# Matematika III – pomocný 3

# DIFERENCIÁLNE ROVNICE

## a) Diferenciálne rovnice prvého rádu bez pravej strany

Rovnice typu: $f(x).y' + f(y) = 0$

prvého rádu = najvyššia prvá derivácia - ***y´***

bez pravej strany = na pravej strane rovnice **nula**

**pomocné vzorce:**

$$\ln e^{y} = y \qquad e^{\ln x} = x$$

$$e^{\ln x + c} = e^{\ln x}. e^{c} = x. e^{c} = x. c$$

$$e^{2x + c} = e^{2x}. e^{c} = e^{2x}. c$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a. b)$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

**Úprava rovnice:**

1. nahradíme $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
2. separujeme premenné (oddelíme *y*, d*y* na jednu stranu a *x*, d*x* na druhú, tak aby d*y* a d*x* boli v čitateli)
3. upravené strany integrujeme (úprava pomocou per partes, substitúcia alebo obyčajný integrál)
4. vo výsledku výrazy s rovnakou premenou necháme na tej istej strane

## b) Diferenciálne rovnice prvého rádu s pravou stranou

Rovnice typu: $y' + p(x)y = q(x)$

**pomocné vzorce:**

$-\ln x = \ln x^{-1}$

$2\ln x = \ln x^2, \quad \frac{1}{3}\ln x = \ln x^{\frac{1}{3}}$

$e^{\ln x^2} = x^2$

$e^{\ln x^{-1}} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

prvého rádu = najvyššia prvá derivácia - ***y´***

s pravou stranou = na pravej strane rovnice je **funkcia *q*(*x*)**

**Úprava rovnice:** 2. spôsob:

1. upravíme rovnicu tak, aby člen ***y´*** bol osamotený (násobíme alebo delíme celú rovnicu)

**Napr.:** rovnicu $xy' + 4y = \frac{e^x}{x^3}$, predelíme $x$, potom $y' + \frac{4y}{x} = \frac{e^x}{x^4}$

2. upravenú rovnicu vynásobíme integračným faktorom $\boldsymbol{IF = e^{\int p(x)dx}}$ (najprv učíme *p*(*x*), potom vypočítame $\int p(x)dx$ a nakoniec *IF*)

$$y' \cdot e^{\int p(x)\,dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\, y = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

**Napr.:**
$y' + \frac{4y}{x} = \frac{e^x}{x^4}$, kde $p(x) = \frac{4}{x}$
$\int \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x^4, \; IF = e^{\ln x^4} = x^4$

3. ľavá strana rovnice predstavuje súčin derivácie funkcie ***y*** a ***IF*** (pri jej úprave z prvého člena súčinu na ľavej strane rovnice opíšeme *y* bez derivácie a *IF*)

$$[y \cdot e^{\int p(x)\,dx}]' = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

**Napr.:**
$y'x^4 + 4yx^3 = e^x$
úprava ľavej strany: prvý člen je *y* a druhý je $x^4$

$$(yx^4)' = e^x$$

3. integrujeme obe strany rovnice $$y \cdot e^{\int p(x)\,dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c,$$

kde využijeme, že $\int (y.e^{\int p(x)dx})'\,\mathrm{d}y = y.e^{\int p(x)dx}$

**Napr.:**

$$\int (y.x^4)' = \int e^x\,\mathrm{d}x$$

Úprava ľavej strany: $y.x^4 = \int e^x\ \mathrm{d}x$

4. upravíme ľavú stranu rovnice (vynásobíme alebo delíme vhodným výrazom, aby na ľavej strane zostalo len ***y***)

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c \cdot e^{-\int p(x)\,dx},\ c \in \mathbb{R}.$$

**Napr.:**

$$y.x^4 = \int e^x\ \mathrm{d}x = e^x + \mathrm{c}$$

Úprava rovnice (predelíme celú rovnicu $x^4$):

$$y = \frac{e^x}{x^4} + \frac{c}{x^4}$$

## c) Diferenciálne rovnice druhého rádu bez pravej strany

Rovnice typu: $y'' + ay' + by = 0$

<u>druhého rádu</u> = najvyššia druhá derivácia - ***y*´´**
<u>bez pravej strany</u> = na pravej strane rovnice **nula**

**Úprava rovnice:**

1. vytvoríme charakteristickú rovnicu $\lambda^2 + a\lambda + \mathrm{b} = 0$
   (nahradíme v rovnici $y'' \to \lambda^2, y' \to \lambda$, *y* - vynecháme)

2. riešime charakteristickú rovnicu ako kvadratickú rovnicu a určíme diskiminant

   a) ak **D > 0,** $\lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 \neq \lambda_2$

   potom dve riešenia charakteristickej rovnice $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$

   všeobecné riešenie dif. rovnice je $\boldsymbol{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$

**Napr.:** $D = 9,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$

Všeobecné riešenie dif. rovnice je $\boldsymbol{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$

b) ak **D = 0,** $\lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

potom riešenia charakteristickej rovnice $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$

všeobecné riešenie dif. rovnice je $\boldsymbol{y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}}$

**Napr.:** $D = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Všeobecné riešenie dif. rovnice je $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

c) ak **D** < **0,** $\lambda_1, \lambda_2 \in C, \lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$

potom riešenia charakteristickej rovnice $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

všeobecné riešenie dif. rovnice je $\boldsymbol{y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x}$

**Napr.:** $D = -4 = 4i^2, \ \lambda_1 = -1 + 3i, \ \lambda_2 = -1 - 3i$

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$$

porovnaním výsledkov zo všeobecným zápisom, $\alpha = -1, \beta = 3$

všeobecné riešenie dif. rovnice je $y = c_1 e^{-x} \cos 3x + c_2 e^{-x} \sin 3x$

c) Diferenciálne rovnice druhého rádu s pravou stranou

Rovnice typu: *y* ´´+ a*y*´ + *by* = f (x)

druhého rádu = najvyššia druhá derivácia - ***y*** ´´
bez pravej strany = na pravej strane rovnice **funkcia f(x)**

**Úprava rovnice:**

1. riešime rovnicu bez pravej strany (môžu tri prípady riešenia)

2. riešime rovnicu s pravou stranou

   riešenie dif. rovnice = všeob.riešenie DR bez pravej strany + partikulárne riešenie y*

3. určíme partikulárne riešenie y* podľa pravej strany DR

   a) ak na pravej strane funkcia typu $\boldsymbol{f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}}$
   kde $P_m(x) -$ polynóm $\boldsymbol{m} -$ tého stupňa
   $\alpha \in R, \alpha$ je $\boldsymbol{k} -$ násobný koreň DR bez pravej strany

   partikulárne riešenie $y^* = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + .. + b_m x^m) e^{\alpha x} x^k$

Napr.: 1) $\boldsymbol{f(x) = (5x^1 + 2)e^{2x}}$, $\alpha$ = 2 je 1- násobný koreň DR bez pravej strany,
teda jeden koreň charakteristickej rovnice je = 2

porovnaním s $y^* = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + .. + b_m x^m)e^{\alpha x} x^k$

$\alpha = 2$
$m = 1$
$k = 1$

**potom** $\boldsymbol{y^* = (a + bx)e^{2x}x^1}$

$\boldsymbol{2)}$ $\boldsymbol{f(x) = (-8x)e^{-x}}$, $\alpha$ nie je koreň DR bez pravej strany

$\alpha = -1$
$m = 1$
$k = 0$

**potom** $\boldsymbol{y^* = (a + bx)e^{-x}}$

$\boldsymbol{3)}$ $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 3x - 5}$ , $\alpha$ nie je koreň DR bez pravej strany

$\alpha = 0$
$m = 2$
$k = 0$

**potom** $\boldsymbol{y^* = ax^2 + bx + c}$

***Poznámka***: pri učovaní $\boldsymbol{k}$ musí byť $\boldsymbol{\alpha}$ koreňom DR bez pravej strany

b) ak na pravej strane funkcia typu

$f(x) = \left(P_{n_1}^{(1)}(x)\cos\beta x + P_{n_2}^{(2)}(x)\sin\beta x\right)e^{\alpha x}$, kde $P_{n_1}^{(1)}(x)$, $P_{n_2}^{(2)}(x)$ sú polynómy stupňa $n_1$, $n_2$, $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$ a $\alpha + \beta i$ je $k$–násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany,

partikulárne riešenie $y^* = Q^{(1)}{}_m(x)(\cos\beta x + Q^{(2)}{}_m(x)\sin\beta x)\, e^{\alpha x}x^k$

kde $Q^{(1)}{}_m(x)$, $Q^{(2)}{}_m(x)$ - sú polynómy stupňa ***m*** = max $\{n_1, n_2\}$

Napr.: 1) $\boldsymbol{f(x) = 8\cos x}$, $\alpha + \beta i$ nie je koreň DR bez pravej strany,

porovnaním s $y^* = Q^{(1)}{}_m(x)(\cos\beta x + Q^{(2)}{}_m(x)\sin\beta x)\, e^{\alpha x} x^k$

$\alpha = 0, \beta = 1$

$m = 0$ ($8x^0 = 8$)

$k = 0$

**potom** $\boldsymbol{y^* = a\cos x + b\sin x}$

2) $\boldsymbol{f(x) = 4\cos 2x + \sin 2x}$, $\alpha + \beta i$ nie je koreň DR bez pravej strany

$\alpha = 0$, $\beta = 2$

$m = 0$

$k = 0$

**potom** $\boldsymbol{y^* = a\cos 2x + b\sin 2x}$

3) $\boldsymbol{f(x) = \sin(3x)e^{-x}}$, $\alpha + \beta i$ nie je koreň DR bez pravej strany

$\alpha = -1$, $\beta = 3$

$m = 0$

$k = 0$

**potom** $\boldsymbol{y^* = (a\cos 3x + b\sin 3x)e^{-x}}$

***Poznámka***: pri učovaní $\boldsymbol{k}$ musí byť $\boldsymbol{\alpha + \beta i}$ koreňom DR bez pravej strany

4. vypočítame prvú a druhú deriváciu partikulárneho riešenie y* a dosadíme do DR s pravou stranou $(y^*)'' + a(y^*)' + by^* = f(x)$

5. po úprave rovnice porovnáme koeficienty (a, b c, ...) pri rovnakých členoch na pravej a ľavej strane DR a vypočítame ich hodnotu

> **Napr.:** úpravou DR vyšlo
>
> $$-4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 6a\sin 2x + 6b\cos 2x = 4\cos 2x + \sin 2x$$
>
> porovnaním koeficientov pri cos 2x a sin 2x
>
> cos 2x: $-4a + 6b = 4$
> sin 2x: $-4b - 6a = 1$

6. dosadíme vypočítané hodnoty koeficientov do partikulárneho riešenie y* a zapíšeme výsledok DR s pravou stranou v tvare

riešenie dif. rovnice = všeob. riešenie DR bez pravej strany + partikulárne riešenie y*