Matematika 1 – 9.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Priebeh funkcie

1. Definičný obor funkcie
2. Limity funkcie v krajných bodoch definičného oboru
3. Limity (jednostranné) v bodoch nespojitosti funkcie
4. Asymptoty grafu funkcie
5. Párnosť, nepárnosť funkcie
6. Monotónnosť funkcie
7. Lokálne extrémy funkcie
8. Intervaly konvexnosti a konkávnosti
9. Inflexné body funkcie
10. Graf funkcie

Pr. 2: 47 / 11 Vyšetrite priebeh funkcie.

$$y = x - \frac{1}{x}$$

1. D(f) = R - $\{0\}$
2. limity v krajných bodoch D(f) $\lim_{x \to \infty} x - \frac{1}{x} = \infty$ $\lim_{x \to -\infty} x - \frac{1}{x} = -\infty$
3. bod nespojitosti x = 0
4. ABS x = 0

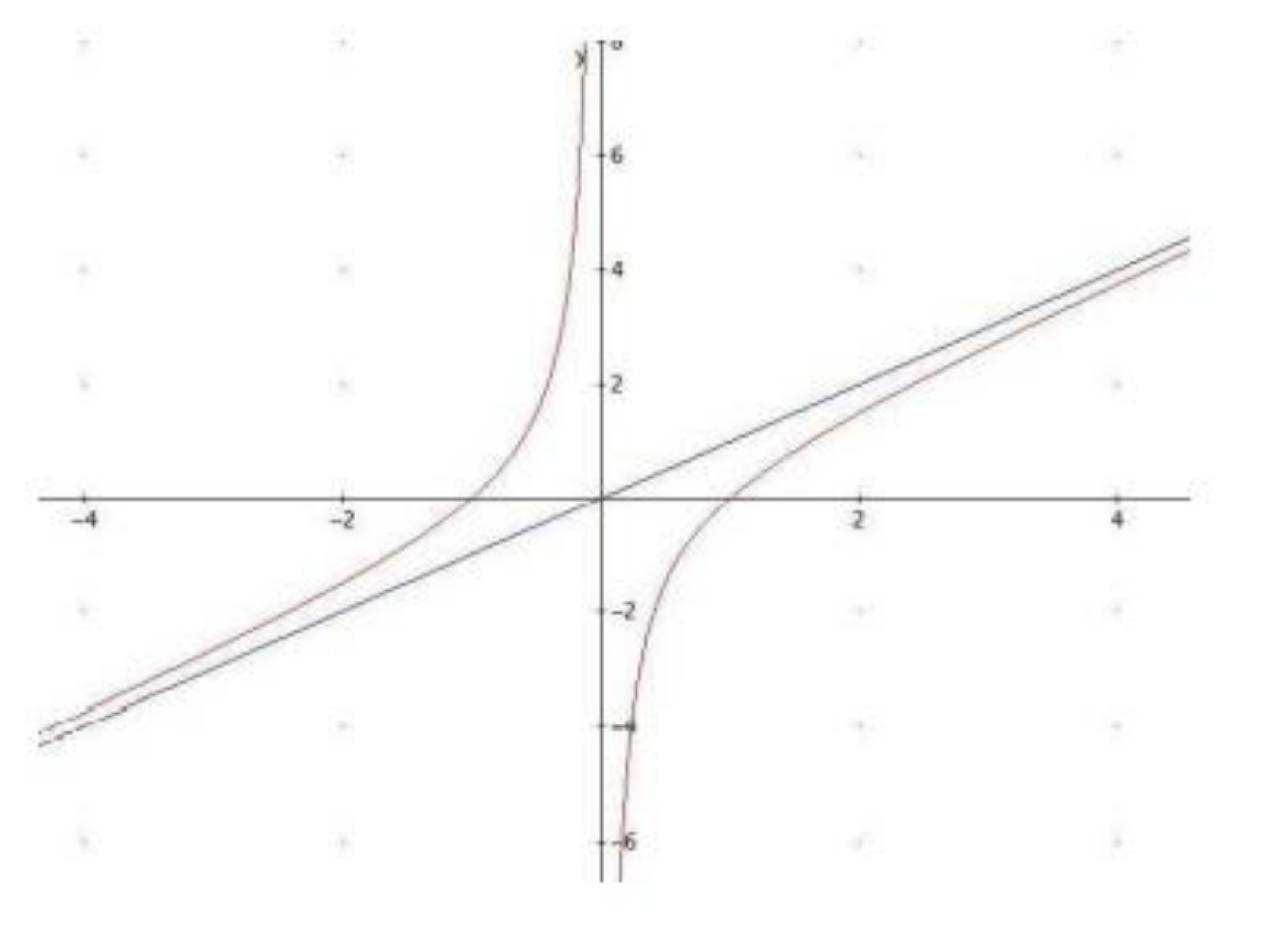
$$\lim_{x \to 0^+} x - \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} x - \frac{1}{x} = \infty$$

ASS y = x pre $x \to \pm\infty$

5. párnosť, nepárnosť

$$f(-x) = (-x) - \frac{1}{(-x)} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad je\ nepárna$$

6. rastie na (- ∞, 0), (0, ∞)
7. lokálne extrémy nemá
8. konvexná ∪ na (- ∞, 0), konkávna ∩ na (0, ∞),
9. inflexný bod nemá
10. priesečníky $y = 0, 0 = x - \frac{1}{x},\quad x = \frac{1}{x},\quad x^2 = 1,\quad x = \pm 1$



y
6
4
2
−2
−4
−6
−4
−2
2
4

Matice, operácie s maticami

Matica typu m × n (m riadky, n stĺpce)

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}}}^{n\text{ – stĺpce}} \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ a \end{array}}\right\} m\text{ - riadky}$$

skrátený zápis: $A = (a_{ij})$

$a_{i\,j}$ – prvok matice, kde i – itý riadok (i = 1, 2, 3, ... m)

j – itý stĺpec (j = 1, 2, 3, ... n)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matica 5×3, kde $a_{43} = 0$

Typy matíc:

Štvorcová matica - matica typu **n × n** (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Stĺpcový vektor - matica typu **n × 1** (matica s jedným stĺpcom)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Riadkový vektor - matica typu **1 × n** (matica s jedným riadkom)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matica k matici A - matica, ktorú získame tak, že v matici A typu m × n zameníme navzájom **riadky za stĺpce**, označenie ***A^T***

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Operácie s maticami:

Súčet (rozdiel) matíc je matica $\boldsymbol{C = A \pm B}$ **typu m × n**

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ i = 1, 2, . . . , m, j = 1, 2, . . . , n

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Sčítavať a odpočítavať je možné len matice rovnakého typu.

Násobenie matice konštantou je matica $\boldsymbol{C = k \,.\, A}$ **typu m × n**, kde k je konštanta

$c_{ij} = k\, a_{ij}$ i = 1, 2, . . . , m, j = 1, 2, . . . , n.

$$\boldsymbol{k.A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{k.a_{11}} & \boldsymbol{k.a_{12}} \\ \boldsymbol{k.a_{21}} & \boldsymbol{k.a_{22}} \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc je matica ***C* = *A* . *B*** **typu m × n**

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

kde i = 1, 2, . . . , m, j = 1, 2, . . . , n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Násobiť môžeme len vtedy, ak je počet stĺpcov prvej matice *A* **rovnaký** ako počet riadkov druhej matice *B. Výsledná matica má počet riadkov ako prvá matica A a počet stĺpcov ako druhá matica B.*

Součin matic $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ je

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5) & (1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6) \\ (4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5) & (4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

Pr. 1 – 59 / 1: Sú dané matice **A**, **B**. Určte a) 3.**A** - 2.**B**, b) **A**^{T}.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pr. 2: Sú dané matice **A**, **C**. Určte **A.C, C.A , A** + **C**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

A.C - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice C

C.**A** - nedá sa, nie je rovnaký počet stĺpcov prvej matice C ako počet riadkov druhej matice A

A + C - nedá sa, nie sú rovnakého typu

Pr. 3 – 59 / 3: Sú dané matice **A**, **B**. Určte **A²** + **B.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A.A - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice A

Pr. 4: Sú dané matice **A**, **B**. Určte **A.B, B.A** .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

A.B - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice B

B.A - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice B ako počet riadkov druhej matice A

Pr. 5 – 59 / 13: Sú dané matice **E**, **F**. Určte **E.F, F.E**.

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{F}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

E.F - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice E ako počet riadkov druhej matice F

$$\mathbf{E.F}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4+12 & 0+(-4) \\ -6+9 & 0+(-3) \\ -2+15 & 0+(-5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -3 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$

F.E - sa nedá vypočítať, nie je rovnaký počet stĺpcov prvej matice F ako počet riadkov druhej matice E

Pr. 6 – 57 / 16: Sú dané matice **A**, **B**, **C**, **D**. Určte a) **A.B – D,** b) $\mathbf{C}^T$ **+ C.**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 8\end{pmatrix}, \mathbf{D}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix};$$

a)

$$\mathbf{A.B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+9-2 & 0+9+1 & 4-3+3\\ 4+9-10 & 0+9+5 & 8-3+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 10 & 4\\ 3 & 14 & 20\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A.B}-\mathbf{D}=\begin{pmatrix}9 & 10 & 4\\ 3 & 14 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-3 & 10-4 & 4-(-1)\\ 3-2 & 14-1 & 20-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 6 & 5\\ 1 & 13 & 14\end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 8\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 16\end{pmatrix}$$

Dú: str. 59 – 60 / 4, 12, 14, 17

Vlastnosti matíc:

Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice A typu m × n je <u>počet nenulových riadkov matice A</u> upravenej na trojuholníkový resp. lichobežníkový tvar. Označenie **h(A)**.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 43 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 3

h(A) = 3

Ekvivalentné riadkové (stĺpcové) úpravy matice:

1. zmena poradia riadkov (stĺpcov),
2. vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu).

<u>Dve matice A a B sú ekvivalentné</u>, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných úprav.

Označenie **A ~ B.**

Postup pri určení hodnosti matice

1. vedieme **hlavnú diagonálu v matici** (od prvého prvku v prvom riadku zľava nadol doprava),
2. použijeme **ekvivalentné úpravy**, aby sme pod hlavnou diagonálou dostali nuly (postupne v jednotlivých stĺpcoch od prvého až po posledný upravujeme tak, aby pod číslami v diagonále boli nuly),
3. keď dostaneme pod hlavnou diagonálou len nuly, **spočítame nenulové riadky** (riadky, v ktorých je aspoň jedno číslo rôzne od nuly), hodnosť matice = počtu nenulových riadkov

Pr. 7 – 61 / 25: Vypočítajte hodnosť matice.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Pr. 8 – 61 / 22: Vypočítajte hodnosť matice.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +2R_1 \\ +R_1 \\ +R_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -2R_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 2

h(A) = 2

Dú: str. 59 – 60 / 4, 12, 14, 17, 20, 23, 24, 26