SOUSTAVY LIN. ROVNIC

METODY ŘEŠENÍ:

- Sítkem (Gaussem) — nejvíc práce — nejrychlejší
- Sítkem (Gaussem) — nejvíc práce — nejrychlejší
- Cramerovo pravidlo (CP) — nejvíc práce — nejpomalejší

PŘ.1.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned}}{}$$

I) $2x - 3y = 5 \quad / \cdot 2$

II) $3x + 2y = 1 \quad / \cdot 3$

$$\frac{\begin{aligned} 4x - 6y &= 10 \\ 9x + 6y &= 3 \end{aligned}}{}$$

$$\frac{\begin{aligned} 13x &= 13 \\ x &= 1 \end{aligned}}{}$$

$x = 1$ do I: $2 \cdot 1 - 3y = 5$

$-3y = 3$

$y = -1$

$[x, y] = [1, -1]$

$\boxed{\mathcal{K} = \{[1, -1]\}}$ ← ES má právě 1 řešení

PŘ.2

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 2x - y - 5z &= 1 \\ x + 2y + 5z &= 10 \end{aligned}$$

I) $x - 3y = 1 \Rightarrow x = 1 + 3y$

$$\frac{\begin{aligned} 2x - y - 5z &= 1 \\ x + 2y + 5z &= 10 \end{aligned}}{}$$

(2) $2x - y - 5z = 1$

(1) $x + 2y + 5z = 10$

$$\frac{\begin{aligned} -3y + 15z &= -3 \\ -y + 15z &= 1 \quad / \cdot (-3) \end{aligned}}{}$$

$0 \neq -2$

$\boxed{\mathcal{K} = \emptyset}$ ← ES nemá řešení

PŘ.3

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + 2y + 8z &= 4 \end{aligned}$$

$x = 1 + 2y - 5z$

$$\frac{\begin{aligned} 3 - 2y - 15z + y + z &= 2 \\ 1 + 2y - 5z + 2y + 8z &= 4 \end{aligned}}{}$$

$$\frac{\begin{aligned} -2y - 8z &= -1 \quad / \cdot (-1) \\ -2y - 2z &= -3 \quad / \cdot (-1) \end{aligned}}{}$$

$$\frac{\begin{aligned} 2y + 8z &= 1 \\ 2y + 2z &= 3 \end{aligned}}{}$$

$$\frac{\begin{aligned} 2y + 8z &= 1 \\ 6z &= -1 \end{aligned}}{}$$

→ jedna rovnice nemá přesně řešení

$z = -\frac{1}{6}$, $x \in \mathbb{R}$

$y = \frac{1 + 8 \cdot \frac{1}{6}}{2}$

$x = 1 - x - 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

$\boxed{\mathcal{K} = \{[\frac{3}{6}, \frac{1 + \frac{8}{6}}{2}, x] \mid x \in \mathbb{R}\}}$

↳ ES má nekonečně mnoho řešení

PŘ.4 LINEÁRNÍ LOMENÁ ROVNICE

$$\begin{aligned} \frac{10}{x+5} + \frac{1}{y+2} &= 1 \\ \frac{25}{x+5} - \frac{6}{y+2} &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &\neq -5 \\ y &\neq -2 \end{aligned}$$

SUBSTITUCE

$a = \frac{1}{x+5}$; $b = \frac{1}{y+2}$

$$\frac{\begin{aligned} 10a + b &= 1 \\ 25a - 6b &= 1 \end{aligned}}{} \quad \text{SLRK} \quad / \cdot 2 \; +$$

$$\frac{\begin{aligned} 20a + 2b &= 2 \\ 25a - 6b &= 1 \end{aligned}}{} \quad +$$

$$\begin{aligned} 45a &= 3 \\ a &= \frac{3}{45} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$b = 1 - 10 \cdot \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{15} = \frac{1}{x+5}$; $\frac{1}{3} = \frac{1}{y+2}$

$x + 5 = 15$; $y + 2 = 3$

$x = 10$; $y = 1$

$\boxed{\mathcal{K} = \{[10, 1]\}}$

MATICE

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{aligned} i &= 1, m \\ j &= 1, n \end{aligned}$$

PŘ.1

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & (-1) \end{pmatrix}; \quad B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad C_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

prvkové indexy

$a_{22} = 5$

$b_{32} = 2$

OPERACE S MATICEMI:

a) $A + C$ = neex. ?

SČÍTÁNÍ

b) $A_{2 \times 3} + B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0+1 & -1+2 & 3+(-1) \\ 2+0 & 1+3 & -1+0 \\ -2+2 & 3+1 & -1+2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ROZDÍL

c) $B - A = \begin{pmatrix} 1-0 & 2-(-1) & -1-3 \\ 0-2 & 3-1 & 0-5 \\ 2-(-2) & 1-3 & 2-(-1) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

NÁSOBEK MATICE KONŠTANTOU

d) $2A = 2\begin{pmatrix} \cdots & \\ a_{ij} & \\ \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2(-1) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot -2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 10 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

SOUČIN MATIC

e) $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = D_{3 \times 3}$

3 = 3

f) $B_{3 \times 3} \cdot C_{3 \times 1} = F_{3 \times 1}$ (E - jednotková matice)

3 = 3

g) $C_{3 \times 1} \cdot A_{2 \times 3}$ = neex.

ŘÁDEK x SLOUPEC

ad e)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (2) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 12 & 12 & 8 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

LIN. KOMB. i-tého sloupce a j-tého sloupce

A 3.11

$D_{3 \times 3} = (d_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} \cdot b_{kj} \right)$

ad f) $B \cdot C = F_{3 \times 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6 + 4 \\ 0 + 3 + 0 \\ 4 + 3 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

TRASPONOVANÁ MATICA

h) $C^T = (C_{3 \times 1})^T = C^T_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

i) $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

j) $A^2 = A_{3 \times 3} \cdot A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 - 2 - 6 & 0 - 1 + 9 & 0 - 5 - 3 \\ 0 + 2 - 10 & -2 + 1 + 15 & 6 + 5 - 5 \\ 0 + 6 + 2 & 2 + 3 - 3 & -6 + 15 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -8 \\ -8 & 14 & 6 \\ 8 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

ŘÁDEK x SLOUPEC

k) $C^2 = C_{3 \times 1} \cdot C_{3 \times 1}$ neex.

$C_{3 \times 3} \cdot C^T_{3 \times 3} = G_{3 \times 3}$

$C^T_{1 \times 3} \cdot C_{3 \times 1} = H_{1 \times 1}$