

# Matematika 1 – 7.cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

# Derivácia funkcie

Označenie derivácie funkcie v bode  $x_0$ :  $f'(x_0)$

Pravidlá pre výpočet derivácie funkcie:

$$[cf(x)]' = cf'(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

$$[f(x)^{g(x)}]' = [e^{g(x) \cdot \ln f(x)}]'$$

Uapr.:

$$(3x)'$$

$$(2x^2 + 5 - \ln x)'$$

$$(x \cdot \ln x)'$$

$$\left(\frac{3x}{\sin x}\right)'$$

$$(\ln \sin 2x)'$$

$$[(\sin x)^x = e^{x \ln \sin x}]'$$

## Derivácie elementárnych funkcií:

- $[c]' = 0$

- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$

- $[\sin x]' = \cos x$

- $[\cos x]' = -\sin x$

- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$

- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$

- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$

- $[e^x]' = e^x$

- $[a^x]' = a^x \ln a$

- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$

- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$

**Pr.1:** Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{\operatorname{arctg} x} + \ln \sin 5x + \sqrt{2x} \cdot \operatorname{cotg} x + e^3$$

Pr.2: 25 / 11: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x} = (1 + 2 \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (1 + 2 \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (1 + 2 \operatorname{tg} x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (1 + 2 \operatorname{tg} x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( 0 + 2 \frac{1}{\cos^2 x} \right) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}} \cdot 2 \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

**Pr.3:** Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = x \cdot \arccos(x^2 + 5x) + \sqrt{\frac{2 - x^2 + 3^x}{\sin x^5}}$$

**Pr.4:** Vypočítajte deriváciu funkcie

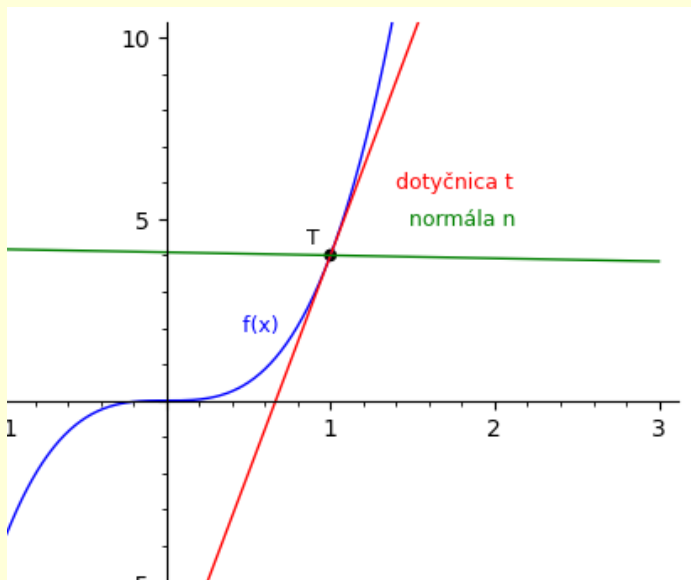
$$f(x) = \arcsin(5 + 2x^2) + \cos(\cotg 3x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (5 + 2x^2)^2}} \cdot 4x - \sin(\cotg 3x) \frac{1}{-\sin^2 3x} \cdot 3$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g(x)'$$

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{1 - (5 + 2x^2)^2}} + \frac{3 \sin(\cotg 3x)}{\sin^2 3x}$$

# Geometrický význam derivácie funkcie



**dotykový bod**  $T [x_0, y_0]$  ku grafu funkcie  $f(x)$

**Smernica dotyčnice** = derivácia  $f'(x_0)$  v dotykovom bode  $T$  ku grafu  $f(x)$

$$k_t = f'(x_0)$$

**Rovnica dotyčnice** v dotykovom bode  $T$  ku grafu  $f(x)$

$$t: y - y_0 = k_t (x - x_0)$$

**Smernica normály**

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t}$$

**Rovnica normály** v dotykovom bode  $T$  ku grafu  $f(x)$  kolmo na dotyčnicu

$$n: y - y_0 = k_n (x - x_0)$$



Pr. 1 – 29 / 5

nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie  $f(x)$  v dotykovom bode

$$f(x) = \sqrt{2x}$$

$$T\left[\frac{1}{2}, ?\right]$$

1. Dopočítať  $y$  – ovú súradnicu dotykového bodu.
2. Určiť prvú deriváciu funkcie  $f'(x)$  a dopočítať smernicu dotyčnice  $k_t$ .
3. Vypočítať smernicu normály  $k_n$ .
4. Vyjadriť rovnicu dotyčnice a normály.

Pr. 2 – 29 / 3

nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie  $f(x)$  v dotykovom bode

$$f(x) = x^3 + 9x + 2$$

$$T[0, ?]$$

$$t: 9x - y + 2 = 0$$

$$n: x + 9y - 18 = 0$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = 0^3 + 9 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$T[0, 2]$$

$$f'(x) = 3x^2 + 9 \quad k_t = f'(x_0) = 3 \cdot 0^2 + 9 = 9$$

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{9}$$

$$t: y - y_0 = k_t (x - x_0)$$

$$y - 2 = 9(x - 0)$$

$$y - 2 = 9x$$

$$\underline{t: 0 = 9x - y + 2}$$

$$n: y - y_0 = k_n (x - x_0) \quad y - 2 = -\frac{1}{9}(x - 0)$$

$$-9y + 18 = x$$

$$\underline{n: 0 = x + 9y - 18}$$

**Pr. 3 – 29 / 7**

nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie  $f(x)$  v dotykovom bode

$$f(x) = 2x \ln x$$

$$T[1, ?]$$

Pr. 4 – 29 / 9

nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie  $f(x)$  v dotykovom bode

$$f(x) = \frac{e^x}{2} + 1$$

$$T[0, ?]$$

$$t: x - 2y + 3 = 0$$

$$n: 4x + 2y - 3 = 0$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = \frac{e^0}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$T\left[0, \frac{3}{2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{2} \quad k_t = f'(x_0) = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t} = -2$$

$$t: y - y_0 = k_t (x - x_0)$$

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} (x - 0)$$

$$2y - 3 = x$$

$$\underline{t: 0 = x - 2y + 3}$$

$$n: y - y_0 = k_n (x - x_0)$$

$$y - \frac{3}{2} = -2 (x - 0)$$

$$-2y + 3 = 4x$$

$$\underline{n: 0 = 4x + 2y - 3}$$

Dú – str. 29 / 4, 6, 8, 10

# L' Hospitalovo pravidlo

Pre výpočet limít, kde sa použije derivácia. Platí za určitých podmienok

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1. limity s neurčitost'ou  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$  - priamo použijeme toto pravidlo

Pr. 1 – 34 / 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$$

## Pr. 2 – 34 / 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{x}$$

$\ln 2$

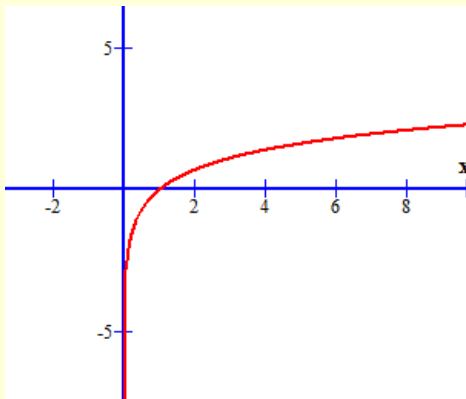
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{x} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6^x - 3^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x \ln 6 - 3^x \ln 3}{1} = 6^0 \ln 6 - 3^0 \ln 3 = \ln \frac{6}{3} = \ln 2$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

### Pr. 3 – 35 / 13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{\infty}{=} \stackrel{L'H}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} \stackrel{\infty}{=} \stackrel{L'H}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \frac{(2\sqrt{x})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$



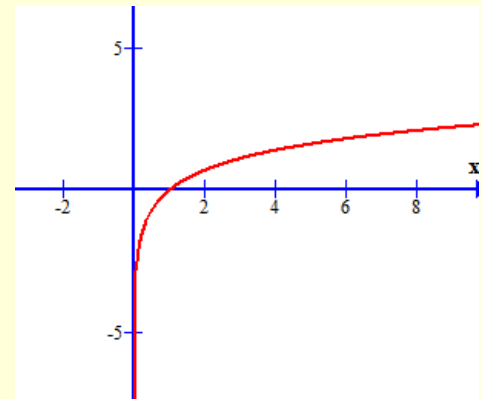
Dú – str. 34, 35 / 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12



2. limity s neurčitost'ou  $\infty - \infty$ , upravíme na spoločného menovateľa, dostaneme neurčitost'  $\frac{\infty}{\infty}$  alebo  $\frac{0}{0}$  a potom použijeme toto pravidlo

Pr. 4 – 35 / 16

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$



Pr. 5 – 35 / 19

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 2x}{2x \cdot \sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\sin x - 2x]'}{[2x \cdot \sin x]'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 2}{2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x} = \frac{\cos 0^+ - 2}{2 \cdot \sin 0^+ + 2 \cdot 0^+ \cdot \cos 0^+} = \frac{1 - 2}{0^+ + 0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Dú – str. 34,35 / 17,18, 20

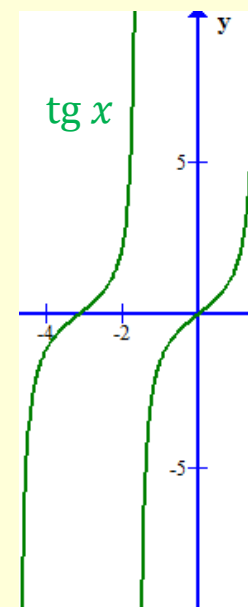
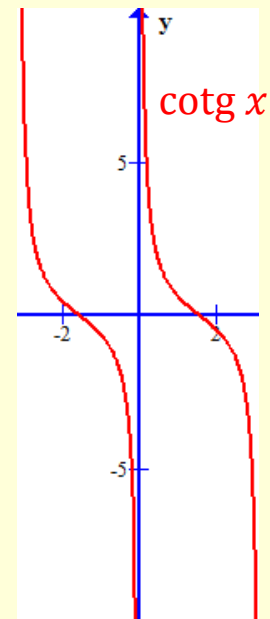
### 3. limity s neurčitost'ou $0 \cdot \infty$ , upravíme limitu na tvar ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{alebo} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

dostaneme neurčitost'  $\frac{\infty}{\infty}$  alebo  $\frac{0}{0}$  a potom použijeme toto pravidlo

Pr. 6

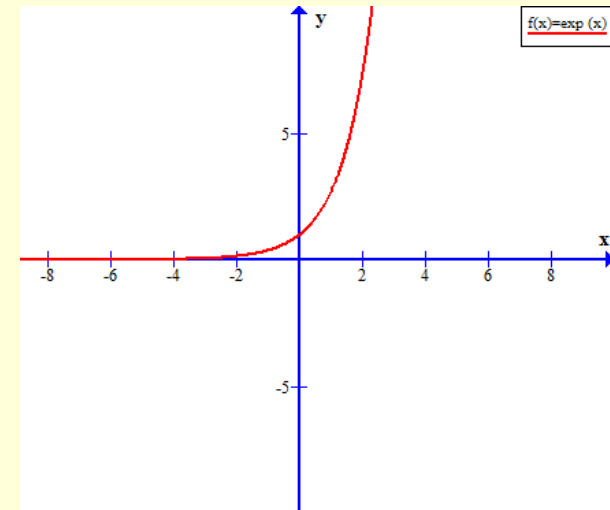
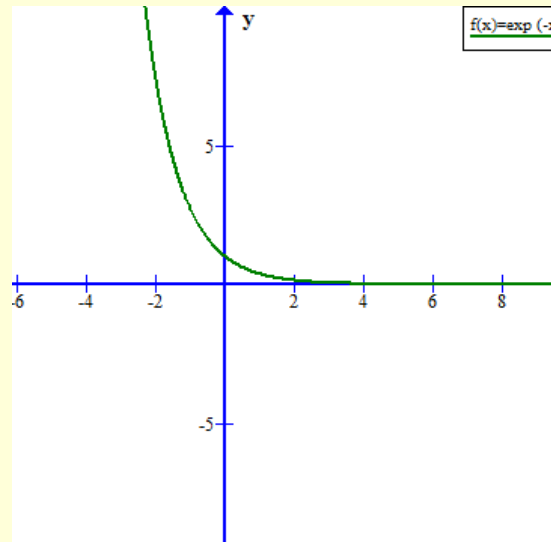
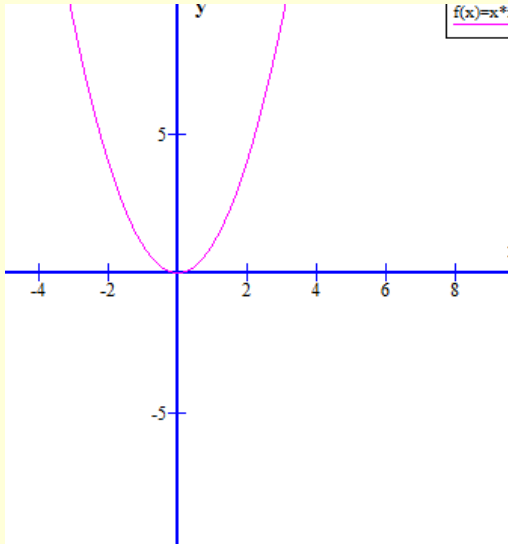
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) \cdot \cotg x =$$



Pr. 7 – 35 / 21

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad 0$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^{-x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$



## Informácie k 1. zápočtovej písomke

Píše sa na cvičeniach. Písomka pozostáva z **5 príkladov** (každý za 6 bodov, spolu **30 bodov**) + **teória** (otázky s výberom odpovede a doplnením, spolu **za 15 bodov**)

### Okruhy:

1. Definičný obor
2. Derivácia
3. Limita, L'Hopitalovo pravidlo
4. ASS, ABS
5. Rovnica dotyčnice

**čas:** 70 minút

doniesť ISIC, písacie potreby a dvojhárok s vytlačenou hlavičkou zo stránky

<https://kmti.fei.tuke.sk/predmet/matematika-i> v záložke **Vzory a predlohy**,

**kalkulačka, mobil a iné SMART zariadenia sú zakázané**