Kapitola 9

Použitie derivácie funkcie

9.1 L'Hospitalovo pravidlo

Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej môžeme využiť aj pri výpočte niektorých typov limít, ktoré sú v tvare neurčitých výrazov. O týchto možnostiach výpočtu limít hovorí L'Hospitalovo pravidlo (veta 9.1).

Limitu podielu $\frac{f(x)}{g(x)}$ v nejakom bode vieme určiť pomocou viet pre počítanie s limitami. Použitie týchto viet ale nie je možné v nasledujúcich prípadoch:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

resp.

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty.$$

V týchto prípadoch hovoríme, že $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ je limitný typ (resp. neurčitý výraz):

$$\frac{0}{0}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Limity týchto typov je možné počítať rôznymi „fintami“, väčšinou sa zlomok upraví. Nie vždy je to jednoduché, navyše to robí študentom problémy. Ukážeme, ako je možné tieto 2 typy limít vypočítať jednoduchším spôsobom. Platí pre nich veta, ktorej sa hovorí *L'Hospitalovo pravidlo.*

Veta 9.1 (L'Hospitalovo pravidlo) Nech funkcie f: $y = f(x)$ a g: $y = g(x)$ majú derivácie v okolí bodu $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nech $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$. Ak existuje (vlastná alebo nevlastná) limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje aj limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{9.1}$$

Poznámka 9.1.1 L'Hospitalovo pravidlo platí aj pre jednostranné limity a aj limity v nevlastných bodoch. L'Hospitalovo pravidlo si môžeme zapamätať ľahko, ak si uvedomíme, že „limitné typy“, t. j. „neurčité výrazy“ majú tvar $\left[\frac{0}{0}\right]$ alebo $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$. Takéto typy limít počítame tak, že limitu podielu funkcií nahradíme limitou podielu ich derivácií.

Poznámka 9.1.2 Je potrebné si uvedomiť, že derivovanie sa urobí zvlášť v čitateli a zvlášť v menovateli, nie ako podiel funkcií $f(x)$ a $g(x)$. L'Hospitalovo pravidlo je možné použiť opakovane, kým sú splnené príslušné predpoklady vety 9.1.

Poznámka 9.1.3 Pri výpočte limít iných neurčitých výrazov sa nedá priamo použiť vyššie uvedené L'Hospitalovo pravidlo. Ukážeme ako je možné tieto neurčité výrazy malými úpravami previesť na typ $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ a použiť L'Hospitalovo pravidlo pri zachovaní predpokladov vety 9.1. Ide zväčša o neurčité výrazy typu $[0 \cdot \pm\infty]$, $[\infty - \infty]$, $\left[1^{\pm\infty}\right]$, $\left[\infty^0\right]$ a $\left[0^0\right]$.

Poznámka 9.1.4 Vždy sa musíme presvedčiť, či sú splnené predpoklady uvedených viet, lebo inak ľahko dôjde k chybným výsledkom. Napríklad formálnym použitím tohto pravidla dostaneme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1} = 0,$$

pričom správnym riešením je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x+1} = 1.$$

K nesprávnemu výsledku sme došli preto, že nebol splnený predpoklad:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Príklad 9.1.1 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x}.$$

Riešenie:
Vieme, že $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{e}^x - 1) = 0$ a aj $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. Teda limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}$ je typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Predpoklady vety 9.1 sú splnené, a teda platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\surd$

Príklad 9.1.2 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3}.$$

Riešenie:
Označme $f\colon y = \mathrm{e}^{2x}$ a $g\colon y = x^3$. Pretože $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$ a limity derivácií $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$, $f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x}$, $f'''(x) = 8\mathrm{e}^{2x}$, $g'(x) = 3x^2$ a $g''(x) = 6x$ sú taktiež nevlastné a ide o limitný typ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Tiež platí, že $g'''(x) = 6$. Použijeme vetu 9.1 a aplikujeme L'Hospitalovo pravidlo 3-krát za sebou. Dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{3x^2} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{6x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{8\mathrm{e}^{2x}}{6} \overset{\left[\frac{\infty}{6}\right]}{=} \infty.$$

$\surd$

Príklad 9.1.3 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Riešenie:
Aj v tomto prípade dostávame limitu typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Použijeme vetu 9.1 a dostávame:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x - \sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1 - \cos x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\cos x} \overset{\left[\frac{2}{1}\right]}{=} 2.$$

$\surd$

Uvedieme niektoré postupy pri výpočte limít:

Typ (1) $[0 \cdot \pm\infty]$: Nech limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ je typu $[0 \cdot \pm\infty]$. Potom upravíme výraz

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Potom za predpokladu, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, dostávame $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, ak všetky tieto limity existujú. Takouto úpravou sme získali limity typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ alebo $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$, na ktoré môžeme použiť vetu 9.1. Pozri príklady 9.1.4.

Typ (2) $[\infty - \infty]$: Nech limita $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x))$ je typu $[\infty - \infty]$. Potom upravíme výraz

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}.$$

Potom za predpokladu, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, dostávame

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}},$$

pričom predpokladám, že všetky uvedené limity existujú. Takouto úpravou sme získali limitu typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Pozri príklady 9.1.5.

Typ (3) $\left[1^{\pm\infty}\right]$, $\left[\infty^0\right]$ a $\left[0^0\right]$: Výraz $(f(x))^{g(x)}$ upravíme na neurčitý výraz typu $[0\cdot\pm\infty]$, za predpokladu, že $f(x) > 0$. Platí: $(f(x))^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}$. Potom pre limitu dostávame:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}.$$

Dostali sme limitu typu $[0\cdot\pm\infty]$. Na tento typ limity použijeme už vyššie popísaný postup [Typ (1)]. Pozri príklady 9.1.6 a 9.1.7.

Ukážky riešených príkladov s využitím L'Hospitalovho pravidla sú na stranách 136 – 139 v príkladoch 9.1.1 – 9.1.7.

Príklad 9.1.4 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)\cdot x.$$

Riešenie:
Vieme, že $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 0$ a $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. Dostávame neurčitý výraz $[0\cdot\infty]$, ale tento výraz nespĺňa podmienky vety 9.1. Preto výraz upravíme na neurčitý výraz typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Dostávame:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)\cdot x \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \overset{\left[\mathrm{e}^0\right]}{=} 1.$$

$\surd$

Príklad 9.1.5 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right).$$

Riešenie:
Limita je typu $[\infty - \infty]$, čo je neurčitý výraz, ktorý nespĺňa podmienky vety 9.1. Vieme tento výraz upraviť na typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ a potom budeme môcť použiť L'Hospitalovo pravidlo 9.1.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x - 1}{\cos x}\right) \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(\sin x-1)'}{(\cos x)'}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{-\sin x}\right) \overset{\left[\frac{0}{-1}\right]}{=} 0.$$

$\surd$

Príklad 9.1.6 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}.$$

Riešenie:
Táto limita je typu $[1^\infty]$. Postupne ju upravíme na typ $[0\cdot\infty]$ a potom na typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Potom už budeme môcť využiť L'Hospitalovo pravidlo 9.1.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}} \overset{[1^\infty]}{=} \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{3x}\cdot\ln(1+2x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3x}\cdot\ln(1+2x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{3x}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1+2x))'}{(3x)'}} =$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+2x)}\cdot 2}{3}} \overset{\left[\frac{2}{3}\right]}{=} \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}.$$

$\surd$

Príklad 9.1.7 Vypočítajte limitu:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

Riešenie:
Limita je typu $[\infty^0]$. Upravíme ju na limitu typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a potom použijeme vetu 9.1. Vieme, že $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$. Pre $x > 0$ platí rovnosť: $x^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}$.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \overset{[\infty^0]}{=} \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} \overset{\left[\frac{0}{1}\right]}{=} \mathrm{e}^0 = 1.$$

$\surd$

Poznámka 9.1.5 (O výpočte limít postupnosti L'Hospitalovým pravidlom) L'Hospitalovo pravidlo je možné niekedy použiť na výpočet limít postupností. Vyplýva to priamo z Heineho definície limity funkcie, lebo platí implikácia:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = A.$$

POZOR! Obrátená implikácia **neplatí**. Limita postupnosti $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ môže existovať i keď $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje. Napríklad pre funkciu $f(x) = \sin(\pi x)$ je $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, ale $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(\pi x)$ neexistuje.