

Vzorová zápočtová písomka z predmetu Diskrétna matematika - opakujúci

1. Je daná množina $A = \{2, 4, 8, 10, 12\}$. Zistite, ktoré z vlastností reflexívnosť, symetrickosť, antisymetrickosť, tranzitívnosť platia v binárnej relácii

- (a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in A \times A; y - x \leq 4\}$
- (b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in A \times A; y > x\}$
- (c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in A \times A; |x - y| \leq 3\}$.
- (d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in A \times A; x \mid y \text{ alebo } y \mid x\}$,

Ku každej vlastnosti je potrebné napísať jej definíciu, rozhodnúť, či daná vlastnosť platí a svoje tvrdenie odôvodniť.

2. (a) Nech $A = \{2, 4, 6, 10, 12, 30, 60\}$.

- Znázornite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(A, |)$.
- Určte nasledovné priesečky a spojenia

$$2 \wedge 10$$

$$4 \wedge 10$$

$$12 \wedge 30$$

$$2 \vee 10$$

$$4 \vee 10$$

$$12 \vee 30$$

- Ku každému prvku nájdite všetky komplementy, ak existujú. Rozhodnite, či $(A, |)$ je komplementárny zväz.

(b) Nech $A = \{1, 2, 4, 5, 20, 25, 50, 100\}$.

- Znázornite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(A, |)$.
- Určte: $\sup\{2, 25, 50\}$, $\sup\{2, 4, 20\}$, $\sup\{2, 5\}$, $\inf\{4, 20, 50\}$, $\inf\{5, 25, 50\}$, $\inf\{20, 50\}$.
- Rozhodnite, či $(A, |)$ je zväz.

(c) Rozhodnite, ktoré zo zväzov $(D_{12}, |)$, $(D_{32}, |)$, $(D_{50}, |)$ sú izomorfné. Ak sú zväzy izomorfné, popíšte izomorfizmus.

(d) Rozhodnite, či zväz $(A, |)$, kde $A = \{1, 2, 4, 9, 12, 18, 36\}$ je podzväzom zväzu $(D_{36}, |)$.

3. Rozhodnite, či množina M je splniteľná a či formula α vyplýva z množiny formúl M , ak

(a) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z, x \Leftrightarrow \bar{z}, (x \wedge y) \Rightarrow z, \bar{y} \wedge z\}$, $\alpha : (x \vee y) \Rightarrow z$

(b) $M = \{(x \Leftrightarrow y) \vee z, x \Rightarrow \bar{z}, (x \wedge y) \Rightarrow z, \bar{y} \wedge z\}$, $\alpha : (x \wedge y) \Rightarrow z$.

4. (a) Daná je formula v úplnom disjunktívnom tvare:

$$(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$$

- Napíšte úplný konjunktívny normálny tvar.
- Napíšte minimálny konjunktívny normálny tvar a minimálny disjunktívny normálny tvar.

(b) Daná je formula v úplnom konjunktívnom tvare:

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$

- Napíšte úplný disjunktívny normálny tvar.
- Napíšte minimálny konjunktívny normálny tvar a minimálny disjunktívny normálny tvar.

- (c) Nájdite úplný disjunktívny normálny tvar a úplný konjunktívny normálny tvar boolovskej funkcie realizovanej formulou

$$[x \vee (y \wedge z)] \Rightarrow \overline{(y \Leftrightarrow \bar{z})}$$

Obidva tvary minimalizujte.

5. (a) Určte, či sú grafové nasledujúce postupnosti. V oboch prípadoch (áno aj nie) svoje tvrdenie zdôvodnite. Ak postupnosť je grafová, znázornite diagram grafu, ktorého vrcholy majú príslušné stupne.

- 8,4,5,7,3,2,4,1
- 8,4,5,7,3,2,4,1,5
- 8,4,5,7,3,2,4,1,4,4

- (b) Určte, pre aké hodnoty k je postupnosť

$$6, 6, 5, k, 3, 2, 2, 2$$

grafová. V oboch prípadoch (áno aj nie) svoje tvrdenie zdôvodnite. Ak postupnosť je grafová, znázornite diagram grafu, ktorého vrcholy majú príslušné stupne.

6. (a) Graf G je zadaný maticou susednosti $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

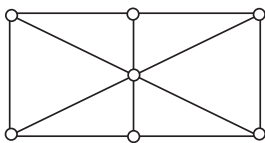
Bez kreslenia grafu určte:

- dvojice vrcholov, ktoré majú vzdialenosť rovnú 2;
- dvojice vrcholov, ktoré majú vzdialenosť väčšiu ako 2;
- polomer a stred grafu G .

- (b) Graf G je zadaný maticou incidencie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- znázornite graf G ,
- Určte excentricity vrcholov, polomer, priemer a stres grafu.
- vypočítajte počet kostier;
- načrtnite tri kostry grafu G .

- (c) Vypočítajte počet kostier na obrázku. Znázornite aspoň 3 kostry.



- (d) Bez kreslenia diagramu určte, či graf G je zadaný maticou susednosti je súvislý, ak

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$