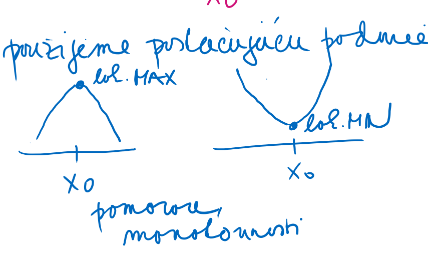
lokálne extrémy funkcie $\boxed{f(x)}$

postup pri hľadaní:

1) nájdeme $\boxed{SB}$ funkcie
(vieme, že funkcia má lok. extrém len v SB, resp. v bode kde derivácia neexistuje)
v našich úlohách sa nestretneme.

SB: $f'(x_0)=0$
x_0

2) použijeme postačujúcu podmienku exist. lok. extrému.



lok. MAX
lok. MIN
x_0 x_0
pomocou monotónnosti

alebo → $f''(x_0)>0$ f má v bode x_0 lok. minimum

$f''(x_0)<0$ f má v bode x_0 lok. MAX.

$\boxed{\text{PRÍKLAD}}$ – praktická úloha:
Chceme vyrábať plechovky v tvare valca s objemom $1\,dm^3$ s cieľom použiť MINIMUM materiálu.
? aké rozmery má mať plechovka? ... ?

ideme vypočítať: plocha valca

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

↑ hľadáme MIN

{platí: najmenšie z lokálnych miním je celkové (globálne) MINIMUM.
najväčšie z lok. maxím je celkové MAXIMUM.}

daný $V = \boxed{1\,dm^3 = \pi r^2 \cdot h}$; $r>0, h>0$

$h = \frac{1}{\pi r^2}$

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi \cancel{r} \cdot \frac{1}{\pi r^{\cancel{2}}} = \boxed{2\pi r^2 + \frac{2}{r} = f(r)}$$

lok. min. tejto funkcie (extrémy)

$$f'(r) = \boxed{4\pi r - \frac{2}{r^2}} = 0$$

$$\frac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = 0 \iff 4\pi r^3 - 2 = 0$$

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ stac. bod.

$$f''(r) = 4\pi + \frac{4}{r^3} > 0$$

pre $\boxed{r>0}$ aj pre SB

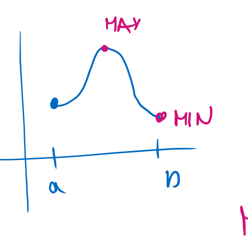
v bode $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ má $f(r)$ lok. MIN → celkové MINIMUM.

budeme vyrábať plechovky s rozmermi

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ dm a $h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2}$

je plocha MINIMÁLNA.

EXTRÉMY na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$.
Vieme, že spojitá funkcia $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$ nadobúda MIN MAX.



MAX
MIN
a b

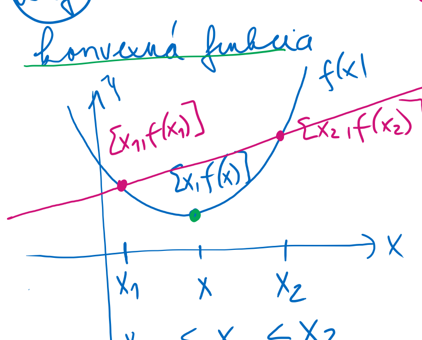
$$\underset{x\in\langle a,b\rangle}{\mathrm{MAX}}\, f(x) = \max\{\underbrace{\text{lok. max}}_{\text{na }(a,b)}, f(a), f(b)\}$$

$$\underset{x\in\langle a,b\rangle}{\mathrm{MIN}}\, f(x) = \min\{\underbrace{\text{lok. min}}_{x\in(a,b)}, f(a), f(b)\}$$

KONVEXNOSŤ, KONKÁVNOSŤ FUNKCIE
(význam znamienka druhej derivácie).

Def konvexná funkcia

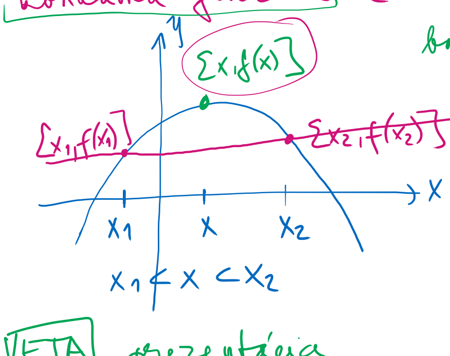
(usmievavá funkcia, nalejem kávu)
(rýdzokonvexná funkcia)



$[x_1, f(x_1)]$ $[x_2, f(x_2)]$ $[x, f(x)]$ f(x)
x_1 x x_2
$x_1 < x < x_2$

bod $[x, f(x)]$ leží pod priamkou určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$ $[x_2, f(x_2)]$

konkávna funkcia, (neusmieva sa ⇒ nenalejem kávu).
rýdzokonkávna funkcia
bod $[x, f(x)]$ leží nad priamkou $[x_1, f(x_1)]$ $[x_2, f(x_2)]$



$[x, f(x)]$ $[x_1, f(x_1)]$ $[x_2, f(x_2)]$
x_1 x x_2
$x_1 < x < x_2$

$\boxed{\text{VETA}}$ prezentácia

$f''(x)>0$ pre $\forall x \in J$ ⇒ rýdzokonvexná f. na J
$f''(x)<0$ –||– ⇒ rýdzokonkávna na J
$f''(x)\geq 0$ ⇒ konvexná
$f''(x)\leq 0$ ⇒ konkávna

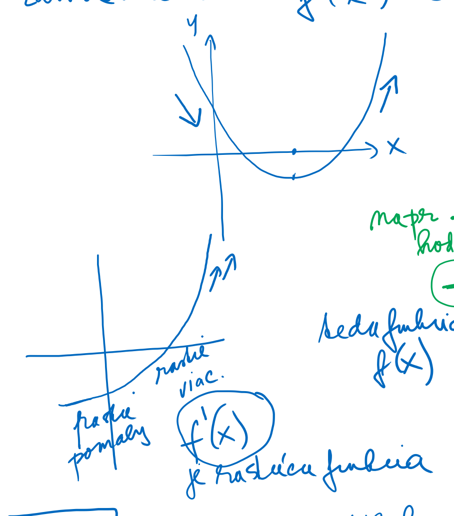
---

zdôvodnenie: $f''(x)>0$ ⇒ rýdzokonvexná f.

$(\boxed{f'(x)})' > 0$
⇓
$f'(x)$ je rastúca

napr. hodnoty $\boxed{f'(x)}$ $\boxed{-}$ cez $\boxed{0}$ po $\boxed{+}$

teda funkcia $f(x)$ ↘ ↗



rastie pomaly
rastie viac.
$f'(x)$ je rastúca funkcia

$\boxed{\text{príklad}}$ URČME INTERVALY konvexnosti a konkávnosti funkcie (rýdzej)

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad D(f) = R - \{\pm 1\}$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1) - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \boxed{\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot(x^2-1)^{\cancel{2}} - (-x^2-1)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x(x^2-1)+(x^2+1)\cdot 4x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3+2x+4x^3+4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \boxed{\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}} = f''(x)$$

zistím nulové body: $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \iff 2x\cdot(x^2+3) = 0$

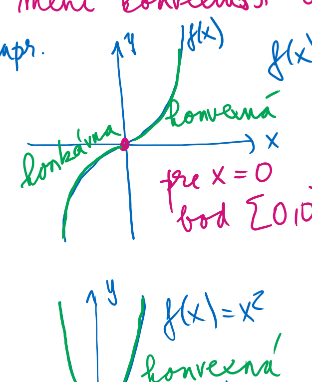
$x=0$
nulový bod 2. derivácie

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	–	+	–	+
$f(x)$	∩	∪	∩	∪

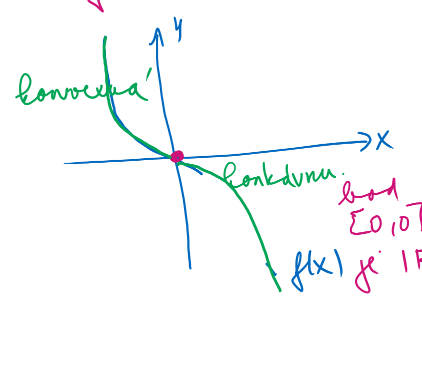
← intervaly konvexnosti a konkávnosti.

INFLEXNÝ BOD FUNKCIE (IB)
(nulový bod druhej derivácie, v ktorom sa mení konvexnosť a konkávnosť funkcie).

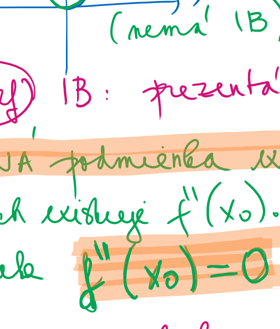
napr.



f(x)
$f(x)=x^3$
konkávna konvexná
pre $x=0$ bod $[0,0]$ je IB funkcie



konvexná konkávna
bod $[0,0]$ f(x) je IB



$f(x)=x^2$
konvexná
(nemá IB)

Def IB: prezentácia

NUTNÁ podmienka existencie IB:
Nech existuje $f''(x_0)$. Ak bod x_0 je IB funkcie $f(x)$, tak $f''(x_0)=0$

? prečo? ak by $f''(x_0)>0$ konvexná
alebo $f''(x_0)<0$ konkávna } teda
nemení sa v bode x_0 konvexnosť, konkávnosť funkcie

postup pri hľadaní IB:
1) nájdeme nulové body f''. (x_0; $f''(x_0)=0$)
2) postač. podmienka a) konvexnosť, konkávnosť na pravom a ľavom okolí
b) $f'''(x_0)\neq 0$, tak x_0 je IB $f(x)$

$\boxed{\text{príklad}}$ $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$; IB = ?

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \quad \text{pre } \boxed{x=0}$$

$(-1,0)$	0	$(0,1)$
∪	IB	∩