Kapitola 10

Priebeh funkcie

Pojem priebehu funkcie nie je žiadnym presným matematickým pojmom ako napríklad pojem limity či derivácie funkcie. V tejto kapitole sa pokúsime zaujať praktické hľadisko. Chceme sa naučiť ako prehľadne popísať podstatné vlastností funkcií, najmä takých, s ktorými sa môžeme stretnúť pri aplikáciách.

10.1 Derivácia a vlastnosti funkcie

Nasledujúce vety a pojmy nám poslúžia pri vyšetrovaní priebehu funkcie. Na základe nich budeme môcť rozhodnúť o dôležitých bodoch a vlastnostiach skúmanej funkcie. Pri vyšetrovaní funkcie nás zaujíma monotónnosť funkcie, t. j. hľadáme intervaly najväčšej dĺžky, kde je daná funkcia rýdzomonotónna, resp. nerastúca alebo neklesajúca. Tiež nás budú zaujímať najväčšia a najmenšia hodnota funkcie f na celom jej definičnom obore $\mathcal{D}(f)$. Tieto hodnoty budeme nazývať **absolútne extrémy** funkcie f. Ak určíme extrém len v nejakom jeho okolí, tak budeme hovoriť o **lokálnych extrémoch** funkcie f. Tiež sa budeme zaujímať o intervaly, kde je funkcia konkávna, resp. konvexná, či funkcia má asymptoty a aké má vlastnosti v okolí bodov nespojitosti, ak také body funkcia f má.

Dôsledkom Lagrangeovej vety 8.5 je nasledujúca veta 10.1, ktorá hovorí o monotónnosti funkcie na intervale I.

Veta 10.1 Nech funkcia $f\colon y = f(x)$ je spojitá na intervale I a má deriváciu vo všetkých vnútorných bodoch intervalu I. Potom platí:

(1) Ak funkcia f je na intervale I neklesajúca, tak $f'(x) \geqq 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I.

(2) Ak funkcia f je na intervale I nerastúca, tak $f'(x) \leqq 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I.

(3) Ak funkcia f je na intervale I rastúca, tak $f'(x) \geqq 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I a f' je nenulová na každom otvorenom podintervale intervalu I.

(4) Ak funkcia f je na intervale I klesajúca, tak $f'(x) \leqq 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I a f' je nenulová na každom otvorenom podintervale intervalu I.

Veta 10.2 Nech funkcia $f\colon y = f(x)$ je spojitá na intervale I a má deriváciu vo všetkých vnútorných bodoch intervalu I. Potom platí:

(1) ak $f'(x) > 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I, tak f je rastúca na intervale I,

(2) ak $f'(x) < 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I, tak f je klesajúca na intervale I,

(3) ak $f'(x) \geqq 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I, tak f je neklesajúca na intervale I,

(4) ak $f'(x) \leqq 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I, tak f je nerastúca na intervale I.

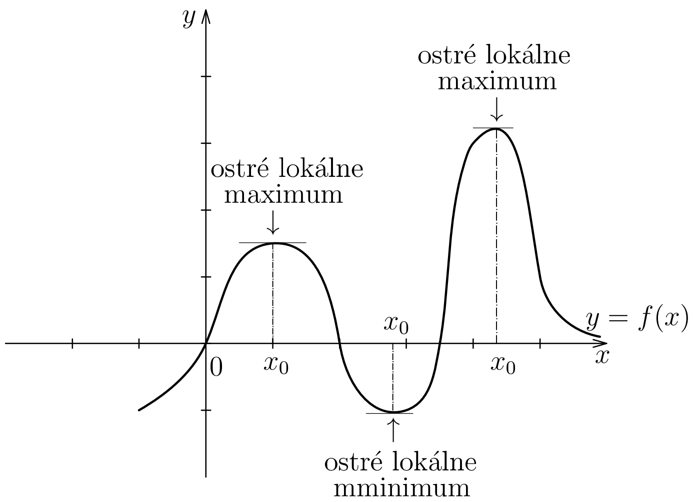
Definícia 10.1 Hovoríme, že funkcia $f\colon y = f(x)$ má vo vnútornom bode $x_0 \in I$, kde $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, **lokálne maximum**, ak existuje okolie bodu x_0 také, že pre všetky body z tohoto okolia platí: $f(x) \leqq f(x_0)$.

Hovoríme, že funkcia $f\colon y = f(x)$ má vo vnútornom bode $x_0 \in I$, kde $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, **lokálne minimum**, ak existuje okolie bodu x_0 také, že pre všetky body z tohoto okolia platí: $f(x) \geqq f(x_0)$.

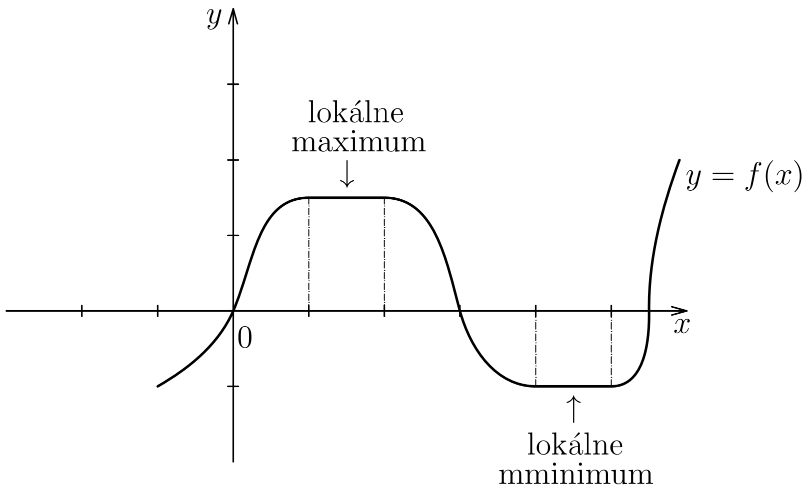
Hovoríme, že funkcia $f\colon y = f(x)$ má vo vnútornom bode $x_0 \in I$, kde $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, **ostré lokálne maximum**, ak existuje okolie bodu x_0 také, že pre všetky body z tohoto okolia platí: $f(x) < f(x_0)$.

Hovoríme, že funkcia $f\colon y = f(x)$ má vo vnútornom bode $x_0 \in I$, kde $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, **ostré lokálne minimum**, ak existuje okolie bodu x_0 také, že pre všetky body z tohoto okolia platí: $f(x) > f(x_0)$.

Hovoríme, že bod x_0 je **stacionárny bod** funkcie $f\colon y = f(x)$, ak existuje $f'(x_0)$ a platí: $f'(x_0) = 0$.



Obr. 10.1: Ostré lokálne extrémy.



Obr. 10.2: Neostré lokálne extrémy.

Veta 10.3 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému) Nech existuje $f'(x_0)$. Ak funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém, tak $f'(x_0) = 0$. [1]

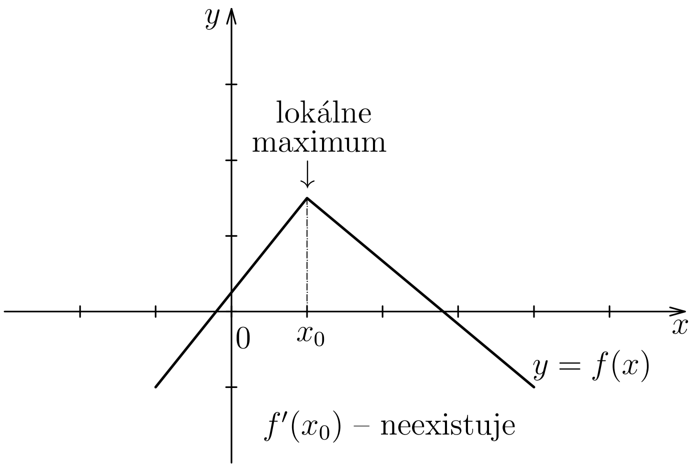
Veta 10.4 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech $f'(x_0) = 0$ a súčasne $f''(x_0) \neq 0$. Potom funkcia f má v bode x_0 ostrý lokálny extrém. Ak navyše vieme, že $f''(x_0) < 0$, tak v bode x_0 má funkcia f ostré lokálne maximum a ak $f''(x_0) > 0$, tak v bode x_0 má funkcia f ostré lokálne minimum.

Veta 10.5 Nech funkcia f je definovaná a spojitá v okolí bodu x_0. Ak existuje také okolie bodu x_0, že v ľavom okolí bodu x_0 je funkcia f rastúca a v pravom okolí bodu x_0 je funkcia f klesajúca, tak funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne maximum. Ak existuje také okolie bodu x_0, že v ľavom okolí bodu x_0 je funkcia f klesajúca a v pravom okolí bodu x_0 je funkcia f rastúca, tak funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Poznámka 10.1.1 Lokálne maximá a lokálne minimá nazývame spoločne lokálne extrémy funkcie. Ukážka ostrých lokálnych extrémov je na obrázku 10.1. Príklad neostrého lokálneho maxima, resp. neostrého lokálneho minima funkcie f v bode x_0 je zobrazený na obrázku 10.2. Na základe vety 10.3 vieme, že funkcia f môže mať lokálny extrém len v tých bodoch, v ktorých sa derivácia funkcie f rovná nule alebo v ktorých derivácia neexistuje. Pozri obrázok 10.3.

[1] Podmienka $f'(x_0) = 0$ je len nutnou podmienkou pre existenciu lokálneho extrému. Z tejto podmienky nevyplýva automaticky, že funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém.

Funkcia f môže mať lokálny extrém aj v bodoch, ktoré nie sú stacionárnymi bodmi funkcie f, t. j. aj v bodoch, v ktorých funkcia f nemá deriváciu.



Obr. 10.3: Existencia extrému funkcie f v bode, v ktorom neexistuje jej derivácia.

Definícia 10.2 Funkcia $f\colon y = f(x)$ sa nazýva **konvexná** na intervale $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak pre každú trojicu bodov $x_1, x_2, x_3 \in I$ takú, že $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $[x_2, f(x_2)]$ pod priamkou, ktorá je určená bodmi $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$, alebo leží na tejto priamke.

Funkcia $f\colon y = f(x)$ sa nazýva **konkávna** na intervale $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak pre každú trojicu bodov $x_1, x_2, x_3 \in I$ takú, že $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $[x_2, f(x_2)]$ nad priamkou, ktorá je určená bodmi $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$, alebo leží na tejto priamke.

Funkcia $f\colon y = f(x)$ sa nazýva **rýdzo konvexná** na intervale $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak pre každú trojicu bodov $x_1, x_2, x_3 \in I$ takú, že $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $[x_2, f(x_2)]$ pod priamkou, ktorá je určená bodmi $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$.

Funkcia $f\colon y = f(x)$ sa nazýva **rýdzo konkávna** na intervale $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak pre každú trojicu bodov $x_1, x_2, x_3 \in I$ takú, že $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $[x_2, f(x_2)]$ nad priamkou, ktorá je určená bodmi $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$.

Veta 10.6 Nech funkcia $f\colon y = f(x)$ má deriváciu f' vo všetkých vnútorných bodoch intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Ak pre každú dvojicu bodov $x_0, x_1 \in I$ takú, že $x_0 \neq x_1$, leží bod $[x_1, f(x_1)]$ nad dotyčnicou ku grafu funkcie f v bode $T = [x_0, f(x_0)]$, tak funkcia f je rýdzo konvexná.

Veta 10.7 Nech funkcia $f\colon y = f(x)$ má deriváciu f' vo všetkých vnútorných bodoch intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Ak pre každú dvojicu bodov $x_0, x_1 \in I$ takú, že $x_0 \neq x_1$, je bod $[x_1, f(x_1)]$ pod dotyčnicou ku grafu funkcie f v bode $T = [x_0, f(x_0)]$, tak funkcia f je rýdzo konkávna.

Veta 10.8 (Postačujúca podmienka konvexnosti resp. konkávnosti) Nech funkcia $f\colon y = f(x)$ je spojitá na intervale I a má druhú deriváciu vo všetkých vnútorných bodoch intervalu I. Potom platí:

(1) ak $f''(x) > 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I, tak funkcia f je na intervale I rýdzo konvexná,

(2) ak $f''(x) < 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I, tak funkcia f je na intervale I rýdzo konkávna,

(3) ak $f''(x) \geqq 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I, tak funkcia f je na intervale I konvexná,

(4) ak $f''(x) \leqq 0$ pre každý vnútorný bod intervalu I, tak funkcia f je na intervale I konkávna.

Definícia 10.3 Nech funkcia $f\colon y = f(x)$ je spojitá na intervale $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Bod $x_0 \in I$ nazývame **inflexným bodom** funkcie f, ak funkcia f je v nejakom ľavom okolí bodu x_0 rýdzo konkávna (rýdzo konvexná) a v nejakom pravom okolí bodu x_0 je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna).

Veta 10.9 (Nutná podmienka pre inflexný bod) Nech existuje $f''(x_0)$. Ak bod x_0 je inflexným bodom funkcie f, tak platí $f''(x_0) = 0$. [2]

Veta 10.10 (Postačujúca podmienka pre inflexný bod) Nech pre funkciu $f\colon y = f(x)$ platí: $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom funkcia f má v bode x_0 inflexný bod.

Veta 10.11 (Zovšeobecnené podmienky pre lokálny extrém a inflexný bod) Uvažujme funkciu $f\colon y = f(x)$, ktorá má vo vnútornom bode x_0 intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ nenulovú n-tú deriváciu $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pre $n \geqq 2$. Nech $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-2)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Potom platí:

(1) Ak n je párne číslo a $f^{(n)}(x_0) > 0$, tak funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

(2) Ak n je párne číslo a $f^{(n)}(x_0) < 0$, tak funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

(3) Ak n je nepárne číslo, tak funkcia f má v bode x_0 inflexný bod.

10.2 Vyšetrenie priebehu funkcie

V závere tejto kapitoly môžeme zhrnúť všetky predchádzajúce poznatky do jedného celku pri vyšetrovaní priebehu funkcie jednej reálnej premennej. Ak chceme prehľadne uviesť a zapísať základné vlastnosti funkcií, s ktorými je nutné pracovať v rôznych disciplínach, je potrebné využiť diferenciálny počet a ďalšie poznatky z matematickej analýzy, pričom sa stačí sústrediť na týchto pár bodov:

(1) Vlastnosti, ktoré vyplývajú a súvisia priamo s definičným oborom funkcie f. Skúmame párnosť, nepárnosť, periodickosť, body nespojitosti, nulové body a limity v krajných bodoch definičného oboru funkcie f.

[2] Podmienka $f''(x_0) = 0$ je nutná podmienka pre existenciu inflexného bodu. Z tejto podmienky automaticky nevyplýva, že bod x_0 je inflexným bodom funkcie f.

(2) Vlastnosti, ktoré vyplývajú z prvej derivácie funkcie f. Určíme intervaly monotónnosti, stacionárne body a lokálne extrémy funkcie f.

(3) Vlastnosti, ktoré vyplývajú z druhej derivácie funkcie f. Určíme intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body funkcie f.

(4) Zistíme všeobecné rovnice asymptôt so smernicou a asymptôt bez smernice ku grafu funkcie f.

(5) Načrtneme graf funkcie f na základe zistených vlastností funkcie f vo vyššie popísaných bodoch (1) až (4).

Uvedieme stručný postup vyšetrovania priebehu funkcie, aby sme na žiadnu vlastnosť funkcie f nezabudli:

(1) Určíme definičný obor funkcie f: $\mathcal{D}(f) = \{\dots\}$.

(2) Určíme body nespojitosti (BN) funkcie f: $BN = \{\dots\}$.

(3) Určíme nulové body (NB) funkcie f: $NB = \{\dots\}$.

(4) Vypočítame prvú deriváciu funkcie f: $y' = f'(x)$.

(5) Vypočítame druhú deriváciu funkcie f: $y'' = f''(x)$.

(6) Určíme stacionárne body (SB) funkcie f vyriešením rovnice $f'(x) = 0$: $SB = \{\dots\}$.

(7) Určíme inflexné body (IB) funkcie f vyriešením rovnice $f''(x) = 0$: $IB = \{\dots\}$.

(8) Určíme intervaly monotónnosti funkcie f vyriešením nerovníc $f'(x) < 0$ – funkcia je klesajúca a $f'(x) > 0$ – funkcia je rastúca.

(9) Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f vyriešením nerovníc $f''(x) < 0$ – funkcia je konkávna a $f''(x) > 0$ – funkcia je konvexná.

(10) Určíme lokálne extrémy funkcie f v stacionárnych bodoch funkcie f a bodoch, v ktorých prvá derivácia funkcie f nie je definovaná pomocou nerovností: $f''(x_i) > 0$, kde $x_i \in SB$ – funkcia f má v bode x_i lokálne minimum a $f''(x_i) < 0$, kde $x_i \in SB$ – funkcia f má v bode x_i lokálne maximum.

(11) Vypočítame limity v krajných bodoch definičného oboru, asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou.

(12) Vytvoríme tabuľku, v ktorej prehľadne vyznačíme všetky zistené vlastnosti.

(13) Nakreslíme graf funkcie f. Postupujeme tak, že najprv nakreslíme do súradnicového systému všetky asymptoty, potom všetky dôležité body (BN, NB, SB, IB) a nakoniec postupne načrtneme graf funkcie f zľava doprava.

Návod je možné nájsť aj v riešených príkladoch 10.3.8 a 10.3.9 na stranách 159 a 163.

10.3 Absolútne extrémy

Definícia 10.4 Nech je daná funkcia f s definičným oborom $\mathcal{D}(f)$. Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ **absolútne maximum**, ak pre všetky $x \in \mathcal{D}(f)$ platí: $f(x) \leqq f(x_0)$. Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ **absolútne minimum**, ak pre všetky $x \in \mathcal{D}(f)$ platí: $f(x) \geqq f(x_0)$. Absolútne minimum a absolútne maximum funkcie f nazývame **absolútne extrémy** funkcie f.

Popíšeme postup zisťovania najväčšej a najmenšej hodnoty spojitej funkcie f na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$. Nech je daná funkcia f s definičným oborom $\mathcal{D}(f)$ a nech f je spojitá na $\langle a, b\rangle \subseteq \mathcal{D}(f)$.

(1) Vypočítame stacionárne body funkcie f. Nech sú to body $x_1, \dots, x_n$.

(2) Vypočítame v týchto bodoch $x_1, \dots, x_n$ a v koncových bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$ funkčné hodnoty funkcie f, t. j. $f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

(3) Určíme najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ („m“ a „M“), kde $m = \min\{f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$ a $M = \max\{f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$. Dostali sme absolútne minimum m funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a absolútne maximum M funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 10.3.1 Ak je interval otvorený, tak absolútne extrémy funkcie f na intervale (a, b) nemusia existovať. Ak absolútne extrémy existujú, tak je to vždy najväčšia hodnota z lokálnych maxím funkcie f na (a, b) a najmenšia hodnota z lokálnych miním funkcie f na (a, b). Tento postup nebude vo všeobecnosti použiteľný aj v prípade, ak by sme vynechali podmienku spojitosti funkcie f. Pozri príklad 10.3.4 na strane 157.

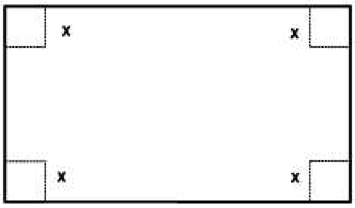
Pri riešení akýchkoľvek slovných úloh na extrémy, je potrebné popísať reálnu situáciu matematickým aparátom, teda určiť matematický model. Zo zadania úlohy je potrebné pomenovať nezávislú premennú a definovať funkciu závislú na jednej reálnej premennej presným pravidlom, t. j. funkčným predpisom.[3] Potom je potrebné rozhodnúť, aký druh extrému máme počítať a naozaj ukázať, že nájdené extrémy sú riešením uvažovanej reálnej situácie. Najčastejšie ide o absolútne extrémy na vhodne určenej množine. Pozri riešený príklad 10.3.5.

Príklad 10.3.1 Obdĺžnikový kus plechu má rozmery 60 cm a 28 cm. V rohoch odrežeme štvorce a zvyšok ohneme tak, že vznikne otvorená krabica. Aká veľká musí byť strana odrezaných štvorcov, aby objem krabice bol maximálny?

Riešenie:
Ak x je veľkosť strán odrezaných štvorcov (pozri obr. 10.4), tak objem je vyjadrený rovnicou

$$V = (60 - 2x) \cdot (28 - 2x) \cdot x.$$

[3] Niekedy je možné uvažovať aj funkciu jednej reálnej premennej s reálnym parametrom, resp. reálnymi parametrami.



Obr. 10.4: Zobrazenie výrezov na obdĺžnikovom plechu.

Máme nájsť absolútne maximum funkcie

$$V(x) = (60 - 2x) \cdot (28 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 176x^2 + 1680x,$$

pre $x \in (0, 14)$ (skúste sa zamyslieť, prečo je tomu tak). Zderivujeme funkciu $V(x)$ a položíme prvú deriváciu rovnú nule. Dostávame

$$V'(x) = 4 \cdot (3x^2 - 88x + 420) = 0.$$

Stacionárne body sú:

$$x_1 = 6 \in (0, 14) \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{70}{3} \notin (0, 14).$$

Vypočítame druhú deriváciu a dosadíme do nej hodnotu $x = 6$.

$$V''(x) = 8(3x - 44).$$

$$V''(6) = -208 < 0.$$

odtiaľ dostávame, že funkcia má v čísle 6 absolútne maximum $V(6) = 4\,608$. Hodnota funkcie v krajných bodoch intervalu je $V(0) = V(14) = 0$. Zistili sme, že ak veľkosť strany odrezaného štvorca je 6 cm, tak objem krabice $V = 4\,608$ cm^3 je maximálny. $\checkmark$

Príklad 10.3.2 Určte intervaly, na ktorých sú funkcie f a g rýdzomonotónne, ak

a) $f : y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 12$,

b) $g : y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

Riešenie:

a) Definičným oborom funkcie f je množina všetkých reálnych čísel, t. j. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a je spojitá na svojom definičnom obore. Hľadáme také intervaly $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ maximálnej dĺžky, kde je prvá derivácia kladná, resp. záporná. Vypočítame deriváciu funkcie f. $y' = 6x^2 + 6x - 12$.

1. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (x^2 + x - 2) > 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot (x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$,
2. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 < 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (x^2 + x - 2) < 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot (x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$.

Záver: Funkcia f je rastúca na intervaloch $(-\infty, -2)$ a $(1, \infty)$. Funkcia f je klesajúca na intervale $(-2, 1)$.

b) Definičným oborom funkcie g je množina všetkých reálnych čísel, t. j. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a je spojitá na svojom definičnom obore. Hľadáme také intervaly $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ maximálnej dĺžky, kde je prvá derivácia kladná, resp. záporná. Derivácia funkcie g je

$$y' = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x} + x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (2 - x)$$

.

1. $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (2-x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot (2-x) > 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (2 - x > 0)] \vee [(x < 0) \wedge (2 - x < 0)] \Leftrightarrow x \in (0, 2)$,
2. $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (2-x) < 0 \Leftrightarrow x \cdot (2-x) < 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (2 - x < 0)] \vee [(x < 0) \wedge (2 - x > 0)] \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Záver: Funkcia g je rastúca na intervale $(0, 2)$. Funkcia g je klesajúca na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$.

$\surd$

Príklad 10.3.3 Určte lokálne extrémy funkcie f:

$$f : y = -x^4 + 2x^2 + 3.$$

Riešenie:
Definičný obor funkcie f je množina všetkých reálnych čísel, keďže f je polynomická funkcia štvrtého stupňa, t. j. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, \infty)$. Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie f, t. j. $y' = -4x^3 + 4x$ a $y'' = -12x^2 + 4$. Vieme, že $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow -4x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$ alebo $x_3 = -1$. Body x_1, x_2 a x_3 sú stacionárnymi bodmi funkcie f a v týchto bodoch funkcia f môže mať extrém. Na základe druhej derivácie a vety 10.4 dostávame:
$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ v bode $[0, 3]$ má funkcia f lokálne minimum,
$f''(1) = -8 < 0 \Rightarrow$ v bode $[1, 4]$ má funkcia f lokálne maximum,
$f''(-1) = -8 < 0 \Rightarrow$ v bode $[-1, 4]$ má funkcia f lokálne maximum. $\surd$

Príklad 10.3.4 Je daná funkcia f:

$$f : y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1.$$

Určte absolútne extrémy funkcie f na uzavretom intervale $\langle -2, 4 \rangle$.

Riešenie:
Funkcia f je kubická funkcia s definičným oborom $\mathcal{D}(f) = (-\infty, \infty)$. Funkcia f je na intervale $\langle -2, 4\rangle \subseteq \mathcal{D}(f)$ spojitá, teda môžme použiť postup pre hľadanie absolútnych extrémov spojitej funkcie na uzavretom intervale. Vypočítame lokálne extréme funkcie f na $\langle -2, 4\rangle$. Vypočítame prvú deriváciu funkcie f: $y' = 6x^2 - 6x - 12$. Vieme, že $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$, alebo $x_2 = 2$. Stacionárne body x_1, x_2 funkcie f patria do intervalu $\langle -2, 4\rangle$, preto aj v nich vypočítame funkčné hodnoty.
$f(-1) = 8$, $f(2) = -19$, $f(-2) = -3$ a $f(4) = 33$. Usporiadame tieto hodnoty a dostávame: $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(4)$. Preto najväčšou hodnotou funkcie f na intervale $\langle -2, 4\rangle$ je 33 a najmenšou hodnotou funkcie f na intervale $\langle -2, 4\rangle$ je -19. Odtiaľ ľahko vidieť, že absolútne minimum f na $\langle -2, 4\rangle$ je v bode $x = 2$ a absolútne maximum f na $\langle -2, 4\rangle$ je v bode $x = 4$. $\surd$

Príklad 10.3.5 Usilovný, šikovný a solventný študent externého štúdia Leteckej fakulty sa rozhodol, že si postaví v záhrade rodičov bazén v tvare pravouhlého rovnobežnostena s objemom 200 m^3. Dĺžka bazéna má byť štyrikrát väčšia než jeho šírka. Tiež vieme, že 1 m^2 dna je dvakrát lacnejší ako 1 m^2 bočnej steny. Aké musia byť rozmery bazéna, aby pre majiteľa bola výstavba bazéna čo najlacnejšia?

Riešenie:

(1) Pomocné úvahy $\rightarrow$ matematizácia $\rightarrow$ rozbor úlohy (prípadne je vhodné urobiť si náčrt situácie): Vieme, že ide o kváder, ktorého rozmery označme nasledovne:
d – dĺžka, š – šírka a v – výška.
Pre objem kvádra platí: $V = d \cdot \check{s} \cdot v$ a súčasne objem bazéna poznáme, t. j. $V = 200\text{m}^3$.
Odtiaľ dostávame, že $200 = d \cdot \check{s} \cdot v \wedge d = 4\check{s} \Rightarrow 200 = 4\check{s}^2 \cdot v \Rightarrow v = \frac{50}{\check{s}^2}$.
cena 1 m^2 dna stojí ... c – známa reálna konštanta
cena 1 m^2 bočnej steny stojí ... $2c$
cena celého bazénu sa dá vyjadriť v tvare: $C = d \cdot \check{s} \cdot c + 2 \cdot (d \cdot v + v \cdot \check{s}) \cdot 2c$.
Do výrazu C dosadíme za $d = 4\check{s}$ a $v = \frac{50}{\check{s}^2}$ a dostávame: $C = c \cdot \left(4\check{s}^2 + \frac{1000}{\check{s}}\right)$.

(2) Matematický model $\rightarrow$ extrém funkcie jednej reálnej premennej: Ak sa pozrieme na výraz C, tak vidíme, že tam figuruje len jediná premenná, ktorú nepoznáme. Preto šírka bazéna š je nezávislou premennou, pri voľbe ktorej vieme vyčísliť náklady na výstavbu bazéna.

(3) Definícia funkcie $\rightarrow$ funkčný predpis a definičný obor: Funkčný predpis má tvar:
C: $y = C(\check{s}) = c \cdot \left(4\check{s}^2 + \frac{1000}{\check{s}}\right)$,
kde c je reálna konštanta a $\mathcal{D}(C) = \mathbb{R}^+$.

(4) Chceme vypočítať lokálne minimum funkcie $C(\check{s})$. Funkcia C je spojitá na svojom definičnom obore a krajné body nepatria do definičného oboru. Stacionárne body funkcie $C(\check{s})$ určíme pomocou prvej derivácie, t. j. $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\check{s}} = 0$.

$\Big[C'(\check{s}) = \Big(c \cdot \Big(4\check{s}^2 + \frac{1000}{\check{s}}\Big)\Big)' = c \cdot \Big(8\check{s} - \frac{1000}{\check{s}^2}\Big) \Rightarrow C'(\check{s}) = 0\Big] \Leftrightarrow \Big[c \cdot \Big(8\check{s} - \frac{1000}{\check{s}^2}\Big) = 0 \Rightarrow$ $\check{s}^3 = 125\big] \Rightarrow$ stacionárnym bodom je bod $\check{s} = 5$ m.
$C''(\check{s}) = \Big(c \cdot \Big(8\check{s} - \frac{1000}{\check{s}^2}\Big)\Big)' = c \cdot \Big(8 + \frac{2000}{\check{s}^3}\Big) \Rightarrow C''(5) > 0$, ak c je kladná konštanta. Preto funkcia C má v bode $\check{s} = 5$ lokálne minimum.

Záver: Stavba bazéna bude za uvedených podmienok najlacnejšia, ak rozmery bazéna budú: dĺžka $d = 20$ m, šírka $\check{s} = 5$ m a výška $v = 2$ m. $\surd$

Príklad 10.3.6 Zistite, na ktorých intervaloch je funkcia $f\colon y = x^3 - 3x$ konvexná a konkávna. Určte inflexné body funkcie f.

Riešenie:
Funkcia f je kubická funkcia (polynomická funkcia tretieho stupňa) s definičným oborom $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Určíme prvú a druhú deriváciu funkcie f:
$f'(x) = 3x^2 - 3$,
$f''(x) = 6x$. Pre druhú deriváciu funkcie f platí: $f''(x) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$ a $f''(x) < 0$ pre $x \in (-\infty, 0)$. Preto funkcia f je konkávna na intervale $(-\infty, 0)$ a konvexná na $(0, \infty)$. Tiež vieme, že $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bod $[0, 0]$ je inflexným bodom funkcie f. $\surd$

Príklad 10.3.7 Ukážte, že funkcia $f\colon y = \ln x$ je konkávna na $\mathcal{D}(f)$.

Riešenie:
Definičným oborom funkcie f je množina kladných reálnych čísel, t. j. $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$. Máme ukázať, že druhá derivácia funkcie f je záporná na celom definičnom obore $\mathcal{D}(f)$.
$f'(x) = \frac{1}{x}$,
$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pre všetky $x \in \mathcal{D}(f)$.
Funkcia $f\colon y = \ln x$ je konkávna na celom definičnom obore $\mathcal{D}(f)$. $\surd$

Príklad 10.3.8 Vyšetrite priebeh funkcie f, ak

$$f : y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Riešenie:
Definičný obor funkcie f je množina $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Body nespojitosti sú $x = -1$ a $x = 1$, t. j. $BN = \{-1, 1\}$. Vypočítame nulové body funkcie f, t. j. vyriešime rovnicu $f(x) = 0$.

$$x + \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x + x^3 - x}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x \cdot (x^2 + 1)}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Nulovým bodom funkcie f je bod $O = [0, 0]$. Graf funkcie f pretína os o_x v tomto bode O. $NB = \{0\}$. Overíme párnosť, resp. nepárnosť funkcie f:

$$f(-x) = (-x) + \frac{-2x}{(-x)^2 - 1} = -\left(\frac{2x}{x^2 - 1} + x\right) = -f(x).$$

To znamená, že funkcia f je nepárna a jej graf je stredovo symetrický podľa bodu $O = [0,0]$. Funkcia f nie je periodická.

Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie f. Tieto derivácie nám poslúžia pri zisťovaní monotónnosti funkcie f a rozhodovaní o konvexnosti a konkávnosti.

$y' = \left(x + \dfrac{2x}{x^2-1}\right)' = \dfrac{2\cdot(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2} + 1 = \dfrac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}.$

$y'' = \left(\dfrac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}\right)' = \dfrac{4x\cdot(-x^2+1+2x^2+2)}{(x^2-1)^3} = \dfrac{4x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$

Určíme stacionárne a inflexné body funkcie f. Riešime rovnice $f'(x) = 0$ a $f''(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^4-4x^2-1 = 0 \Leftrightarrow t^2-4t-1 = 0$, subst. $t = x^2 \Leftrightarrow$

$t_{1,2} = \dfrac{4\pm\sqrt{16+4}}{2} \Rightarrow t_1 = 2+\sqrt{5}$ a $t_2 = 2-\sqrt{5} \Rightarrow x_1^2 = 2+\sqrt{5},\ x_2^2 = 2-\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_1| = \sqrt{2+\sqrt{5}},\ |x_2| = \sqrt{2-\sqrt{5}} \Rightarrow\Rightarrow SB = \left\{\sqrt{2+\sqrt{5}}, -\sqrt{2+\sqrt{5}}\right\}.$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ inflexný bod je bod $[0,0] \Rightarrow IB = \{0\}$.

Určíme monotónnosť funkcie f: ak $f'(x) > 0$, tak funkcia f je rastúca, a ak $f'(x) < 0$, tak funkcia f je klesajúca.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow x^4-4x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{5}}\right) \cup \left(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \infty\right) \Rightarrow$ funkcia f je rastúca na intervaloch $\left(-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)$ a $\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \infty\right)$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} < 0 \Leftrightarrow x^4-4x^2-1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2+\sqrt{5}}\right) - \{\pm 1\} \Rightarrow$ funkcia f je klesajúca na intervaloch $\left(-\sqrt{2+\sqrt{5}}, -1\right)$ a $(-1,1)$ a $\left(1, \sqrt{2+\sqrt{5}}\right)$.

Určíme lokálne extrémy funkcie$f$. Funkcia môže mať lokálny extrém v stacionárnych bodoch. Vypočítame hodnoty druhej derivácie funkcie f v bodoch $x \in SB$. $f''(-\sqrt{2+\sqrt{5}}) < 0$ a $f''(\sqrt{2+\sqrt{5}}) > 0 \Rightarrow$ funkcia f má v bodoch A a B lokálne extrémy a to:

$A = \left[-\sqrt{2+\sqrt{5}}, -\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1}\right]$ lokálne maximum a

$B = \left[\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1}\right]$ lokálne minimum.

Zistíme intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f. Musíme zistiť, kde je druhá derivácia funkcie f kladná a kde je záporná.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{(x^2-1)^3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{(x^2-1)} > 0 \Rightarrow x \in (-1,0)\cup(1,\infty)$.

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{(x^2-1)^3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{(x^2-1)} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(0,1)$. Na základe riešenia vyššie uvedených nerovností vieme, že funkcia f je konvexná na intervaloch $(-1,0)$ a $(1,\infty)$ a f konkávna na intervaloch $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$.

Vypočítame ešte asymptoty funkcie f a limity v krajných bodoch definičného oboru funkcie f. Vieme, že body nespojitosti sú $BN = \{-1, 1\}$. V týchto bodoch vypočítame jednostranné limity a limity v $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)\overset{\left[\frac{-2}{0^-}-1\right]}{=}+\infty,\qquad \lim_{x\to -1^-}\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)\overset{\left[\frac{-2}{0^+}-1\right]}{=}-\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)\overset{\left[\frac{2}{0^+}+1\right]}{=}+\infty,\qquad \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)\overset{\left[\frac{2}{0^-}+1\right]}{=}-\infty,$$
$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)\overset{[0-\infty]}{=}-\infty,\qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)\overset{[0+\infty]}{=}+\infty.$$

Asymptoty bez smernice sú dané bodmi nespojitosti, preto máme dve asymptoty bez smernice: $\mathrm{as}_1 : x = -1$ a $\mathrm{as}_2 : x = 1$. Pre asymptotu so smernicou platí: $\mathrm{as} : y = kx + q$, kde $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$.

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2-1}+1\right)\overset{[0+1]}{=}1,$$
$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2-1}+1\right)\overset{[0+1]}{=}1.$$

Dostali sme: $k_1 = k_2 = k = 1$. Preto:

$$q_1=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=0,$$
$$q_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{2x}{x^2-1}+x\right)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=0.$$

Platí, že $q_1 = q_2 = q = 0$. Vidíme, že funkcia f má práve jednu asymptotu so smernicou, ktorej všeobecná rovnica má tvar: $\mathrm{as}_3 : y = x$.

Tabuľka 10.1: Prehľad získaných vlastností funkcie f z príkladu 10.3.8.

—	$(-\infty,-c)$	$-c$	$(-c,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,c)$	c	(c,∞)
y	$-$	$-d$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	d	$+$
				BN		NB		BN			
y'	$+$	0	$-$		$-$	-1	$-$		$-$	0	$+$
	$\nearrow$	SB	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	SB	$\nearrow$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
	$\frown$	*Lok. MAX*	$\frown$		$\smile$	IB	$\frown$		$\smile$	*Lok. MIN*	$\smile$

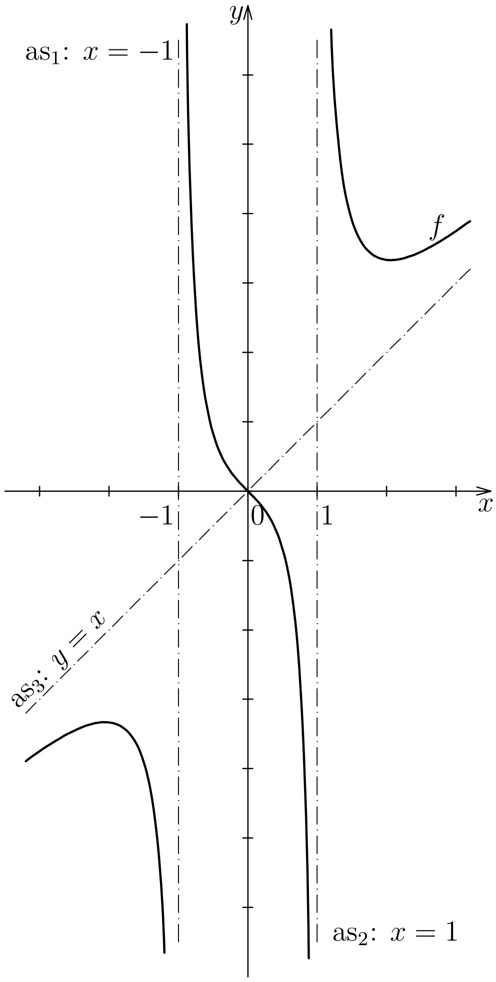
Vytvoríme tabuľku 10.1, v ktorej prehľadne zobrazíme všetky dôležité body, všetky dôležité hodnoty funkcie f a jej derivácií. Pre prehľadnosť tabuľky sú označmé hodnoty stacionárnych bodov a funkčných hodnôt v týchto bodoch ako:

$$c = \sqrt{2+\sqrt{5}}$$

a

$$d = \sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1}.$$

Na základe údajov v tabuľke 10.1 načrtneme graf funkcie f (pozri obrázok 10.5) a to tak, že postupne prekresľujeme tabuľku zľava doprava po jednotlivých stĺpcoch, pričom na začiatku si nakreslíme súradnicový systém a v ňom všetky asymptoty a dôležité body.



Obr. 10.5: Graf funkcie f: $y = \left(\frac{2x}{x^2-1} + x\right)$.

$\surd$

Príklad 10.3.9 Vyšetrite priebeh funkcie f, ak

$$y = x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Riešenie:
Definičným oborom funkcie f je množina $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkcia má jeden bod nespojitosti a to $x = 0$, t. j. $BN = \{0\}$. Funkcia f je spojitá na svojom definičnom obore. Určíme nulové body funkcie f, musíme vyriešiť rovnicu $f(x) = 0$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$. Táto rovnica nemá riešenie na definičnom obore funkcie f, preto $NB = \emptyset$. Overíme párnosť (nepárnosť) funkcie f:
$f(-x) = (-x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{(-x)}} = -x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow$ funkcia f nie je párna ani nepárna. Funkcia f nie je periodická. Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie f:

$$y' = \left(x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)' = (x)' \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x \cdot (\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})' = 1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{x-1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

$$y'' = \left(\frac{x-1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{x-1}{x}\right)' \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{x-1}{x} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Určíme stacionárne a inflexné body funkcie f. Riešime rovnice $f'(x) = 0$ a $f''(x) = 0$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Dostali sme jeden stacionárny bod $[1, \mathrm{e}]$, t. j. $SB = \{1\}$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow IB = \emptyset$. Funkcia f nemá žiadne inflexné body.

Určíme monotónnosť funkcie f. Vieme, že ak $f'(x) > 0$, tak funkcia f je rastúca, a ak $f'(x) < 0$, tak funkcia f je klesajúca.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty),$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1).$$

Funkcia f je rastúca na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(1, \infty)$ a klesajúca na intervale $(0, 1)$.

Určíme lokálne extrémy funkcie f. Funkcia môže mať lokálny extrém v stacionárnych bodoch. Vypočítame hodnoty druhej derivácie funkcie f v bodoch $x \in SB$.
$f''(1) = \dfrac{1}{1^3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{1}} = \mathrm{e} > 0 \Rightarrow$ funkcia f má v bode $[1, \mathrm{e}]$ ostré lokálne minimum.

Zistíme intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f. Musíme zistiť, kde je druhá derivácia funkcie f kladná a kde je záporná.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty),$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Funkcia f je konvexná na intervale $(0, \infty)$ a konkávna na intervale $(-\infty, 0)$.

Vypočítame ešte asymptoty funkcie f a limity v krajných bodoch definičného oboru funkcie f. Vieme, že body nespojitosti sú $BN = \{0\}$. V tomto bode spočítame jednostranné limity a limity v $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \overset{[0 \cdot 1]}{=} 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \overset{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \overset{[\mathrm{e}^{\infty}]}{=} \infty.$$

Asymptoty bez smernice sú dané bodmi nespojitosti. Máme jednu asymptotu bez smernice: $\mathrm{as}_1 : x = 0$. Pre asymptotu so smernicou platí: $\mathrm{as} : y = kx + q$, kde $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$.

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \overset{[\mathrm{e}^0]}{=} 1,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \overset{[\mathrm{e}^0]}{=} 1.$$

Dostali sme výsledky $k_1 = k_2 = k = 1$. Teraz môžeme vypočítať parameter q:

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1x) = \lim_{x\to\infty} (x \cdot (\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1)) \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \overset{[\mathrm{e}^0]}{=} 1,$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} (x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1x) = \lim_{x\to-\infty} (x \cdot (\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1)) \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \overset{[\mathrm{e}^0]}{=} 1.$$

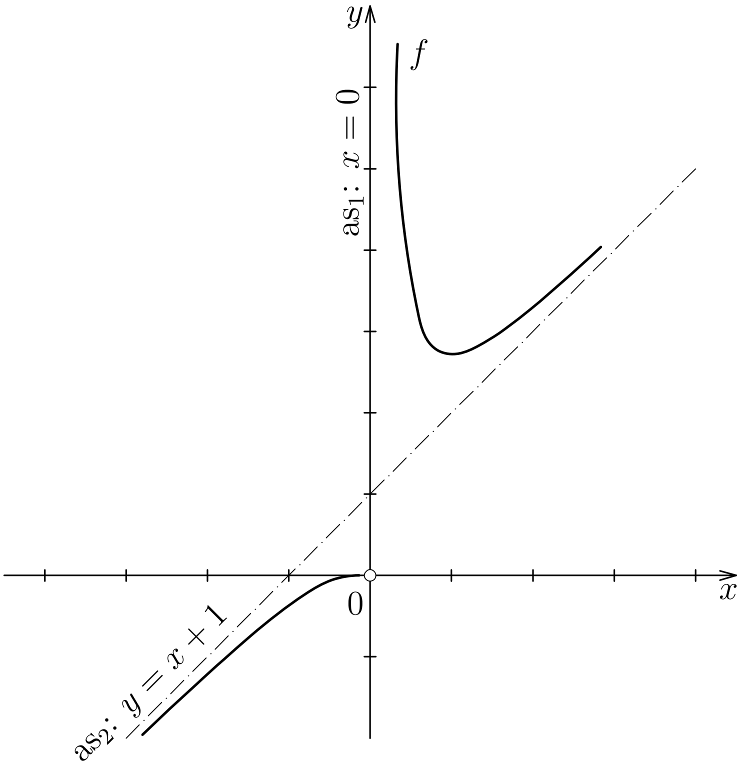
Platí, že $q_1 = q_2 = q = 1$. Vidíme, že funkcia f má práve jednu asymptotu so smernicou, ktorej všeobecná rovnica má tvar: $\mathrm{as}_2 : y = x + 1$.

Vytvoríme tabuľku 10.2, v ktorej prehľadne zobrazíme všetky dôležité body, hodnoty funkcie f a jej derivácií.

Tabuľka 10.2: Prehľad vypočítaných vlastností funkcie f.

—	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y	$-$		$+$	e	$+$
		BN			
y'	$+$		$-$	0	$+$
	$\nearrow$		$\searrow$	SB	$\nearrow$
y''	$-$		$+$	$+$	$+$
	$\frown$		$\smile$	*Lok. MIN*	$\smile$

Na základe údajov v tabuľke 10.2 načrtneme graf funkcie f (pozri obrázok 10.6) a to tak, že postupne prekresľujeme tabuľku zľava doprava po jednotlivých stĺpcoch, pričom na začiatku si nakreslíme súradnicový systém a v ňom všetky asymptoty a dôležité body.



Obr. 10.6: Graf funkcie $f\colon y = x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

$\surd$

10.4 Neriešené úlohy

10.1 Čo znamená, že funkcia f je konvexná, konkávna, že má inflexný bod?

10.2 Vysvetlite rozdiel medzi lokálnymi a absolútnymi extrémami funkcie f.

10.3 Určte intervaly, na ktorých je funkcia f: $y = f(x)$ rýdzomonotónna (rastúca, klesajúca), ak:

a) $f : y = 2x^2 - \ln x$,

b) $f : y = x^5 - 15x^3 + 3$,

c) $f : y = \ln(x) - 2x^2$,

d) $f : y = 2 + x - x^2$,

e) $f : y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

10.4 Určte intervaly, na ktorých je funkcia f: $y = f(x)$ konvexná, resp. konkávna, ak:

a) $f : y = \ln(1 + x^2)$,

b) $f : y = 3x^5 - 40x^3 + x - 2$,

c) $f : y = \sqrt{1 + x^2}$,

d) $f : y = \mathrm{e}^{-x^2}$.

10.5 Určte všetky lokálne extrémy funkcie f: $y = f(x)$, ak:

a) $f : y = x^2 \cdot (x - 6)$,

b) $f : y = x - \ln(1 + x)$,

c) $f : y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$,

d) $f : y = x \cdot \ln^2 x$,

e) $f : y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \cdot \ln(1 + x^2)$,

f) $f : y = x + \dfrac{1}{x}$,

g) $f : y = x + \dfrac{2x}{1 + x^2}$,

h) $f : y = \dfrac{x}{\ln x}$.

10.6 Určte najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie f: $y = f(x)$ na intervale I, ak:

a) $f : y = x^2 - 6x + 10$, kde $I = \langle -1, 5 \rangle$,

b) $f : y = x^3 - 3x + 20$, kde $I = \langle -3, 3 \rangle$,

c) $f : y = (x - 2) \cdot \ln x$, kde $I = \langle 1, \mathrm{e} \rangle$,

d) $f : y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, kde $I = \langle -1, 2 \rangle$,

e) $f : y = x^2 - 6x + 10$, kde $I = \langle -1, 5 \rangle$,

f) $f : y = x^2 \cdot \ln x$, kde $I = \langle 1, \mathrm{e} \rangle$,

g) $f : y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$, kde $I = (0, 3\rangle$.

10.7 Určte intervaly, na ktorých je funkcia f konvexná a konkávna a vypočítajte inflexné body funkcie f, ak je daná predpisom:

a) $f : y = x \cdot (x - 1)^2$,

b) $f : x - \ln(x^2 - 9)$,

c) $f : \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

10.8 Zistite, či funkcia f: $y = f(x)$ vyhovuje danej rovnici, ak:

a) $f : y = \mathrm{e}^{4x} + 2\mathrm{e}^{-x}$ a $y'' - 13y' - 12y = 0$,

b) $f : y = \mathrm{e}^{x} \cdot \sin x$ a $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

10.9 Vyšetrite monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť, lokálne minimum, lokálne maximum a inflexné body danej funkcie f:

a) $f : y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$,

b) $f : y = \dfrac{x^2}{x + 2}$,

c) $f : y = x^3 - 8$,

d) $f : y = x + \dfrac{1}{x + 1}$,

e) $f : y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$,

f) $f : y = \dfrac{1}{x \cdot (x + 1)}$.

10.10 Zistite priebeh funkcie f a načrtnite jej graf, ak je daná funkcia f:

a) $f: y = \dfrac{x}{1+x}$,

b) $f: y = \dfrac{x}{x^2-1}$,

c) $f: y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$,

d) $f: y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$,

e) $f: y = \ln(4-x^2)$,

f) $f: y = \dfrac{3x-1}{x^2}$,

g) $f: y = \dfrac{1}{1+x^2}$,

h) $f: y = \dfrac{1}{\ln x}$,

i) $f: y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

j) $f: y = x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

k) $f: y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$,

l) $f: y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

m) $f: y = (\ln x)^2 + \ln x$,

n) $f: y = \mathrm{e}^{-x^2}$,

o) $f: y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$,

p) $f: y = \ln(1-x^2)$,

r) $f: y = \ln(x^2-1)$,

s) $f: y = \dfrac{x}{1+x^2}$,

t) $f: y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$,

u) $f: y = x + \dfrac{1}{x}$,

v) $f : y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

10.11 Vyšetrite priebeh funkcie f a načrtnite jej graf, ak je daná funkcia f:

a) $f : y = \dfrac{x^2}{x - 3}$,

b) $f : y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$,

c) $f : y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$,

d) $f : y = \dfrac{x^3}{1 - x}$,

e) $f : y = \dfrac{\ln x}{x}$,

f) $f : y = \dfrac{x}{\ln x}$,

g) $f : y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$,

h) $f : y = x^2 - \ln (x^2 - 1)$,

i) $f : y = \ln (x^2 + 1)$,

j) $f : y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}$,

k) $f : y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$,

l) $f : y = x \cdot \ln x$,

m) $f : y = x \cdot \sqrt{x + 3}$,

n) $f : y = x + \sqrt{4 - x}$,

o) $f : y = x^2 \cdot \ln \dfrac{1}{x}$,

p) $f : y = x^3 + 3x$.

10.12 Vypočítajte o koľko sa zmení objem kocky, keď sa dĺžka hrany kocky zmení zo 6 cm na 6,1 cm. Výpočet urobte presne a aj približne pomocou diferenciálu.

10.13 Vypočítajte hodnoty parametrov $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcia $f\colon y = x^3 + ax^2 - 3x + b$ mala inflexný bod $A = [1, 1]$.

10.14 Vypočítajte hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

a) $f'(x_0) = 0$,

b) $f'(x_0) = -2$,

pričom funkcia je daná predpisom $f\colon y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

10.15 Dokážte, že všetky inflexné body funkcie $f\colon y = \frac{x+1}{x^2+1}$ ležia na priamke so všeobecnou rovnicou $p\colon x - 4y = 0$.

10.16 Aké rozmery musí mať obdĺžnik daného obvodu d, aby jeho uhlopriečka bola čo najkratšia?

10.17 Plagát veľký 500 cm^2 má mať okraj 6 cm hore a 4 cm na každej strane vpravo, vľavo a dole. Aké má mať rozmery tlačená plocha plagátu (bez okrajov), ktorá môže byť využitá na reklamu, aby plocha vytlačeného plagátu bola čo najväčšia a využila sa celá plocha, ktorá je k dispozícii?

10.18 Vypočítajte rozmery obdĺžnika s obsahom 25, ktorého obvod je minimálny.

10.19 Aká je najkratšia vzdialenosť bodu $A = [1, 2]$ od paraboly $y = \frac{x^2}{4}$?

10.20 Nájdite také kladné reálne číslo, aby súčet toho čísla a jeho prevrátenej hodnoty bol najmenší.

10.21 Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby ich súčin bol najväčší.

10.22 Aké má mať rozmery otvorený bazén so štvorcovým dnom, aby na jeho vymurovanie bolo potrebné minimálne množstvo materiálu? Vieme, že objem bazéna je 32 m^3.

10.23 Z plechu tvaru štvorca, ktorého strany majú veľkosť 2 m máme zhotoviť otvorenú krabicu maximálneho objemu, ktorá bude mať tvar kvádra. Vypočítajte rozmery krabice.

10.24 Podľa definície rozhodnite, aký extrém má funkcia $f\colon y = x^3$ v bode $x_0 = 0$.

10.5 Výsledky neriešených úloh

10.3 **a)** funkcia je na intervale $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ klesajúca a na intervale $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ je rastúca **b)** funkcia je klesajúca na intervale $(-3,3)$ a rastúca na intervaloch $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$ **c)** funkcia rastie na intervale $(0,\frac{1}{2})$ a klesá na intervale $(\frac{1}{2},\infty)$ **d)** funkcia rastie na intervale $(-\infty,\frac{1}{2})$ a klesá na intervale $(\frac{1}{2},\infty)$ **e)** funkcia klesá na intervaloch $(0,1)$ a $(1,\sqrt{\mathrm{e}})$ a rastie na intervale $(\sqrt{\mathrm{e}},\infty)$

10.4 **a)** funkcia je konvexná na intervale $(-1,1)$ a konkávna na intervaloch $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$ **b)** funkcia je konvexná na intervaloch $(-2,0)$ a $(2,\infty)$, konkávna na intervaloch $(-\infty,-2)$ a $(0,2)$, inflexné body sú IB = {-2, 0, 2} **c)** funkcia je konvexná na celom definičnom obore, t. j. $\mathcal{D}(f)=(-\infty,\infty)$ **d)** funkcia je konvexná na intervaloch $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ a $(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty)$, konkávna na intervale $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, inflexné body sú $IB=\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

10.5 **a)** $[0,0]$ – ostré lokálne maximum, $[4,-32]$ – ostré lokálne minimum **b)** $[0,0]$ – lokálne minimum **c)** $[0,0]$ – lokálne minimum, $\left[2,\frac{4}{\mathrm{e}^2}\right]$ – lokálne maximum **d)** $[\mathrm{e}^{-2},4\mathrm{e}^{-2}]$ – lokálne maximum, $[1,0]$ – lokálne minimum **e)** $\left[1,\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right]$ – lokálne maximum **f)** $[-1,-2]$ – lokálne maximum, $[1,2]$ – lokálne minimum **g)** funkcia nemá lokálne extrémy, je rastúca na $(-\infty,\infty)$ **h)** $[\mathrm{e},\mathrm{e}]$ – lokálne minimum

10.6 **a)** $[-1,17]$ – absolútne maximum, $[3,1]$ – absolútne minimum **b)** $SB=\{-1,1\}$, $[-3,2]$ – absolútne minimum, $[3,38]$ – absolútne maximum **c)** $[1,0]$ a $[2,0]$ – nulové body, v intervale $\langle 1,2\rangle$ – absolútne minimum, $[\mathrm{e},\mathrm{e}-2]$ – absolútne maximum **d)** $SB=\{0,1\}$, $[1,2]$ – absolútne maximum, $[-1,-10]$ – absolútne minimum **e)** $[-1,17]$ – absolútne maximum, $[3,1]$ – absolútne minimum **f)** $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ – absolútne maximum **g)** $[2,4]$ – absolútne minimum

10.7 **a)** funkcia je konvexná na intervale $(\frac{2}{3},\infty)$ a konkávna na intervale $(-\infty,\frac{2}{3})$, $\left[\frac{2}{3},\frac{2}{27}\right]$ – inflexný bod **b)** funkcia je konvexná na celom definičnom obore, nemá inflexné body **c)** funkcia je konvexná na intervale $(0,\infty)$ a konkávna na intervale $(-\infty,0)$, funkcia nemá inflexný bod

10.9 **a)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, funkcia je $\searrow$ na $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, funkcia je $\nearrow$ na $(-1,1)$, funkcia je konkávna na $(-\infty,-\sqrt{3})$ a $(0,\sqrt{3})$, funkcia je konvexná na $(-\sqrt{3},0)$ a $(\sqrt{3},\infty)$, $\left[1,\frac{1}{2}\right]$ – lokálne maximum, $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ – lokálne minimum, inflexné body sú $[0,0]$, $\left[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$, $\left[\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$ **b)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$, funkcia je $\searrow$ na $(-4,-2)$ a $(-2,0)$, funkcia je $\nearrow$ na $(-\infty,-4)$ a $(0,\infty)$, funkcia je konkávna na $(-\infty,-2)$, funkcia je konvexná na $(-2,\infty)$, $[-4,-8]$ – lokálne maximum, $[0,0]$ – lokálne minimum, nemá inflexné body **c)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, funkcia je $\nearrow$ na $\mathbb{R}$, funkcia je konkávna na $(-\infty,0)$, funkcia je konvexná na $(0,\infty)$, nemá lokálne extrémy, inflexný bod $[0,-8]$ **d)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$, funkcia je $\searrow$ na $(-2,-1)$ a $(-1,0)$, funkcia je $\nearrow$ na $(-\infty,-2)$ a $(0,\infty)$, funkcia je konkávna na $(-\infty,-1)$, funkcia je konvexná na

$(-1,\infty)$, $[-2,-3]$ – lokálne maximum, $[0,1]$ – lokálne minimum, nemá inflexné body **e)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, funkcia je $\searrow$ na $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$, funkcia je $\nearrow$ na $(-1,0)$ a $(1,\infty)$, funkcia je konvexná na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$, $[1,2]$ – lokálne minimum, $[-1,2]$ – lokálne minimum, nemá inflexné body **f)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$, funkcia je $\nearrow$ na $(-\infty,-1)$ a $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$, funkcia je $\searrow$ na $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ a $(0,\infty)$, funkcia je konvexná na $(-\infty,-1)$ a $(0,\infty)$, funkcia je konkávna na $(-1,0)$, $\left[-\frac{1}{2},-4\right]$ – lokálne maximum, nemá inflexné body

10.10 **a)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $BN=\{-1\}$, $NB=\{0\}$, $SB=\{-1,1\}$, $IB=\{-3,0,3\}$, $as_1:y=0$, $[1,\frac{1}{2}]$ – lokálne maximum, $[-1,-\frac{1}{2}]$ – lokálne minimum **b)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$, $BN=\{-1,1\}$, $NB=\{0\}$, $SB=\{0\}$, $IB=\emptyset$, $as_1:x=-1$, $as_2:x=0$, $as_3:x=1$, nemá lokálne maximum, $[0,1]$ – lokálne minimum **c)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\emptyset$, $SB=\{-1,1\}$, $IB=\emptyset$, $as_1:x=0$, nemá lokálne maximum, $[-1,2]$ a $[1,2]$ – lokálne minimum **d)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $BN=\emptyset$, $NB=\{0\}$, $SB=\{0,2\}$, $IB=\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\}$, $as_1:y=0$, $[2,4\mathrm{e}^{-2}]$ – lokálne maximum, $[0,\mathrm{e}]$ – lokálne minimum **e)** $\mathcal{D}(f)=(-2,2)$, $BN=\emptyset$, $NB=\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$, $SB=\{0\}$, $IB=\emptyset$, $as_1:x=-2$, $as_2:x=2$, $[0,\ln 4]$ – lokálne maximum, nemá lokálne minimum, $\searrow$ – $(0,2)$, $\nearrow$ – $(-2,0)$, $\smile$ – $(0,2)$, $\frown$ – $(-2,0)$ **f)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\{\frac{1}{3}\}$, $SB=\{\frac{2}{3}\}$, $IB=\{1\}$, $as_1:y=0$, $as_2:x=0$, $[\frac{2}{3},\frac{9}{4}]$ – lokálne maximum, nemá lokálne minimum, $\searrow$ – $(-\infty,0)$ a $(\frac{2}{3},\infty)$, $\nearrow$ – $(0,\frac{2}{3})$, $\smile$ – $(1,\infty)$, $\frown$ – $(-\infty,0)$ a $(0,1)$ **g)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $BN=\emptyset$, $NB=\emptyset$, $SB=\{0\}$, $IB=\emptyset$, $[0,1]$ – lokálne maximum, nemá lokálne minimum, $\searrow$ – $(0,\infty)$, $\nearrow$ – $(-\infty,0)$, $\smile$ – $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty)$, $\frown$ – $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ **h)** $\mathcal{D}(f)=(0,1)\cup(1,\infty)$, $BN=\{1\}$, $NB=\emptyset$, $SB=\emptyset$, $IB=\emptyset$, $as_1:y=0$, $as_2:x=1$, nemá lokálne maximum, nemá lokálne minimum, $\searrow$ – $(0,\mathrm{e}^{-2})$, $\nearrow$ – (a,b), $\smile$ – (a,b), $\frown$ – (a,b) **i)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\emptyset$, $as_1:y=0$, $as_2:x=1$, $\searrow$ – $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$, $\nearrow$ – $\emptyset$, $\smile$ – $(0,\infty)$, $\frown$ – $(-\infty,0)$ **j)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\emptyset$, $SB=\{1\}$, $IB=\emptyset$, $as_1:y=x+1$, $as_2:x=0$, nemá lokálne maximum, $[1,\mathrm{e}]$ – lokálne minimum, $\searrow$ – $(0,1)$, $\nearrow$ – $(-\infty,0)$ a $(1,\infty)$, $\smile$ – $(0,\infty)$, $\frown$ – $(-\infty,0)$ **k)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $BN=\emptyset$, $NB=\{0\}$, $SB=\{0,2\}$, $IB=\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\}$, $as_1:y=0$, $[2,4\mathrm{e}^{-2}]$ – lokálne maximum, $[0,0]$ – lokálne minimum, $\searrow$ – $(-\infty,0)$ a $(2,\infty)$, $\nearrow$ – $(0,2)$, $\smile$ – $(-\infty,2-\sqrt{2})$ a $(2+\sqrt{2},\infty)$, $\frown$ – $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ **l)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\emptyset$, $SB=\emptyset$, $IB=\{-\frac{1}{2}\}$, $as_1:y=1$, $as_2:x=0$, nemá lokálne maximum, nemá lokálne minimum, $\searrow$ – $(-\infty,0)$ a $0,\infty$, $\smile$ – $(-\frac{1}{2},0)$, $\frown$ – $(-\infty,-\frac{1}{2})$ a $(0,\infty)$ **m)** $\mathcal{D}(f)=(0,\infty)$, $BN=\emptyset$, $NB=\{1,\frac{1}{\mathrm{e}}\}$, $SB=\{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\}$, $IB=\{\sqrt{\mathrm{e}}\}$, nemá lokálne maximum, $[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},-\frac{1}{4}]$ – lokálne minimum, $\searrow$ – $(0,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}})$, $\nearrow$ – $(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\infty)$, $\smile$ – $(0,\sqrt{\mathrm{e}})$, $\frown$ – $(\sqrt{\mathrm{e}},\infty)$ **n)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ (Gaussova krivka), f je párna, $BN=\emptyset$, $NB=\emptyset$, $SB=\{0\}$, $IB=\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $as_1:y=0$, $[0,1]$ – lokálne maximum, nemá lokálne minimum, $\searrow$ – $(0,\infty)$, $\nearrow$ – $(-\infty,0)$, $\smile$ – $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$, $\frown$ – $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ **o)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\inf)ty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\{-1,1\}$, $SB=\{-\sqrt[3]{2}\}$, $IB=\emptyset$, $as_1:y=-x$, $as_2:x=0$, $[-\sqrt[3]{2},\frac{3}{\sqrt[3]{4}}]$ – lokálne minimum, nemá lokálne maximum, $\searrow$ – $(-\infty,-\sqrt[3]{2})$ a $0,\infty$, $\nearrow$ – $(-\sqrt[3]{2},0)$,

$\smile$ – $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ **p)** $\mathcal{D}(f)=(-1,1)$, $BN=\emptyset$, $NB=\{0\}$, $SB=\{0\}$, $IB=\emptyset$, $as_1: x=-1$, $as_2: x=1$, $[0,0]$ – lokálne maximum, nemá lokálne minimum, $\searrow$ – $(0,1)$, $\nearrow$ – $(-1,0)$, $\frown$ – $(-1,1)$ **r)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, $BN=\emptyset$, $NB=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$, $SB=\emptyset$, $IB=\emptyset$, $as_1: x=-1$, $as_2: x=1$, $\searrow$ – $(-\infty,-1)$, $\nearrow$ – $(1,\infty)$, $\frown$ – $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$ **s)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $BN=\emptyset$, $NB=\{0\}$, $SB=\{-1,1\}$, $IB=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$, $as_1: y=0$, $[1,\frac{1}{2}]$ – lokálne maximum, $[-1,-\frac{1}{2}]$ – lokálne minimum, $\searrow$ – $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, $\nearrow$ – $(-1,1)$, $\smile$ – $(-\sqrt{3},0)$ a $(\sqrt{3},\infty)$, $\frown$ – $(-\infty,-\sqrt{3})$ a $(0,\sqrt{3})$ **t)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$, $BN=\{1\}$, $NB=\{\frac{1}{2}\}$, $SB=\{0\}$, $IB=\{-\frac{1}{2}\}$, $as_1: y=0$, $as_2: x=1$, $[0,-1]$ – lokálne minimum, $\searrow$ – $(-\infty,0)$ a $(1,\infty)$, $\nearrow$ – $(0,1)$ **u)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\emptyset$, $SB=\{-1,1\}$, $IB=\emptyset$, $as_1: y=x$, $as_2: x=0$, $[-1,-2]$ – lokálne maximum, $[1,2]$ – lokálne minimum, $\searrow$ – $(-1,0)$ a $(0,1)$, $\nearrow$ – $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, $\smile$ – $(0,\infty)$, $\frown$ – $(-\infty,0)$ **v)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$, $BN=\{-1,1\}$, $NB=\{0\}$, $SB=\{0\}$, $IB=\emptyset$, $as_1: y=1$, $as_2: x=-1$, $as_3: x=1$, $[0,0]$ – lokálne maximum, nemá lokálne minimum, $\searrow$ – $(0,1)$ a $(1,\infty)$, $\nearrow$ – $(-\infty,-1)$ a $(-1,0)$, $\smile$ – $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, $\frown$ – $(-1,1)$

10.11 **a)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$, $BN=\{3\}$, $NB=\{0\}$, $SB=\{0,6\}$, $IB=\emptyset$, $\searrow$ – $(0,3)$ a $(3,6)$, $\nearrow$ – $(-\infty,0)$ a $(6,\infty)$, $\smile$ – $(3,\infty)$, $\frown$ – $(-\infty,3)$, $[6,12]$ – lokálne minimum, $[0,0]$ – lokálne maximum, $as_1: y=x+3$, $as_2: x=3$ **b)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$, $BN=\{-1,1\}$, $NB=\{0\}$, $SB=\emptyset$, $IB=\{0\}$, $\searrow$ – $(-\infty,-1)$ a $(-1,1)$ a $(1,\infty)$, $\smile$ – $(-1,0)$ a $(1,\infty)$, $\frown$ – $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$, $as_1: y=0$, $as_2: x=-1$, $as_3: x=1$ **c)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\{-1\}$, $SB=\{\sqrt[3]{2}\}$, $IB=\emptyset$, $\searrow$ – $(0,\sqrt[3]{2})$, $\nearrow$ – $(-\infty,0)$ a $(\sqrt[3]{2},\infty)$, $\smile$ – $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$, $[\sqrt[3]{2},\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}]$ – lokálne minimum, $as_1: y=x$, $as_2: x=0$ **d)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$, $BN=\{1\}$, $NB=\{0\}$, $SB=\{0,\frac{3}{2}\}$, $IB=\{0\}$, $\searrow$ – $(\frac{3}{2},\infty)$, $\nearrow$ – $(-\infty,1)$ a $(1,\frac{3}{2})$, $\smile$ – $(0,1)$, $\frown$ – $(-\infty,0)$ a $(1,\infty)$, $[\frac{3}{2},-\frac{27}{4}]$ – lokálne maximum, $as_1: x=1$ **e)** $\mathcal{D}(f)=(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\{1\}$, $SB=\{\mathrm{e}\}$, $IB=\{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\}$, $\searrow$ – (e,∞), $\nearrow$ – $(0,\mathrm{e})$, $\smile$ – $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\infty)$, $\frown$ – $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$, nemá lokálne minimum, $[\mathrm{e},\frac{1}{\mathrm{e}}]$ – lokálne maximum, $as_1: y=0$, $as_2: x=0$ **f)** $\mathcal{D}(f)=(0,1)\cup(1,\infty)$, $BN=\{1\}$, $NB=\emptyset$, $SB=\{\mathrm{e}\}$, $IB=\{\mathrm{e}^2\}$, $\searrow$ – $(0,1)$ a $(1,\mathrm{e})$, $\nearrow$ – (e,∞), $\smile$ – $(1,\mathrm{e}^2)$, $\frown$ – $(0,1)$ a (e^2,∞), $[\mathrm{e},\mathrm{e}]$ – lokálne minimum, nemá lokálne maximum, $as_1: x=1$ **g)** $\mathcal{D}(f)=(0,\infty)$, $BN=\emptyset$, $NB=\{\frac{1}{\mathrm{e}}\}$, $SB=\{1\}$, $IB=\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\}$, $\searrow$ – $(1,\infty)$, $\nearrow$ – $(0,1)$, $\smile$ – $(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},\infty)$, $\frown$ – $(0,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})$, nemá lokálne minimum, $[1,1]$ – lokálne maximum, $as_1: y=0$, $as_2: x=0$ **h)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, $BN=\{-1,1\}$, $SB=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$, $IB=\emptyset$, $\searrow$ – $(-\infty,-\sqrt{2})$ a $(1,\sqrt{2})$, $\nearrow$ – $(-\sqrt{2},-1)$ a $(\sqrt{2},\infty)$, $\smile$ – $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, $[-\sqrt{2},2]$ – lokálne minimum, $[\sqrt{2},2]$ – lokálne minimum, $as_1: x=-1$, $as_2: x=1$ **i)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $BN=\emptyset$, $NB=\{0\}$, $SB=\{0\}$, $IB=\{-1,1\}$, $\searrow$ – $(-\infty,0)$, $\nearrow$ – $(0,\infty)$, $\smile$ – $(-1,1)$, $\frown$ – $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, $[0,0]$ – lokálne minimum, nemá lokálne maximum **j)** $\mathcal{D}(f)=(1,\infty)$, $BN=\{1\}$, $NB=\emptyset$, $SB=\{3\}$, $IB=\{7\}$, $\searrow$ – $(1,3)$, $\nearrow$ – $(3,\infty)$, $\smile$ – $(1,7)$, $\frown$ – $(7,\infty)$, $[3,2\sqrt{2}]$ – lokálne minimum, nemá lokálne maximum, $as_1: x=1$ **k)** $\mathcal{D}(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $BN=\{0\}$, $NB=\emptyset$, $SB=\emptyset$,

$IB = \emptyset$, $\searrow$ – $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, $\smile$ – $(0, \infty)$, $\frown$ – $(-\infty, 0)$, nemá lokálne minimum, nemá lokálne maximum, $as_1 : y = -1$, $as_2 : y = 1$, $as_3 : x = 0$ **l)** $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, $BN = \{0\}$, $NB = \{1\}$, $SB = \{\frac{1}{\mathrm{e}}\}$, $IB = \emptyset$, $\searrow$ – $(0, \frac{1}{\mathrm{e}})$, $\nearrow$ – $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$, $\smile$ – $(0, \infty)$, $[\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}}]$ – lokálne minimum, nemá lokálne maximum **m)** $\mathcal{D}(f) = \langle -3, \infty)$, $BN = \emptyset$, $NB = \{-3, 0\}$, $SB = \{-2\}$, $IB = \emptyset$, $\searrow$ – $(-3, -2)$, $\nearrow$ – $(-2, \infty)$, $\smile$ – $(-3, \infty)$, $[-2, -2]$ – lokálne minimum, nemá lokálne maximum **n)** $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 4\rangle$, $BN = \emptyset$, $NB = \{-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\}$, $SB = \{\frac{15}{4}\}$, $IB = \emptyset$, $\searrow$ – $(\frac{15}{4}, 4)$, $\nearrow$ – $(-\infty, \frac{15}{4})$, $\frown$ – $(-\infty, 4)$, nemá lokálne minimum, $[\frac{15}{4}, \frac{17}{4}]$ – lokálne maximum **o)** $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, $BN = \{0\}$, $NB = \{1\}$, $SB = \{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\}$, $IB = \{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\}$, $\searrow$ – $(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \infty)$, $\nearrow$ – $(0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$, $\smile$ – $(0, \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$, $\frown$ – $(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, \infty)$, nemá lokálne minimum, $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2\mathrm{e}}]$ – lokálne maximum **p)** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $BN = \emptyset$, $NB = \{0\}$, $SB = \emptyset$, $IB = \{0\}$, $\nearrow$ – $(-\infty, \infty)$, $\smile$ – $(0, \infty)$, $\frown$ – $(-\infty, 0)$, nemá lokálne minimum, nemá lokálne maximum

10.12 **a)** 10,981 **b)** 10,8

10.13 $a = -3$ a $b = 6$

10.14 **a)** $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$ **b)** $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$

10.15 Ani jeden inflexný bod neleží na priamke p.

10.16 $a = \frac{d}{4}$ a $b = \frac{d}{4}$

10.17 $\frac{28}{9}$ cm × 35 cm, 12 cm × 15 cm, celý plagát má rozmer: 20 cm × 25 cm

10.18 5×5

10.19 $\sqrt{2}$

10.20 $SB = \{-1, 1\}$, $[1, 2]$ – lokálne minimum

10.21 Sčítance sú 14 a 14.

10.22 Dno: 4 m × 4 m, hĺbka: 2 m.

10.23 rozmery krabice sú $\frac{4}{3}$ m, $\frac{4}{3}$ m, $\frac{1}{3}$ m

10.24 Funkcia f nemá lokálny extrém v bode x_0.