DOBRÉ RÁNO :)

SÚČIN MATÍC

majme $A=(a_{ij})$ typu $m \times r$, $B=(b_{ij})$ typu $r \times n$! (počet stĺpcov 1. matice = počtu riadkov 2. matice)

$\boxed{A \cdot B} = C = (c_{ij})$ typu $\boxed{m \times n}$, kde

$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ir} \cdot b_{rj}$

(vynásobím i-ty riadok matice A s j-tym stĺpcom B)

$a_{i1} \; a_{i2} \dots a_{ir}$ $\qquad$ $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{rj}$

príklad:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$2\times 2 \qquad 2 \neq 3 \qquad 3 \times 2$

$A \cdot B =$ nedá sa vynásobiť súčin!

príklad:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 3$

áno, viem urobiť súčin, výsledok A.B bude typu 3x3

1. riadok x 3. stĺpec

$$\boxed{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 4 & 1\cdot 5+2\cdot 3 \\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 3\cdot 3+(-1)\cdot 4 & 3\cdot 5+(-1)\cdot 3 \\ 0\cdot(-1)+4\cdot 2 & 0\cdot 3+4\cdot 4 & 0\cdot 5+4\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 11 & 11 \\ -5 & 5 & 12 \\ 8 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

EKVIVALENTNÉ ÚPRAVY MATICE
(riadkové alebo stĺpcové)

1. zámena poradia riadkov, resp. stĺpcov

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A \sim B$

2. vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou

Pr. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot (-3)$ $\quad B=\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad A \sim B$

3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu)

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \swarrow + \\ \end{matrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad A \sim B$

resp. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ |\cdot(-1) \\ \end{matrix}$ $\qquad \overbrace{(-1)R_1+(-1)R_2}^{\text{LK riadkov}}$ $\swarrow +$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$ $\qquad A \sim B$

pojem: EKVIVALENTNÉ MATICE $\qquad A \sim B$

pojem: HODNOSŤ MATICE A, označ. $h(A)$

↓ počet nenulových riadkov matice A upravenej (ekvival. úpravy) na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.

Pr.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-3)\;|\cdot(-2)\;|\cdot(-4) \\ \swarrow + \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix}$$

typu 4 x 4 $\qquad$ (ak sa dá, dám na diagonálu 1)

idem vyrábať nuly pod hlavnou diagonálou. (resp. pod každým vedúcim prvkom v riadku chcem 0)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ |\cdot(-\frac{1}{3}) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h(A)=2$$

matica už je upravená na trojuholníkový tvar

SÚSTAVA LINEÁRNYCH ROVNÍC

sústavu:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

nazývame súst. lin. rovníc (m) o n neznámych $x_1, \dots, x_n$

a_{ij} sú koefic. sústavy

$b_1, \dots, b_m$ sú pravé strany

vytvoríme matice: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ typu $m \times n$ ↓ matica sústavy

$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektor neznámych, matica typu $n \times 1$

$\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ vektor pravých strán, typu $\boxed{m \times 1}$

$$\boxed{\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\vec{x}} = \underset{m \times 1}{\vec{b}}}$$ maticový zápis sústavy lineárnych rovníc.

môžem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

pojem: rozšírená matica sústavy

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matica sústavy + pravé strany

príklad určme $h(A)$, $h(A')$

1. $x+y=2$, $x-y=0$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matica sústavy

$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ rozšírená matica súst.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$h(A)=2$

$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$

$h(A')=2$

$h(A)=h(A')=2$

riešenie sústavy $x=1$, $y=1$

2. $x+y=2$, $2x+2y=4$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad h(A)=1$

$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-2) \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$h(A')=1$

$h(A)=h(A')=1$

sústava má nekonečne veľa rieš.

3. $x+y=2$, $x+y=3$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad h(A)=1$

$A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$h(A')=2$

$h(A) \neq h(A')$

sústava nemá riešenie.

len 3 možnosti môžu nastať pre riešenie sústav lin. rovníc

1) má práve 1 riešenie
2) má nekonečne veľa riešení
3) nemá riešenie.

Gaussova eliminačná metóda: (metóda riešenia sústav lin. rovníc)

príklady

1.
$$\begin{aligned} -2x_1+2x_2+2x_3-2x_4 &= -10 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= -5 \\ 3x_1+x_2-x_3+4x_4 &= -2 \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & -2 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & -10 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot 2\;|\cdot(-3)\;|\cdot(-1) \\ \swarrow + \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ |\cdot(\frac{1}{4}) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ |\cdot 2\;|\cdot(-2) \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ |\cdot 5 \\ |\cdot(-2) \swarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$h(A)=4$
$h(A')=4$

$h(A)=h(A')=4$ sústava má riešenie

↓ počet neznámych, preto sústava má práve 1 riešenie

vyjadrenie riešenia:

$3x_4=-3$ (posledný riadok upravenej sústavy)

$\boxed{x_4=-1}$

$-2x_3+x_4=3$ (predposledný)

$-2x_3-1=3$

$\boxed{x_3=-2}$

$x_2+x_3+0\cdot x_4=-5$ $\quad$ 2. riadok

$x_2-2=-5$

$\boxed{x_2=-3}$

1. riadok

$x_1+x_2+x_3+x_4=-5$

$x_1-3-2-1=-5$

$\boxed{x_1=1}$

výsledok: riešenie $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (1, -3, -2, -1)^T$

príklad

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= -1 \\ 2x_1+3x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+3x_2+8x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-2)\;|\cdot(-1) \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

o.k. je upravená

$h(A)=2$
$h(A')=3$

$h(A) \neq h(A')$ sústava nemá riešenie