PRÍKLAD PRIEBEH FUNKCIE

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

$\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

1) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{\pm1\}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\left(\dfrac{-\infty}{\infty}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$ ($-1{,}1$)

$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=\infty$ (-1; $-0{,}9$)

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ ($0{,}9$; 1)

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=\infty$ (1; $1{,}1$)

-1 mín

3) asymptoty grafu funkcie:

ABS: $x=-1$, $x=1$ (viď bod 2)

ASS: pre $\boxed{x\to\infty}$; $y=kx+q$

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1$

$q=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-\underset{k}{1}\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$

teda ASS pre $x\to\infty$ je priamka $\boxed{y=x}$

pre $x\to-\infty$ limity vypočítam rovnako

preto $\boxed{y=x}$ je ASS aj pre $x\to-\infty$

4) párnosť (P): graf súmerný podľa O_y; nepárnosť (N): graf súmerný podľa bodu $[0,0]$.

$\mathcal{D}(f)$ je O.K. (má zmysel vyšetrovať P, N)

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\boxed{\dfrac{-x^3}{x^2-1}}$ $\qquad f(x)\neq f(-x)$ nie je párna

$-f(x)=\boxed{-\dfrac{x^3}{x^2-1}}$ $\Big\}$ $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in\mathcal{D}(f)$ $\boxed{\text{je NEPÁRNA}}$

5) MONOTÓNNOSŤ FUNKCIE

6)

7) $\boxed{f'(x)}=\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}\right)'=\dfrac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\boxed{\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}}$

8)

v jednej tabuľke.

$\boxed{\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}}=0$ (hľadáme nulové body $f'(x)$, teda SB).

$\Updownarrow$

$x^2\cdot(x^2-3)=0$

$x_1=0$; $x^2-3=0$

$x_2=-\sqrt3$; $x_3=\sqrt3$ $\qquad\boxed{\text{SB}}$

$f''=\left(\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)'=\dfrac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^{\cancel{2}}-(x^4-3x^2)\cdot2\cancel{(x^2-1)}\cdot2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=$

$=\dfrac{\cancel{4x^5}-4x^3-6x^3+6x-\cancel{4x^5}+12x^3}{(x^2-1)^3}=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=\boxed{\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}}=f''(x)$

nulové body f'' (možné inflexné body).

$\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0$

$\Updownarrow$

$2x(x^2+3)=0$

$\boxed{x=0}$

pokračovanie na budúce.