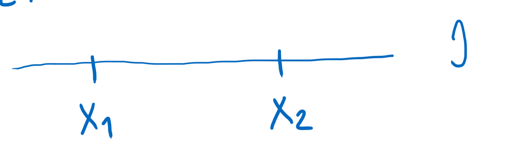
PRIEBEH FUNKCIE (teória + príklady na 2. ZP).

1) význam znamienka 1. derivácie

a) ak $\forall x \in J$ $f'(x) > 0$, tak f je rastúca na J.

dôkaz:



nech $\boxed{\text{ľub. } x_1, x_2} \in J$, také že $\boxed{x_1 < x_2}$

vezmime $\langle x_1, x_2 \rangle$

platia predpoklady Lagrangeovej vety:

na $\langle x_1, x_2 \rangle$ f je spojitá ✓

na (x_1, x_2) má f deriváciu ✓ (predpoklady našej vety, na J má deriváciu).

Lagrangeova veta hovorí, že

$\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$; $f(x_2) - f(x_1) = \boxed{f'(\xi)}\boxed{(x_2 - x_1)}$

$\xi \in J$ $\quad\quad$ $+$ $\quad$ $+$

ukázali sme, že $\forall x_1, x_2 \in J$ $x_1 < x_2$ platí $f(x_2) - f(x_1) > 0$

$f(x_2) > f(x_1)$

$f(x_1) < f(x_2)$

(za predpoklada $f'(x) > 0$ na J)

definícia rastúcej funkcie.

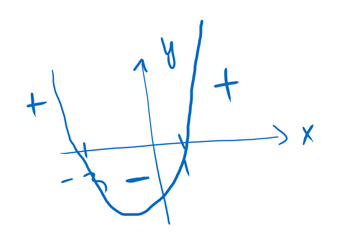
rastúca, klesajúca funkcia $\longrightarrow$ rýdzomonotónne funkcie

nerastúca, neklesajúca –||– $\longrightarrow$ monotónne funkcie.

$\boxed{\text{príklad}}$ URČME intervaly monotónnosti danej funkcie

$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 7$; $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \boxed{x^2 + 2x - 3} = 0$ nájdem nulové body



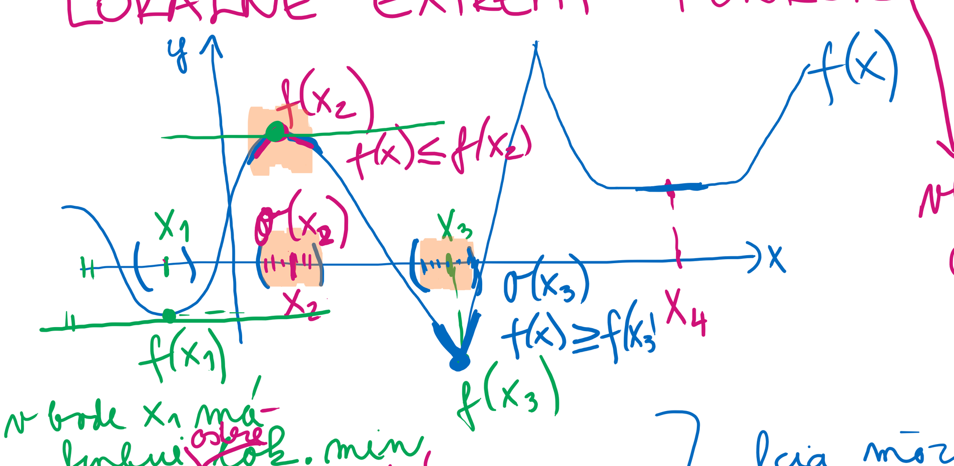
$\boxed{(x+3)(x-1)} = 0$

NB: $x_1 = -3$
$x_2 = 1$

intervaly rýdzej monotónnosti

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗ rastúca	↘ klesajúca	↗ rastúca

LOKÁLNE EXTRÉMY FUNKCIE



vlastnosť OKOLIA

v bode x_1 má funkcia ostré lok. min

v bode x_2 má f ostré lok. max.

v bode x_3 má f ostré lok. min

v bode x_4 má f $\boxed{\text{lok. min}}$

fcia môže mať viacej lok. extrémov

Def. ⇒ prezentácia

naša úloha: hľadanie lokálnych extrémov (využijeme deriváciu funkcie)

! funkcia f môže mať lokálny extrém iba tam, kde $f'(x_0) = 0$, alebo tam, kde derivácia neexistuje!

NUTNÁ PODMIENKA existencie lok. extrému:

! nech existuje $f'(x_0)$. Ak má f v bode x_0 lokálny extrém, tak $f'(x_0) = 0$. !

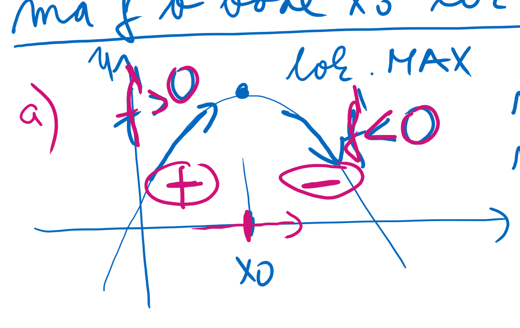
STACIONÁRNY BOD FUNKCIE: $f'(x_0) = 0$
(bod x_0)

POSTAČUJÚCE PODMIENKY existencie lok. extrému

① a) ak f' mení znamienko v bode x_0 z $+$ na $-$, tak f má v bode x_0 $\boxed{\text{lok. MAX}}$

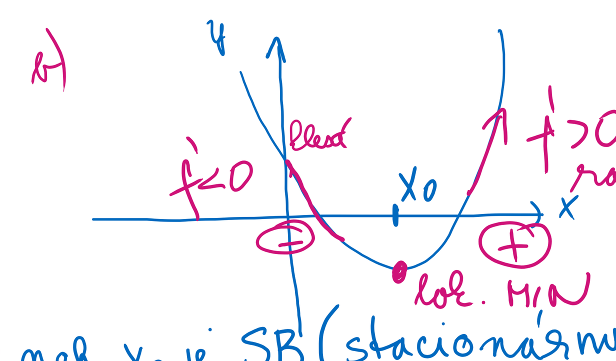
b) ak f' mení znamienko v bode x_0 z $-$ na $+$, tak má f v bode x_0 lok. MIN.

a)



na ľavom okolí x_0 rastie $f'(x) > 0$
na pravom –||– klesá $f'(x) < 0$

b)



② nech x_0 je SB (stacionárny bod) funkcie f a existuje f''

a) ak $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 lok. minimum

b) ak $\boxed{f''(x_0) < 0}$, tak f má v bode x_0 lok. maximum.

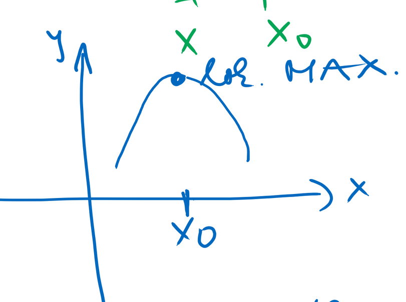
zdôvodnenie ⓑ $\quad f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) < 0$

$\boxed{0 >} \left(f'(x_0)\right)' = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}}$

$\forall x \in O^+(x_0)$ $\quad x - x_0 > 0$
mám $f'(x) < 0$ klesá

$\forall x \in O^-(x_0)$ $\quad x - x_0 < 0$
mám $f'(x) > 0$ rastie



$\boxed{\text{PRÍKLAD}}$ Nájdeme lokálne extrémy danej funkcie

$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 7$; $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

nájdeme SB funkcie (lebo funkcia môže mať extrémy iba v SB, alebo kde derivácia neexistuje

ale s týmto sa v príkladoch nestretneme).

$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{array}}$ STACIONÁRNE BODY

použijem druhú postačujúcu podmienku:

$\boxed{f''(x) = 2x + 2}$

$x_1 = -3$: $\quad f''(-3) = -4 < 0$ $\quad$ v bode -3 má f ostré lok. maximum

$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 7 = \underline{16}$

$x_2 = 1$: $\quad f''(1) = 4 > 0$ $\quad$ v bode 1 má f ostré lok. minimum

$f(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 + 7 = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$

alebo použijem prvú $\boxed{\text{post. podmienku}}$

využijem predchádz. príklad (monotónnosť)

	$(-\infty, -3)$	SB -3	$(-3, 1)$	SB 1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. MAX	↘	lok. MIN	↗