

**dobronerie prele du:**  
 $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$   $Df = R - \{ \pm 1 \}$

ASS:  $y = x$  pre  $x \rightarrow -\infty$  aj  $x \rightarrow \infty$   
 ABS:  $x = 1$  ak  $x \rightarrow 1^+$  dal  $f(x) \rightarrow \infty$   
 $x = -1$  ak  $x \rightarrow -1^+$  dal  $f(x) \rightarrow -\infty$   
 $x \rightarrow 1^-$  dal  $f(x) \rightarrow \infty$   
 $x \rightarrow -1^-$  dal  $f(x) \rightarrow -\infty$

**DOBRE RANO: 2**  
 $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2+1)^2}$  SB:  $x=0, \pm\sqrt{3}$  ← n. týchto bodoch možu byť lok. extrémny  
 $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2+1)^3}$  NB:  $x=0$

**tabuľka pre monotonnosť, lok. extrémny komerant, konkvavosť, IB**

$Df$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	+	+	+
$f''(x)$	-	-	-	+	0	-	+	+	+
$f(x)$	↗	lok. MAX	↘	↘	IB	↘	↗	lok. MIN	↗

$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2+1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

**náčrt grafu**

**POSTUPNOSTI reálnych čísel (funkcia)**

**Def**  $D(f) = \mathbb{N}$   
 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$   
 $1 \rightarrow a_1 \in \mathbb{R}$   
 $2 \rightarrow a_2 \in \mathbb{R}$   
 $3 \rightarrow a_3 \in \mathbb{R}$   
 $\vdots$   
 $n \rightarrow a_n \in \mathbb{R}$   
 ← n-ty člen postupnosti

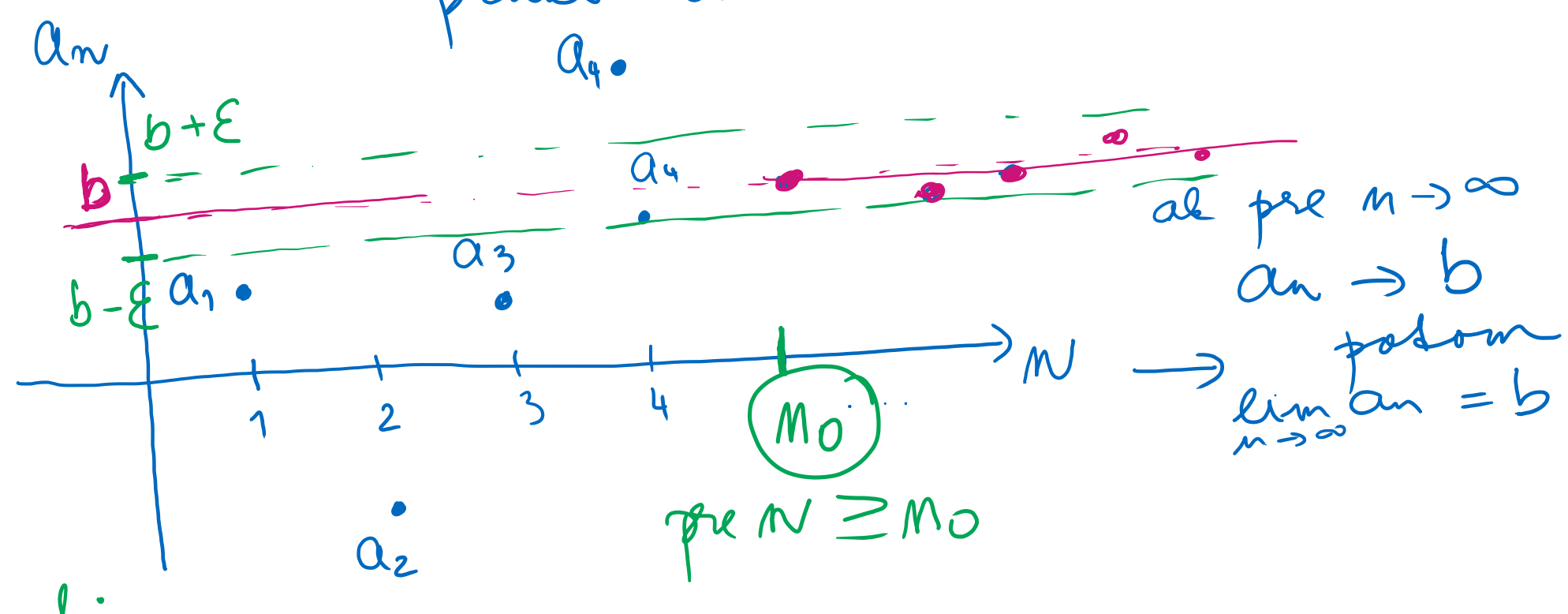
**príklad**  
 $1 \rightarrow 1$   
 $2 \rightarrow 2$   
 $3 \rightarrow 3$   
 $\vdots$   
 $n \rightarrow n$   
 $\{m\}_{m=1}^{\infty}$   
 je to aritmetická postupnosť  
 $a_{n+1} = a_n + d$   
 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

**príklad geometrická postupnosť**

$1, 2, 4, 8, 16, \dots$   
 $a_1 = 1$   
 $a_2 = 2 = a_1 \cdot 2 = 2$   
 $a_3 = a_2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$   
 $a_4 = a_3 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$   
 $\vdots$   
 $a_n = a_{n-1} \cdot q$   
 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$   
 $q = 2$

**limita postupnosti:** zápis  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$   
 iba v neelastnom čísle  $(\infty)$

**definícia:**  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \Leftrightarrow (\forall \epsilon \in \mathbb{R}) (\exists M_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq M_0)$   
 plati  $a_n \in \mathcal{O}_\epsilon(b)$



**príklad:**  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$   
 praktický príklad  
 máme 1 € vložíme do banky súrokom 100% na obdobie 1 roka.

1. úročenie 1krát (na konci roka)  
 $1 \text{ €} \rightarrow 1+1 = 2 \text{ €}$

2. úročenie 2x do roka  
 $1 \text{ €} \rightarrow 1 + \frac{1}{2} = 1.5 \text{ €}$  (50% z 1 €)  
 $1.5 \text{ €} \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 \text{ €}$

3. úročenie 3x do roka  
 $1 \text{ €} \rightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37 \text{ €}$   
 $\frac{1}{3} = 33.33\%$   
 $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37$

$\vdots$   
 úročenie n-krát do roka na konci máme  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$   
 ak  $n = 10$   $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.594$

ak urobíme  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718 \dots$   
 spojte úročovanie