

Matematika 1 – 8.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Maticе, operácie s maticami

Matica typu $m \times n$ (m riadky, n stĺpce)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

n - stĺpce

m - riadky

skrátенý zápis: $A = (a_{ij})$

a_{ij} – prvok matice, kde i – itý riadok ($i = 1, 2, 3, \dots, m$)
 j – itý stĺpec ($j = 1, 2, 3, \dots, n$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matica 5×3 , kde $a_{43} = 0$

Typy matic:

Štvorcová matica - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)

$$A = (-2 \quad 3 \quad 5)$$

Transponovaná matica k matici A - matica, ktorú získame tak, že v matici A typu $m \times n$ zameníme navzájom riadky za stĺpce, označenie \mathbf{A}^T

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Operácie s maticami:

Súčet (rozdiel) matíc je matica $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ typu $m \times n$

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Sčítavať a odpočítavať je možné len matice **rovnakého typu**.

Násobenie matice konštantou je matica $\mathbf{C} = k \cdot \mathbf{A}$ typu $m \times n$, kde k je konštanta

$$c_{ij} = k a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc je matica $C = A \cdot B$ typu $m \times n$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}$$

kde $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Násobiť môžeme len vtedy, ak je počet stĺpcov prvej matice A rovnaký ako počet riadkov druhej matice B . Výsledná matica má počet riadkov ako prvá matica A a počet stĺpcov ako druhá matica B .

Součin matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ je

$$AB = \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5) & (1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6) \\ (4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5) & (4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

Pr. 1 – 59 / 1: Sú dané matice **A**, **B**. Určte a) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, b) \mathbf{A}^T .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a)

$$3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 - 6 & -9 - 0 \\ 3 - (-2) & 12 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pr. 2: Sú dané matice **A**, **C**. Určte **A.C**, **C.A** , **A + C**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

A.C - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice C

$$\mathbf{A.C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-4) \\ 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -17 \\ 18 \end{pmatrix}$$

C.A - nedá sa, nie je rovnaký počet stĺpcov prvej matice C ako počet riadkov druhej matice A

A + C - nedá sa, nie sú rovnakého typu

Pr. 3 – 59 / 3: Sú dané matice **A**, **B**. Určte **A² + B**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A.A - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice A

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 & 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -18 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -18 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3 & (-18) + 0 \\ (6 + (-1)) & 13 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -18 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Pr. 4: Sú dané matice **A**, **B**. Určte **A.B**, **B.A** .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

A.B - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice B

$$\begin{aligned} \mathbf{A.B} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pr. 4: Sú dané matice **A**, **B**. Určte **A.B**, **B.A** .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

B.A - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice B ako počet riadkov druhej matice A

$$\begin{aligned} \mathbf{B.A} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 6 & 4 + 0 & 2 - 12 \\ -1 + 8 & 2 + 0 & 1 + 16 \\ 2 + 6 & -4 + 0 & -2 + 12 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 4 & -10 \\ 7 & 2 & 17 \\ 8 & -4 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pr. 5 – 59 / 13: Sú dané matice **E**, **F**. Určte **E.F**, **F.E**.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

E.F - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice **E** ako počet riadkov druhej matice **F**

$$\mathbf{E.F} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 12 & 0 + (-4) \\ -6 + 9 & 0 + (-3) \\ -2 + 15 & 0 + (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -3 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$

F.E - sa nedá vypočítať, nie je rovnaký počet stĺpcov prvej matice **F** ako počet riadkov druhej matice **E**

Pr. 6 – 57 / 16: Sú dané matice **A**, **B**, **C**, **D**. Určte a) **A·B – D**, b) **C^T + C**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9-2 & 0+9+1 & 4-3+3 \\ 4+9-10 & 0+9+5 & 8-3+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 \\ 3 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 \\ 3 & 14 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-3 & 10-4 & 4-(-1) \\ 3-2 & 14-1 & 20-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 1 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}^T + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Dú: str. 59 – 60 / 4, 12, 14, 17

Vlastnosti matic:

Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice A typu $m \times n$ je počet nenulových riadkov matice A upravenej na trojuholníkový resp. lichobežníkový tvar. Označenie **$h(A)$** .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 43 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 3
 $h(A) = 3$

Ekvivalentné riadkové (stĺpcové) úpravy matice:

1. zmena poradia riadkov (stĺpcov),
2. vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu).

Dve matice A a B sú ekvivalentné, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných úprav.

Označenie **$A \sim B$** .

Postup pri určení hodnoti matice

1. vedieme **hlavnú diagonálu v matici** (od prvého prvku v prvom riadku zľava nadol doprava),
2. použijeme **ekvivalentné úpravy**, aby sme pod hlavnou diagonálou dostali nuly (postupne v jednotlivých stĺpcoch od prvého až po posledný upravujeme tak, aby pod číslami v diagonále boli nuly),
3. keď dostaneme pod hlavnou diagonálou len nuly, **spočítame nenulové riadky** (riadky, v ktorých je aspoň jedno číslo rôzne od nuly), **hodnota matice = počtu nenulových riadkov**

Pr. 7 – 61 / 25: Vypočítajte hodnotu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2R_1 \\ -5R_1 \\ -7R_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2R_2 \\ -2R_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 3

$$h(\mathbf{A}) = 3$$

Pr. 8 – 61 / 22: Vypočítajte hodnotu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +2R_1 \\ +R_1 \\ +R_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -R_2 \\ -2R_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 2

$$h(\mathbf{A}) = 2$$

Pr. 9: Vypočítajte hodnotu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -R_1 \\ -R_1 \\ -R_1 \\ -2R_1 \\ -2R_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -R_2 \\ -R_2 \\ -2R_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 3

$$h(\mathbf{A}) = 3$$