   b) sú nevlastné čísla,
   c) sú rovné nule.

3. Funkcia $\mathrm{y}=\frac{2}{x}$
   a) má asymptotu bez smernice v bode 0,
   b) má asymptotu bez smernice v bode 2,
   c) nemá asymptotu bez smernice.

4. Ak k = 2 a q = -1, potom zápis asymptoty so smernicou je
   a) y = 2x + 1,
   b) y = -1x + 2,
   c) y = 2x – 1,
   d) y = 2.

Derivácia funkcie

Označenie derivácie funkcie v bode x_0: $f\,'(x_0)$

Pravidlá pre výpočet derivácie funkcie:

$$[cf(x)]' = cf'(x) \qquad c \in R$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \left[e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\right]'$$

Napr.:

$(3x)'$

$(2x^2 + 5 - \ln x)'$

$(x \cdot \ln x)'$

$\left(\frac{3x}{\sin x}\right)'$

$(\ln \sin 2x)'$

$\left[(\sin x)^x = e^{x \ln \sin x}\right]'$

Derivácie elementárnych funkcií:

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Pr.1: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{\sin x}{2} + x.2^x + \frac{x}{\ln x} - \sqrt{x^3}$

Pr.2: 25 /2 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)=\sqrt[3]{x^4}+5^x-\ln x$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^4}+5^x-\ln x = x^{\frac{4}{3}}+5^x-\ln x$$

$$f'(x)=\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'+\left(5^x\right)'-\left(\ln x\right)'$$

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}+5^x\ln 5-\frac{1}{x}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+5^x\ln 5-\frac{1}{x}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}+5^x\ln 5-\frac{1}{x}$$

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

Pr.3: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \mathrm{tg}\,(3x + 2) - \log_3 x \,.\, e^{2x} + \frac{5}{x} + \frac{2x}{x^3 + 4x} + \sin^3 x$$

Pr.4: **25 / 11:** Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)=\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \sqrt{1+2\operatorname{tg}x} = (1+2\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+2\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1+2\operatorname{tg}x)'$$

$$(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+2\operatorname{tg}x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(0+2\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}} \cdot \cancel{2} \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Pr.5: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{\operatorname{arctg} x} + \ln \sin 5x + \sqrt{2x}.\operatorname{cotg} x + e^3$$

Kontrolka:

1. Derivácia funkcie $y = 2^{2080}$ je

a) $y' = 2$, b) $y' = 2080.2^{2079}$, c) $y' = 0$.

2. Funkciu $y = \frac{1}{x}$ najjednoduchšie zderivujeme

a) pomocou vzorca pre $y = \ln x$,
b) pomocou pravidla pre podiel dvoch funkcii,
c) pomocou pravidla pre mocninovú funkciu.

3. Vyberte z uvedených funkcii zložené funkcie:

a) $y = \sin x$, b) $y = \sqrt{\ln 2x}$, c) $y = \operatorname{arctg}(x^2 + 5x)$,
d) $y = x^2 - 5x + \cos x$, e) $y = e^{2x+1}$.

Pr. 6: 26 / 25

$$f(x) = x^x$$

$$\left[\underline{f(x)}^{\underline{g(x)}}\right]' = \left[e^{\underline{g(x)}\cdot\ln \underline{f(x)}}\right]'$$

f(x) g(x)

$$f(x) = x^{x} = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(x' \ln x + x (\ln x)' \right)$$

$$f'(x) = x^{x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = x^{x} \cdot (\ln x + 1)$$

Dú -25, 26 / 1 – 35
(príklady 25 -31 podľa **príkladu 6** v tejto prezentácii alebo
zo zbierky na str. 24 / **riešený príklad 9)**