DERIVÁCIA FUNKCIE - aplikácie

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Ak $f'(x_0)$ existuje, tak dotyčnica ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $T[x_0, f(x_0)]$ má rovnicu

$$t: \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Definícia

Ak $f'(x_0) \neq 0$, tak normála ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $T[x_0, f(x_0)]$ má rovnicu

$$n: \; y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Definícia

Ak $f'(x_0)$ *existuje, tak dotyčnica ku grafu funkcie* $y = f(x)$ *v bode* $T[x_0, f(x_0)]$ *má rovnicu*

$$t: \ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Definícia

Ak $f'(x_0) \neq 0$*, tak normála ku grafu funkcie* $y = f(x)$ *v bode* $T[x_0, f(x_0)]$ *má rovnicu*

$$n: \ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Definícia

Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ *má na neprázdnej množine* $A_1 \subset A$ *deriváciu* f'*. Ak funkcia* f' *má na neprázdnej množine* $A_2 \subset A$ *deriváciu* $(f')'$*, tak túto funkciu nazývame druhou deriváciou funkcie* f *na množine* A_2 *a označujeme ju* f''*, t.j.* $f'' = (f')'$*. Podobným spôsobom môžeme definovať derivácie vyšších rádov* $n \geq 2$*.*

Pozn: Označenie s čiarkami používame obyčajne pre derivácie rádu $n \leq 3$, t.j. f', f'', f''', pre $n \geq 4$ používame označenie $f^{(n)}$.

Veta

Nech funkcie f, g majú derivácie v prstencovom okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nech platí jedna z podmienok

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$

Ak existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, tak existuje aj* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pozn.: Veta platí aj pre jednostranné limity.

Veta

Nech funkcia f $: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *nadobúda vo vnútornom bode c intervalu* $\langle a, b\rangle$ *najväčšiu (najmenšiu) hodnotu. Ak navyše funkcia f má v bode c deriváciu, tak* $f'(c) = 0$.

Veta (Rolleho veta)

Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

1. *Je spojitá na uzavretom intervale* $\langle a, b\rangle$.
2. *Má deriváciu na otvorenom intervale* (a, b).
3. *Platí* $f(a) = f(b)$.

Potom na otvorenom intervale (a, b) *existuje aspoň jeden bod* ξ *taký, že* $f'(\xi) = 0$.

Veta

Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ nadobúda vo vnútornom bode c intervalu $\langle a, b\rangle$ najväčšiu (najmenšiu) hodnotu. Ak navyše funkcia f má v bode c deriváciu, tak $f'(c) = 0$.

Veta (Rolleho veta)

Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

1. *Je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$.*
2. *Má deriváciu na otvorenom intervale (a, b).*
3. *Platí $f(a) = f(b)$.*

Potom na otvorenom intervale (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ taký, že $f'(\xi) = 0$.

Veta (Lagrangeova veta)

Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

1. *Je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$.*
2. *Má deriváciu na otvorenom intervale (a, b).*

Potom na otvorenom intervale (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ taký, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Definícia

Polynóm

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

sa nazýva Taylorov polynóm funkcie f v bode x_0 a označujeme ho $T_n(x)$.

Veta (Taylorova veta)

Nech funkcia f je v istom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 $(n+1)$-krát diferencovateľná. Potom pre bod $x \in O(x_0)$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

Definícia

Polynóm

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

sa nazýva Taylorov polynóm funkcie f v bode x_0 a označujeme ho $T_n(x)$.

Veta (Taylorova veta)

Nech funkcia f je v istom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 $(n+1)$-krát diferencovateľná. Potom pre bod $x \in O(x_0)$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$