Matematika 1 – 8.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Náhrada cvičení:

Utorok 7:30 (26.11.2024) – nahrádza sa **v piatok 29.11. 2024, ZP4**, **o 13:30**
Utorok 9:10 (26.11.2024) – nahrádza sa **v piatok 29.11. 2024, ZP4**, **o 13:30**
Utorok 10:50 (26.11.2024) – nahrádza sa **v piatok 29.11. 2024, ZP4**, **o 10:50**

Monotónnosť funkcie a extrémy funkcie

Monotónnosť funkcie – vypočítame prvú deriváciu funkcie na základe nej určíme monotónnosť a extrémy

na intervaloch, kde $f'(x) > 0$, je funkcia $f(x)$ rastúca ↗

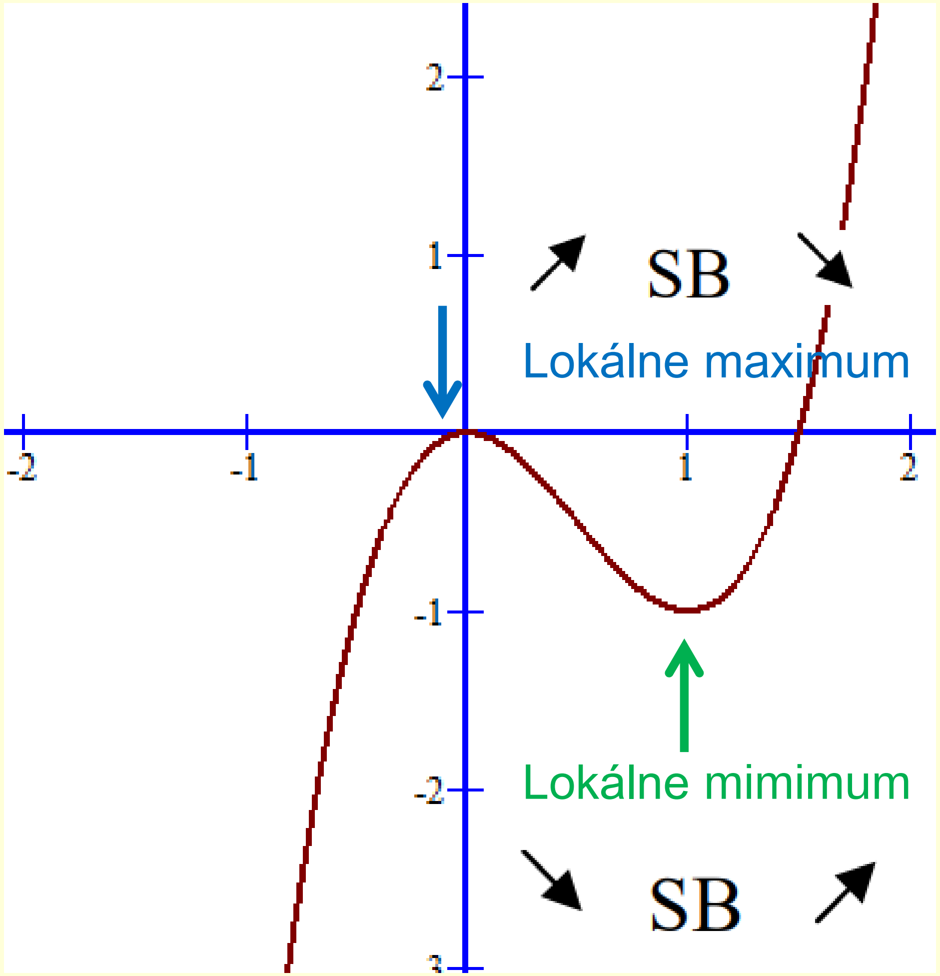
na intervaloch, kde $f'(x) < 0$, je funkcia $f(x)$ klesajúca ↘

Monotónnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f'(x) = 0$ *alebo v bodoch, v ktorých* $f'(x)$ *neexistuje.*

Stacionárne body (SB) – body, v ktorých je $f'(x) = 0$

Lokálne maximum – ak na intervale vľavo od SB funkcia rastie a vpravo klesá ↗ SB ↘

Lokálne minimum – ak na intervale vľavo od SB funkcia klesá a vpravo rastie ↘ SB ↗



2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
SB
Lokálne maximum
Lokálne mimimum
SB

Postup pri určení intervalov monotónnosti:

1. určíme definičný obor
2. vypočítame prvú deriváciu funkcie
3. prvú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je $f'(x) = 0$ – stacionárne body
4. určíme bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje
5. stacionárne body a bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme monotónosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme lokálne extrémy funkcie

Konvexnosť, konkavnosť funkcie a inflexné body

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – vypočítame druhú deriváciu funkcie

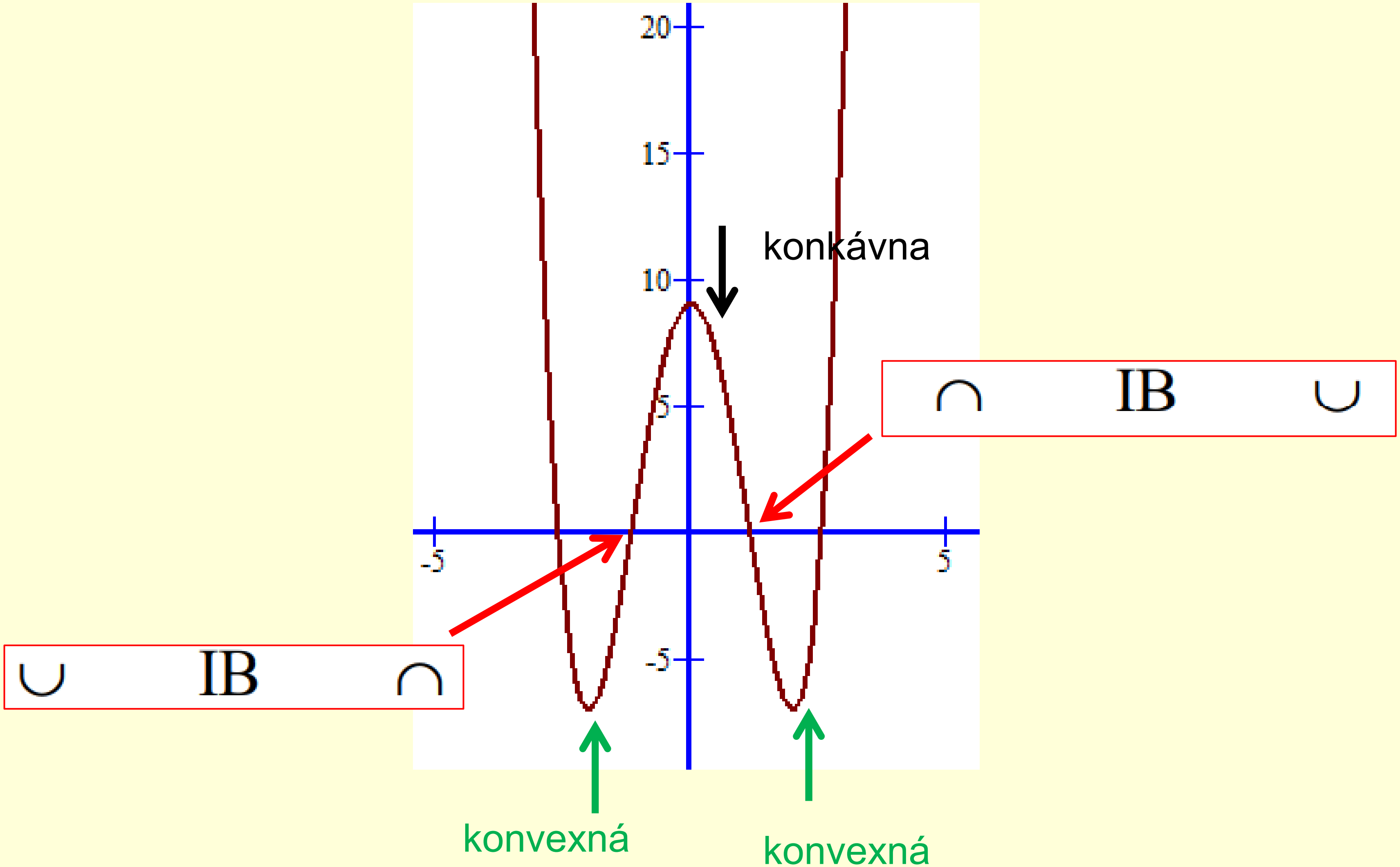
na intervaloch, kde $f''(x) > 0$ je funkcia konvexná – $\cup$

na intervaloch, kde $f''(x) < 0$ je funkcia konkávna – $\cap$

Konvexnosť a konkávnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f''(x) = 0$ *alebo v bodoch, v ktorých druhá derivácia funkcie neexistuje.*

Inflexné body (IB) – body, v ktorých je $f''(x) = 0$ a sa v nich mení konvexnosť a konkávnosť

$\cup$ IB $\cap$ $\qquad$ $\cap$ IB $\cup$



20
15
10
5
-5
5
-5
konkávna
∩ IB ∪
∪ IB ∩
konvexná
konvexná

Postup pri určení intervalov pre konvexnosť a konkávnosť:

1. určíme definičný obor
2. vypočítame druhú deriváciu funkcie
3. druhú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je nulová
4. určíme bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje
5. body, v ktorých je druhá derivácia nulová a bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme infexné body funkcie

Pr.1 – 47 / 4 Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = 16x(x-1)^3$$

Pr. 2 – 47 / 2 Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

Určenie monotónnosti - sami

$$y = x^3 + 3x^2 - 2$$

1. určiť definičný obor D(*f*) = R

2. vypočítať prvú deriváciu funkcie

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 3x(x+2)$$

3. určiť $y' = 0$ a stacionárne body (SB)

$$3x(x+2) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x = 0 \vee (x+2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2$$

SB: $-2, 0$

4. určiť bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. pomocou stacionárnych bodov a bodov, v ktorých prvá derivácia neexistuje, rozdeliť definičný obor na intervaly

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0, \infty)$
y'	+	SB	-	SB	+
	↗	lok max	↘	lok min	↗

6. zistiť znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určiť monotónosť funkcie na intervaloch

$y' = 3x(x+2)$: pre x = - 3 znamienko +, pre x = -1, znamienko -, pre x = 1, +

funkcia rastie na intervale $(-\infty, -2)$ a $(0, \infty)$ a klesá na $(-2, 0)$

7. nájsť lokálne extrémy funkcie

lokálne maximum je v bode -2

lokálne minimum je v bode 0

Určenie konkávnosti a konvexnosti

1. určiť definičný obor D(*f*) = R

2. vypočítať druhú deriváciu funkcie $y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6$

3. určiť $y'' = 0$

$$y'' = 6x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

4. určiť bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. rozdeliť definičný obor na intervaly pomocou bodov, v ktorých je druhá derivácia nulová alebo neexistuje

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
y''	-		+
	∩	IB	∪

6. zistiť znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť

funkcia je konvexná na $(-1, \infty)$ a konkavná na intervale $(-\infty, -1)$

7. Určiť inflexné body funkcie inflexný bod má funkcia v -1

Pr. 3 – 47 / 11 Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$y = x - \frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0,\ D(f) = R - \{0\}$

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{x^2+1}{x^2} = 0 \quad \to \quad x^2 + 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$x^2 = -1$ nikdy nenastane, SB nemáme $\wedge\ x \neq 0$,

v 0 prvá derivácia neexistuje, bod nespojitosti : 0

	$(-\infty, 0)$	0	$(1, \infty)$
y'	+		+
	↗	BN	↗

$y' = \frac{x^2+1}{x^2}$ pre všetky *x* stále +

funkcia rastie na celom D(f)

lokálne *extrémy funkcia nemá*

Určenie konkávnosti a konvexnosti - sami

$$y'' = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)' = 0 - \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow \ x^3 \neq 0$$

$-\frac{2}{x^3} = 0$ nikdy nenastane nemáme taký bod $\wedge$ $x \neq 0$,

v 0 druhá derivácia neexistuje, bod nespojitosti : 0

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y''	+		-
	∪	BN	∩

funkcia je konkávna na $(0, \infty)$ a konvexná na intervale $(-\infty, 0)$

inflexný bod neexistuje, lebo $y'' \neq 0$

Pr. 4 – 47 / 7 Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$ $x \neq 0,\ D(f) = R - \{0\}$

$$y' = \frac{2x.x - (x^2+1).1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \qquad y' = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$[x] = \pm 1, \mathrm{SB} : -1,1 \quad \wedge \quad x \neq 0, \mathrm{BN}: 0$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, \infty)$
y'	+	SB	-		-	SB	+
	↗	lok max	↘	BN	↘	lok min	↗

$y' = \frac{x^2-1}{x^2}$ pre $x > 1$ a $x < -1$ je + lokálne *extrémy*: *lok. max*: -1, *lok. min*: 1

funkcia rastie na $(-\infty, -1)$ a$(1, \infty)$, klesá na $(-1,0)$ a $(0,1)$

Určenie konkávnosti a konvexnosti - sami

$$y'' = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 + \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow \ x^3 \neq 0$$

$\frac{2}{x^3} = 0$ nikdy nenastane nemáme taký bod $\wedge$ $x \neq 0$, BN : 0

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y''	-		+
	$\cap$	BN	$\cup$

funkcia je konkávna na $(-\infty, 0)$ a konvexná na intervale $(0, \infty)$

inflexný bod neexistuje, lebo $y'' \neq 0$

Priebeh funkcie

1. Definičný obor funkcie
2. Limity funkcie v krajných bodoch definičného oboru
3. Limity (jednostranné) v bodoch nespojitosti funkcie
4. Asymptoty grafu funkcie
5. Párnosť, nepárnosť funkcie
6. Monotónnosť funkcie
7. Lokálne extrémy funkcie
8. Intervaly konvexnosti a konkávnosti
9. Inflexné body funkcie
10. Graf funkcie

Pr. 1: 47 / 1 Vyšetrite priebeh funkcie.

$$y = x^3 + 3x^2 - 2$$

1. D(f) = R
2. limity v krajných bodoch D(f)

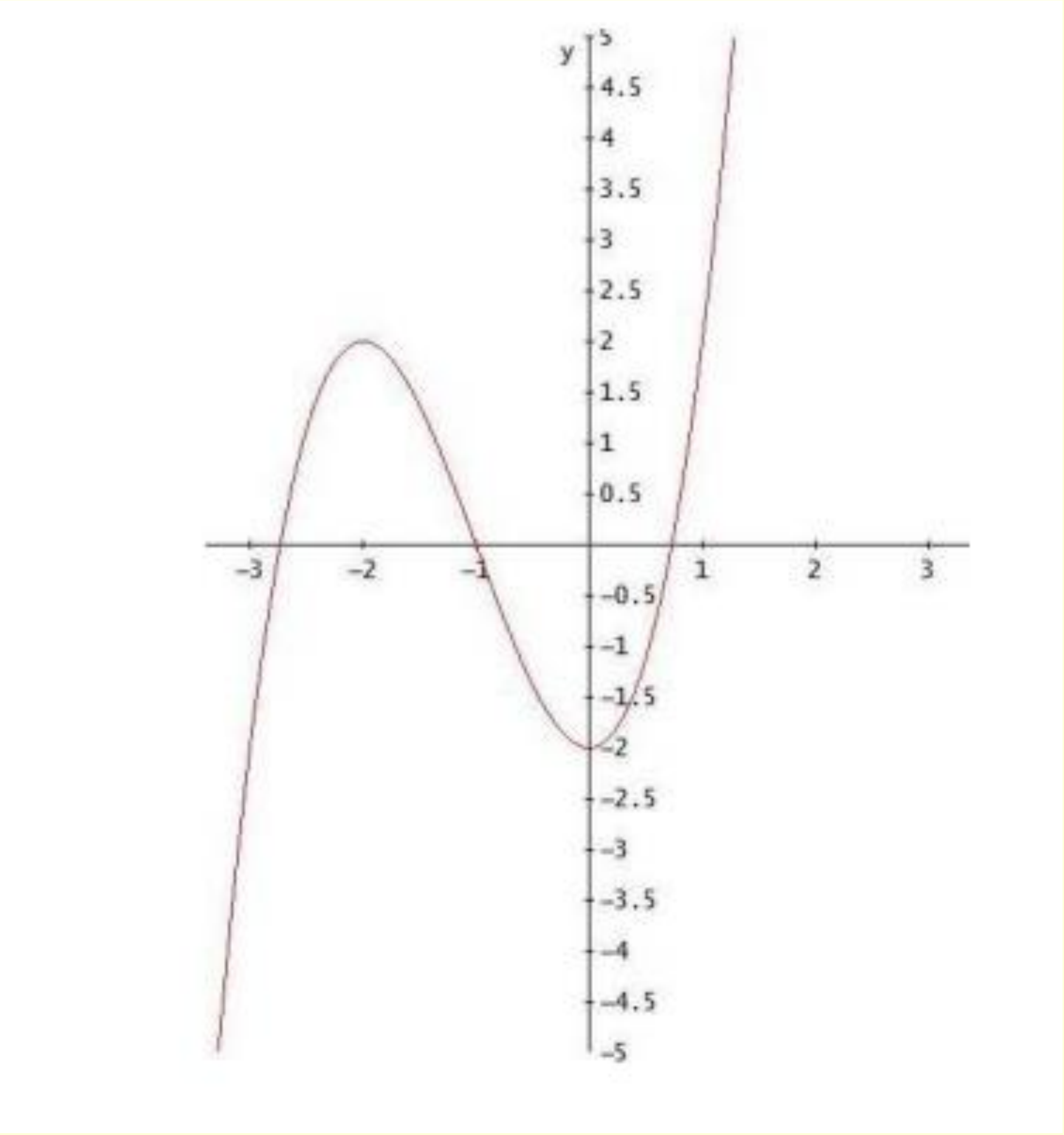
$$\lim_{x\to\infty} x^3 + 3x^2 - 2 = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 + 3x^2 - 2 = -\infty$$

3. nemá bod nespojitosti
4. ABS nemá
   ASS nemá
5. párnosť, nepárnosť

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 - 2 = -x^3 + 3x^2 - 2$$

ani párna, ani nepárna

6. rastie na (- ∞, - 2), (0, ∞), klesá (-2,0)
7. lokálne maximum x = - 2 (y = - 8 + 12 - 2 = 2)
   lokálne minimum x = 0 (y = 0 + 0 - 2 = - 2)
8. konkávna ∩ na (- ∞, - 1), konvexná ∪ na (- 1, ∞),
9. inflexný bod x = -1 (y = -1 + 3 - 2 = 0)


y
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
−3
−2
−1
1
2
3
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−3
−3.5
−4
−4.5
−5

Dú – 47/ 1, 5, 6, 8, 9,12, 13, 16