Matematika 1 – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Monotónnosť funkcie a extrémy funkcie

Monotónnosť funkcie – vypočítame prvú deriváciu funkcie na základe nej určíme monotónnosť a extrémy

na intervaloch, kde $f'(x) > 0$, je funkcia $f(x)$ rastúca $\nearrow$

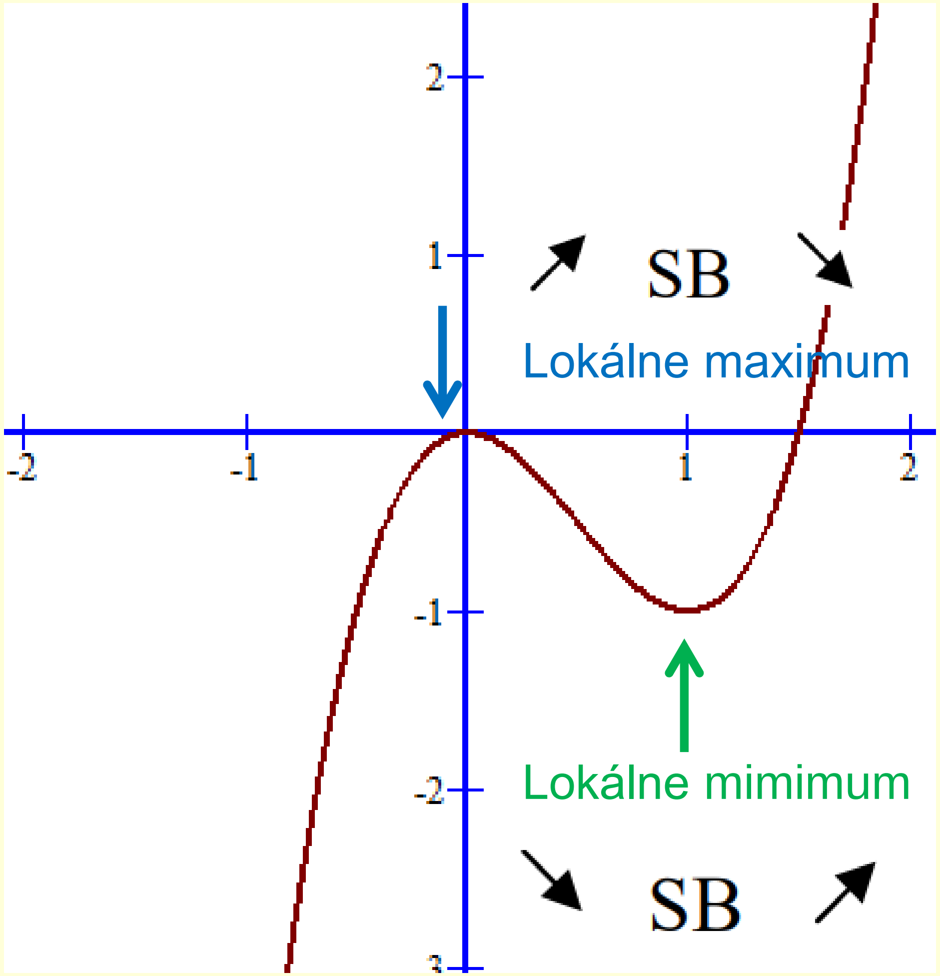
na intervaloch, kde $f'(x) < 0$, je funkcia $f(x)$ klesajúca $\searrow$

Monotónnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f'(x) = 0$ *alebo v bodoch, v ktorých* $f'(x)$ *neexistuje.*

Stacionárne body (SB) – body, v ktorých je $f'(x) = 0$

Lokálne maximum – ak na intervale vľavo od SB funkcia rastie a vpravo klesá $\nearrow$ SB $\searrow$

Lokálne minimum – ak na intervale vľavo od SB funkcia klesá a vpravo rastie $\searrow$ SB $\nearrow$



2
1
SB
Lokálne maximum
-2
-1
1
2
-1
Lokálne mimimum
-2
SB

Postup pri určení intervalov monotónnosti:

1. určíme definičný obor
2. vypočítame prvú deriváciu funkcie
3. prvú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je $f'(x) = 0$ – stacionárne body
4. určíme bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje
5. stacionárne body a bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme monotónosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme lokálne extrémy funkcie

Konvexnosť, konkavnosť funkcie a inflexné body

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – vypočítame druhú deriváciu funkcie

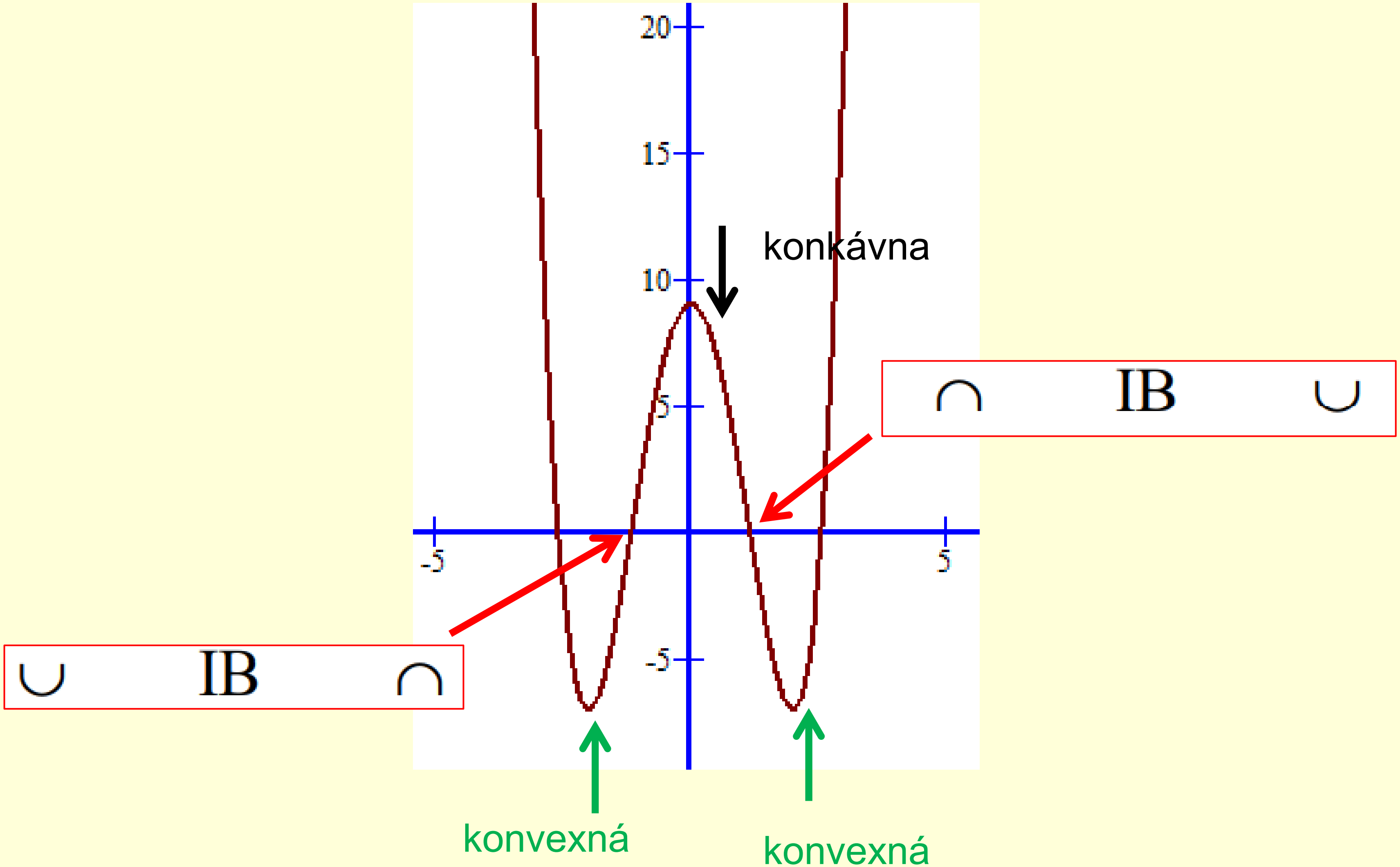
na intervaloch, kde $f''(x) > 0$ je funkcia konvexná – ∪

na intervaloch, kde $f''(x) < 0$ je funkcia konkávna – ∩

Konvexnosť a konkávnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f''(x) = 0$ *alebo v bodoch, v ktorých druhá derivácia funkcie neexistuje.*

Inflexné body (IB) – body, v ktorých je $f''(x) = 0$ a sa v nich mení konvexnosť a konkávnosť

∪ IB ∩ ∩ IB ∪


20
15
10
5
-5
-5
5
konkávna
∩ IB ∪
∪ IB ∩
konvexná
konvexná

Postup pri určení intervalov pre konvexnosť a konkávnosť:

1. určíme definičný obor
2. vypočítame druhú deriváciu funkcie
3. druhú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je nulová
4. určíme bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje
5. body, v ktorých je druhá derivácia nulová a bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme infexné body funkcie

Pr.1 – 47 / 4 Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

Určenie monotónnosti

$y = 16x(x-1)^3$

1. určiť definičný obor D(*f*) = R

2. vypočítať prvú deriváciu funkcie

$$y' = 16(x-1)^3 + 16x.3(x-1)^2$$

$$y' = 16(x-1)^2(x-1+3x) = 16(x-1)^2(4x-1)$$

3. určiť $y' = 0$ a stacionárne body (SB)

$$16(x-1)^2(4x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \vee (4x-1) = 0$$

$$|x-1| = 0 \vee x = \frac{1}{4}$$

$$x = 1 \vee x = \frac{1}{4}$$

SB: $\frac{1}{4}$, 1

4. určiť bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. pomocou stacionárnych bodov a bodov, v ktorých prvá derivácia neexistuje, rozdeliť definičný obor na intervaly

	$(-\infty, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, 1)$	1	$(1, \infty)$
y'	-	SB	+	SB	+
	↘	lok min	↗		↗

6. zistiť znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určiť monotónosť funkcie na intervaloch

$$y' = 16(x-1)^2(4x-1)$$

vždy +

za x dosadíme ľubovoľné číslo z jednotlivých intervalov

funkcia rastie na intervale $(\frac{1}{4}, 1)$ a $(1, \infty)$ a klesá na $(-\infty, \frac{1}{4})$

7. nájsť lokálne extrémy funkcie lokálne minimum je v bode $\frac{1}{4}$

Určenie konkávnosti a konvexnosti

1. určiť definičný obor D(*f*) = R

2. vypočítať druhú deriváciu funkcie

$$y'' = \left(16(x-1)^2(4x-1)\right)' = 16.2(x-1)(4x-1) + 16(x-1)^2 4$$

$$y'' = 16.2(x-1)\left((4x-1) + (x-1)2\right) = 32(x-1)(4x-1+2x-2)$$

$$y'' = 32(x-1)(6x-3) = 96(x-1)(2x-1)$$

3. určiť $y'' = 0$

$$y'' = 96(x-1)(2x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x-1 = 0 \vee (2x-1) = 0$$

$$x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$$

4. určiť bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. rozdeliť definičný obor na intervaly pomocou bodov, v ktorých je druhá derivácia nulová alebo neexistuje

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, \infty)$
y''	+		-		+
	∪	IB	∩	IB	∪

6. zistiť znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť

funkcia je konvexná na intervale $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(1, \infty)$ a konkávna na $(\frac{1}{2}, 1)$

7. Určiť inflexné body funkcie

inflexné body má funkcia v bodoch $\frac{1}{2}$, 1

Pr. 2 – 47 / 2 Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

Určenie monotónnosti

$y = x^3 + 3x^2 - 2$

1. určiť definičný obor D(*f*) = R

2. vypočítať prvú deriváciu funkcie

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 3x(x + 2)$$

3. určiť $y' = 0$ a stacionárne body (SB)

$$3x(x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x = 0 \vee (x + 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2$$

SB: $-2, 0$

4. určiť bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. pomocou stacionárnych bodov a bodov, v ktorých prvá derivácia neexistuje, rozdeliť definičný obor na intervaly

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
y'	+	SB	-	SB	+
	↗	lok max	↘	lok min	↗

6. zistiť znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určiť monotónosť funkcie na intervaloch

$y' = 3x(x+2)$: pre x = - 3 znamienko +, pre x = -1, znamienko -, pre x = 1, +

funkcia rastie na intervale $(-\infty, -2)$ a $(0, \infty)$ a klesá na $(-2,\ 0)$

7. nájsť lokálne extrémy funkcie

lokálne maximum je v bode -2 lokálne minimum je v bode 0

Určenie konkávnosti a konvexnosti

1. určiť definičný obor D(*f*) = R

2. vypočítať druhú deriváciu funkcie $y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6$

3. určiť $y'' = 0$

$$y'' = 6x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

4. určiť bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. rozdeliť definičný obor na intervaly pomocou bodov, v ktorých je druhá derivácia nulová alebo neexistuje

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
y''	-		+
	∩	IB	∪

6. zistiť znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť

funkcia je konvexná na $(-1, \infty)$ a konkavná na intervale $(-\infty, -1)$

7. Určiť inflexné body funkcie inflexný bod má funkcia v -1

Pr. 3 – 47 / 11 Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$y = x - \frac{1}{x}$ $\qquad x \neq 0,\ D(f) = R - \{0\}$

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{x^2+1}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$x^2 = -1$ nikdy nenastane, SB nemáme $\wedge\ x \neq 0$,

v 0 prvá derivácia neexistuje, bod nespojitosti : 0

	$(-\infty, 0)$	0	$(1, \infty)$
y'	+		+
	↗	BN	↗

$y' = \frac{x^2+1}{x^2}$ pre všetky *x* stále +

funkcia rastie na celom D(f)

lokálne *extrémy funkcia nemá*

$$y'' = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)' = 0 - \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow \ x^3 \neq 0$$

$-\frac{2}{x^3} = 0$ nikdy nenastane nemáme taký bod $\wedge$ $x \neq 0$,

v 0 druhá derivácia neexistuje, bod nespojitosti : 0

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y''	+		-
	∪	BN	∩

funkcia je konkávna na $(0, \infty)$ a konvexná na intervale $(-\infty, 0)$

inflexný bod neexistuje, lebo $y'' \neq 0$

Pr. 4 – 47 / 7 Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = \frac{x^2+1}{x} \qquad x \neq 0,\ D(f) = R - \{0\}$$

$$y' = \frac{2x.x - (x^2+1).1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \qquad y' = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$[x] = \pm 1, \mathrm{SB} : -1{,}1 \quad \wedge \quad x \neq 0, \mathrm{BN}: 0$$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1{,}0)$	0	$(0{,}1)$	1	$(1, \infty)$
y'	+	SB	-		-	SB	+
	↗	lok max	↘	BN	↘	lok min	↗

$y' = \frac{x^2-1}{x^2}$ pre $x > 1$ a $x < -1$ je + lokálne *extrémy*: *lok. max*: -1, *lok. min*: 1

funkcia rastie na $(-\infty, -1)$ a$(1, \infty)$, klesá na $(-1{,}0)$ a $(0{,}1)$

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 + \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow \; x^3 \neq 0$$

$\frac{2}{x^3} = 0$ nikdy nenastane nemáme taký bod $\wedge$ $x \neq 0$, BN : 0

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y''	-		+
	∩	BN	∪

funkcia je konkávna na $(-\infty, 0)$ a konvexná na intervale $(0, \infty)$

inflexný bod neexistuje, lebo $y'' \neq 0$

Pr. 5 – 47 / 7   Vyšetrite monotónnosť funkcie.

$$y=\frac{x^2}{x-2}$$ $x-2\neq 0,\ D(f)\ =\ R-\{2\}$

$$y' = \frac{2x.(x-2)-x^2.1}{x-2} = \frac{x^2-4x}{x-2} = \frac{x(x-4)}{x-2}$$

$$y' = \frac{x(x-4)}{x-2} = 0\ \rightarrow\ x = 0 \vee \wedge\, x-4=0 \wedge x-2\neq 0$$

$$x = 0 \vee x = 4,\ \text{SB}: 0, 4 \quad \wedge \quad x\neq 2, \text{BN}: 2$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0{,}2)$	2	$(2{,}4)$	4	$(4, \infty)$
y'	-	SB	+		-	SB	+
	↘	lok min	↗	BN	↘	lok min	↗

lokálne $extrémy$: $loklok.min$: 0,4

funkcia rastie na $(0{,}2)$ a $(4, \infty)$, klesá na $(-\infty1{,}0)$ a $(2{,}4)$

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 4x}{x-2}\right)' = \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2-4x).1}{(x-2)^2} = \frac{(2x^2 - 4x - 4x + 8) - x^2 + 4x}{(x-2)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow \; x^3 \neq 0$$

$\frac{2}{x^3} = 0$ nikdy nenastane nemáme taký bod $\wedge$ $x \neq 0$, BN : 0

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y''	-		+
	∩	BN	∪

funkcia je konkávna na $(-\infty, 0)$ a konvexná na intervale $(0, \infty)$

inflexný bod neexistuje, lebo $y'' \neq 0$

Dú – 47/ 1, 5, 6, 8, 9,12, 13, 16