Matematika 1 – 9.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Sústavy lineárnych rovníc

Sústavu

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

nazývame sústava lineárnych algebraických rovníc.

Čísla $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ *nazývame koeficienty sústavy,*

$x_1, \ldots, x_n$ *sú neznáme,*

$b_1, \ldots, b_m$ *sú pravé strany rovníc.*

Sústava lineárnych rovníc v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matica sústavy *A*

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Rozšírená matica *A´*

Frobeniova veta – sústava LR má riešenie práve vtedy,

- ak **h(*A*) = h(*A*´).** V tom prípade

a) Ak **h(*A*) = n (počet neznámych v sústave)**, tak sústava má **práve jedno riešenie.**

b) Ak **h(*A*) < n**, tak sústava má **nekonečne veľa riešení** (volíme za neznáme parameter).

- ak **h(*A*)** $\neq$ **h(*A*´)** sústava **nemá riešenie**.

Gaussova eliminačná metóda

1. Prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do tvaru **rozšírenej matice.**
2. Pomocou postupných **ekvivalentných úprav** tejto matice upravíme maticu na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.
3. Na základe **Frobeniovej vety** urobíme záver o počte riešení danej sústavy.
4. Ak sústava má jedno riešenie alebo nekonečne veľa riešení maticu upravenú na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar opäť prepíšeme na sústavu rovníc, ktorú riešime.
5. Pri sústave, ktorá má nekonečne veľa riešení volíme za neznáme veličiny (podľa počtu nulových riadkov vzhľadom na počet neznámych v sústave) parametre (napr. t, u).
6. Riešenie sústavy, zapíšeme v tvare $(x_1, x_2 \ldots x_n)^T$

Pr. 1 Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

1. Prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do tvaru **rozšírenej matice.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right)$$

2. Pomocou postupných **ekvivalentných úprav** tejto matice upravíme maticu na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right) \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -4R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(-7) \\ .3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 21 & 21 & -21 \\ 0 & -21 & -18 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 21 & 21 & -21 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

3. Na základe **Frobeniovej vety** urobíme záver o počte riešení danej sústavy – určíme hodnosť h(A), h(A´).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 21 & 21 & -21 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

h(A) = 3 h(A´) = 3

h(A) = 3 = n (počet neznámych - x_1, x_2, x_3) $\Rightarrow$ sústava má jedno riešenie

4. Maticu upravenú na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar opäť prepíšeme na sústavu rovníc, ktorú riešime.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 21x_2 + 21x_3 &= -21 \\ 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$x_3 = -1$$

$$21x_2 + 21.(-1) = -21$$

$$21x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 + 2.0 + (-1) = 1$$

$$x_1 = 2$$

5. Riešenie sústavy, zapíšeme v tvare **(x_1, x_2 .... x_n)^T** $(2,0,-1)^T$

Pr. 2 – 72 /1: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &- x_3 &= 2 \\ 3x_1 &+ 2x_2 &- 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 &- 3x_2 &+ 2x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad (1, 3, 2)^T$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -4R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 6 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -7R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

h(A) = 3 h(A´) = 3 h(A) = 3 = n ⇒ sústava má jedno riešenie

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$x_3 = 2$$

$$-x_2 + 2 = -1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + 3 - 2 = 2$$

$$x_1 = 1 \qquad (1,3,2)^T$$

Pr. 3 – 72 / 13: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 1\\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0\\
x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2\\
9x_1 & - & x_2 & + & 15x_3 & - & 5x_4 & = & 1
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -3 & 6 & -1 & 1\\
1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
1 & 3 & -1 & -1 & -2\\
9 & -1 & 15 & -5 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
2 & -3 & 6 & -1 & 1\\
1 & 3 & -1 & -1 & -2\\
9 & -1 & 15 & -5 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -R_1 \\ -9R_1 \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & -7 & 8 & -1 & 1\\
0 & 1 & 0 & -1 & -2\\
0 & -19 & 24 & -5 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & -7 & 8 & -1 & 1\\
0 & 1 & 0 & -1 & -2\\
0 & -19 & 24 & -5 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & -2\\
0 & -7 & 8 & -1 & 1\\
0 & -19 & 24 & -5 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ +7R_2 \\ +19R_2 \end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & -2\\
0 & 0 & 8 & -8 & -13\\
0 & 0 & 24 & -24 & -37
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ -3R_3 \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & -2\\
0 & 0 & 8 & -8 & -13\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right)
$$

h(A) = 3   h(A´) = 4

h(A) ≠ h(A´) ⇒ sústava nemá riešenie

Pr. 4 – 72 / 3: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 &+3x_2 &+2x_3 &=3 \\ 4x_1 &+3x_2 &+5x_3 &=4 \\ 2x_1 & &+3x_3 &=2 \end{aligned} \qquad \emptyset$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ -R_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

h(A) = 2 h(A´) = 3 h(A) ≠ h(A´) ⇒ sústava nemá riešenie

Pr. 5 – 75 / 24: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ 2x_3 &- x_4 &= 2 \\ 2x_1 &+ x_2 &+ x_3 &- 2x_4 &= 1 \\ &- x_2 &- x_3 &+ x_4 &= 0 \\ 3x_1 &+ 2x_2 &+ 3x_3 &- 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ \\ -3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

h(A) = 3 h(A´) = 3

h(A) = h(A´)= 3 < 4 (počet neznámych) ⇒ sústava má ∞ veľa riešení

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ -x_2 - 3x_3 \quad &= -3 \\ 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$x_3 = t$ $\qquad 2t + x_4 = 3$

$x_4 = 3 - 2t$

$-x_2 - 3t = -3$

$x_2 = 3 - 3t$

$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$

$x_1 + 3 - 3t + 2t - (3 - 2t) = 2$

$x_1 + 3 - 3t + 2t - 3 + 2t = 2$

$x_1 = 2 - t$

$(2 - t, 3 - 3t, t, 3 - 2t)^T$

Pr. 6: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = & 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & -3 \end{array}$$

$(-8, 3+t, 6+2t, t)^T, t \in \mathbf{R}.$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -R_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -5R_2 \\ +7R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +2R_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

h(A) = 3 h(A´) = 3

h(A) = h(A´)= 3 < 4 (počet neznámych) ⇒
sústava má ∞ veľa riešení

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_3 - 4x_4 &= 12 \end{aligned}$$

$x_4 = t$

$2x_3 - 4t = 12$

$x_3 = 6 + 2t$

$x_2 - x_3 + x_4 = -3$

$x_2 = 3 + t$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4$

$x_1 - 2(3 + t) + 3(6 + 2t) - 4t = 4$

$x_1 = -8$

$(-8, 3 + t, 6 + 2t, t)^T$

Dú: str. 72 - 75 / 2, 4, 5, 6, 12, 17, 18, 19, 20, 25

4. Malá písomka

Skupina A : 1. Určte **A.B**, ak sú dané matice

0,2 b 0,2 b

$$A.B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1+0+3.1 & -2.3+0+0 \\ 4.1+1.-5+1.(-1) & 4.3+1.2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

0,2 b 0,2 b 0,2 b

2. Vypočítajte deriváciu bez ďalších úprav (oprava)

0,1 b 0,2 b 0,2 b 0,1 b 0,1 b

$$f'(x) = \frac{-\sin x\,.(2^x + 100^3) - \cos x\,(2^x \ln 2 + 0)}{(2^x + 100^3)^2} + \frac{5}{1+(x^3)^2}(3x^2) - \frac{1}{x \ln 8}\sqrt[3]{x} + \log_8 x . \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$$

0,1 b

0,1 b

0,1 b

Skupina B : 1. Určte **B.A**, ak sú dané matice

0,3 b 0,3 b 0,3 b

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.(-2)+3.4 & 0+3.1 & 1.3+3.(-1) \\ -5.(-2)+2.4 & 0+2.1 & (-5).3+2.(-1) \\ 1.(-2)+0 & 0+0 & 1.3+0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 18 & 2 & -17 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

0,1 b

2. Vypočítajte deriváciu bez ďalších úprav (oprava)

0,1 b 0,1 b 0,1 b 0,1 b 0,2 b

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{3}{2}x^4 - (\arccos x).\frac{3}{2}4x^3}{\left(\frac{3}{2}x^4\right)^2} + \cos x\,(e^x + 5x^3 + 2^{2024}) + \sin x\,(e^x + 5.3x^2$$

0,1 b

0,2 b

$$+0) - 3\frac{1}{2}(\ln x)^{\frac{-1}{2}}\frac{1}{x}$$

0,1b

Skupina C: (online): Určte **A.B**, ak sú dané matice

$$A\,.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

0,15 b 0,15 b 0,15 b

$$\begin{pmatrix} 1.1+0+(-3).1 & 1.1+0+(-3).2 & 1.1+0+(-3).3 \\ 4.1+0+2.1 & 4.1+5.(-1)+2.2 & 4.1+5.1+2.3 \\ -7.1+0+1.1 & -7.1+0+1.2 & -7.1+0+1.3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 6 & 3 & 15 \\ -6 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

0,05 b