

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 0x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2y + x = 4 \\ 3y + 2x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} y & x \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 \text{I. } & \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{II. } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x - 4y = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \\
 & \text{III. } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x - y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{h(A) = 2}
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h(A) = 3 \quad \left| \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad h(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h(B) = 2 \quad \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h(C) = 3$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3)R_1 \\ (-2)R_2 \\ (-4)R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3)R_2 \\ (-2)R_3 \\ (-2)R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{h(D) = 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_2 \\ R_2 + (2)R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{h(A) = 1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3)R_1 \\ (-2)R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3)R_2 \\ 2R_2 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-5)R_2 \\ (-3)R_2 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} \quad \underline{h(A) = 3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_1 \\ (-5)R_2 \\ (-4)R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -15 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_2 \\ (-2)R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -15 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \underline{h(A) = 3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -8 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 6 & -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_1 \\ (-1)R_2 \\ (-1)R_3 \\ (-1)R_5 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)R_2 \\ (+2)R_2 \\ (+3)R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \underline{h(A) = 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_1 \\ (-3)R_2 \\ (-4)R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)R_2 \\ (+2)R_2 \\ (+3)R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{h(A) = 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_1 \\ (-1)R_2 \\ (-1)R_3 \\ (-1)R_5 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_2 \\ (-2)R_3 \\ (+3)R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)R_2 \\ (-1)R_3 \\ (-1)R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{h(A) = 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3)R_1 \\ (-2)R_2 \\ (-2)R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 11 & -3 & 5 \\ 0 & -33 & 10 & -1 \\ 0 & -19 & 13 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-6)R_1 \\ (+33)R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 11 & -3 & 5 \\ 0 & -33 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \underline{h(A) = 3}$$