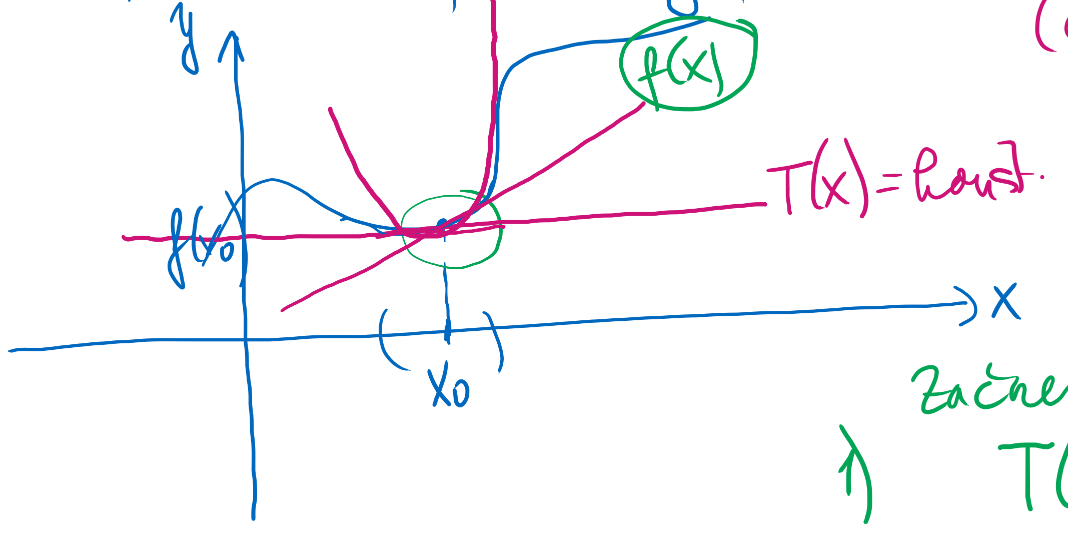
Taylorov polynóm

nech $\boxed{f(x)}$ má v bode x_0 $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$

nech má $\boxed{\text{komplikovaný predpis}}$ – chcem ju nahradiť (aproximovať) jednoduchšou funkciou na okolí bodu x_0



začnem KONŠTANTNOU F.

1) $T(x) = \text{konšt.}$

$T(x) = f(x_0)$

2) $T(x) = \text{lineárna funkcia}$

$= \boxed{a}x + b$

smernica priamky $= \boxed{f'(x_0)}$

$T'(x_0) = a = f'(x_0)$

3) resp. $T(x) = \text{kvadratická funkcia}$

$= ax^2 + bx + c$

nech $T(x_0) = f(x_0)$ (prechádza parabola bodom $[x_0, f(x_0)]$)

$T'(x_0) = f'(x_0)$ (rovnaké dotyčnice)

ATĎ $\vdots$ $\quad T''(x_0) = f''(x_0)$ („ohyb" v bode x_0 je rovnaký)

---

zovšeobecnenie ↑ postupu:

majme $f(x)$, ktorá má $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$.

hľadám $T_n(x) = \boxed{a_0} + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \underbrace{\dots}_{a_3(x-x_0)^3} + a_n(x-x_0)^n$

aby na $O(x_0)$ aproximovala $f(x)$

požadujem aby 1) $T_n(x_0) = f(x_0)$

$\Vert$

$a_0 = f(x_0)$

2) $T_n'(x_0) = f'(x_0) = a_1$

$T_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$

$T_n'(x_0) = a_1$

3) $T_n''(x_0) = f''(x_0) = 2a_2 \implies$

$T_n''(x) = 2a_2 + 3.2.a_3(x-x_0) + \dots$

$T_n''(x_0) = 2a_2$

$a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$

$a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

teda dostali sme polynóm:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorov polynóm funkcie $f(x)$ v bode x_0

teda môžeme zapísať $T_n(x) \approx f(x)$ aproximuje

príklad $f(x) = e^x$ v bode $\boxed{x_0 = 0}$ Taylorovým polynómom

$f(x_0) = f(0) = 1$

$f'(x) = \boxed{e^x}$; $\quad f'(x_0 = 0) = 1$

$f''(x) = e^x$; $\quad f''(x_0 = 0) = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x_0) = 1$

$T_n(x) = 1 + 1x + \dfrac{1}{2!} \cdot x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dots + \dfrac{x^n}{n!} =$

$$= \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} \approx e^x}$$