I. MNOŽINY A CELÉ ČÍSLA

1. Typy dôkazov

Veta. $P \Rightarrow Q$. (Ak platí P, tak platí aj Q.)

P – predpoklad
Q – tvrdenie

1. Dôkaz priamy:
   $P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_n = Q$

2. Dôkaz nepriamy:
   Využijeme tautológiu $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
   Namiesto $P \Rightarrow Q$ dokážeme $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

3. Dôkaz sporom:
Predpokladáme, že P – platí (aj všetko, čo už bolo dokázané)
a uvažujeme, že Q – neplatí .

Po dovolených úpravách to vedie k sporu, ktorý je v matematike zakázaný. Takže nie je možné, aby Q neplatilo.

4. Dôkaz matematickou indukciou:
Nech $P(n)$ je nejaké tvrdenie pre prirodzené číslo n.

1) Nech platí $P(1)$.
(základný krok)

2) Predpokladáme, že platí $P(n)$ pre $n \geq 1$.
(indukčný predpoklad)

Ukážeme, že z platnosti $P(n)$ vyplýva aj platnosť $P(n+1)$.
(indukčný krok)

Potom je tvrdenie dokázané pre všetky prirodzené čísla.

Back
Close

2. Množiny a množinové operácie

$A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$	množiny
$a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$	prvky množín
$x \in A$	x je prvkom množiny A

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z}; -1 \leq x \leq 9\}$ $\qquad A = B$

Číselné množiny:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$	prirodzené čísla
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	celé čísla
$\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y}; \, x, y \in \mathbb{Z}\}$	racionálne čísla
$\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$	reálne čísla
$\mathbb{I}$ – všetky reálne, ktoré nie sú racionálne	iracionálne čísla
$\mathbb{C} = \{a + ib; \, a, b \in \mathbb{R}\}$	komplexné čísla

3. Niektoré vlastnosti celých čísel

Veta. Nech M je ľubovoľná množina obsahujúca prirodzené čísla. Nech platí:
1) $1 \in M$,
2) Ak $n \in M$, tak aj $(n+1) \in M$.
Potom $M = \mathbb{N}$.

Definícia. Nech $a, b \in \mathbb{Z}$. Hovoríme, že číslo b je deliteľné číslom a, ak existuje číslo $q \in \mathbb{Z}$ také, že

$$b = a \cdot q\,.$$

Hovoríme tiež, že a delí b.

Teda: $a|b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z};\ b = a \cdot q$

Veta. (Veta o delení so zvyškom.)
Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Potom existuje práve jedna dvojica čísel $q, r \in \mathbb{Z}$ taká, že platí

$$a = b \cdot q + r \qquad \text{a} \quad \text{zároveň} \qquad 0 \leq r < |b|\,.$$

Definícia. Nech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Číslo d je najväčším spoločným deliteľom čísel a, b, ak platia podmienky:
1) $d|a \ \wedge \ d|b$,
2) ak $\exists\, c \in \mathbb{Z}$, že $c|a \ \wedge \ c|b$, tak $c \leq d$. $\qquad (c|d)$

Zapisujeme: $\quad d = \mathrm{nsd}(a, b)$.

Veta. Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ a platí $\ a = b \cdot q + r \ $ aj $\ 0 \leq r < |b|$. Potom $\quad \mathrm{nsd}(a, b) = \mathrm{nsd}(b, r)$.

Euklidov algoritmus

Definícia. Prirodzené číslo p je prvočíslo, ak má práve štyroch celočíselných deliteľov.

Veta. (Základná veta algebry.)
Nech $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ Potom

$$a = +(-)\, p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \ ,$$

pričom $\quad p_1, p_2, \ldots, p_n \quad$ sú prvočísla.

4. Kongruencie na množine celých čísel

Definícia. Nech $a, b \in \mathbb{Z}$ a nech $m \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že čísla a a b sú kongruentné modulo m, ak po delení číslom m dávajú rovnaký zvyšok. T. j.,

$$a = m \cdot q_1 + r\,, \qquad b = m \cdot q_2 + r\,, \qquad 0 \leq r < m\,.$$

Zápis: $\qquad a \equiv b \pmod m$

Definícia.(Rovnocenná s predchádzajúcou.)
$a \equiv b \pmod m \;\Leftrightarrow\; m|(a-b)\,.$

(Je oveľa výhodnejšia pri dokazovaní rôznych vlastností kongruencií.)

Veta. Nech $a, b, q, x \in \mathbb{Z}$ a nech $m, k \in \mathbb{N}$. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

1) Ak $a = m \cdot q + k$, tak $a \equiv k \pmod m$.
2) Ak $m|a$, tak $a \equiv 0 \pmod m$.
3) Ak $a \equiv b \pmod m$, tak $(a + x) \equiv (b + x) \pmod m$.
4) Ak $a \equiv b \pmod m$, tak $a \cdot x \equiv b \cdot x \pmod m$.
5) Ak $a \equiv b \pmod m$ a $c \equiv d \pmod m$, tak $(a + c) \equiv (b + d) \pmod m$.
6) Ak $a \equiv b \pmod m$ a $c \equiv d \pmod m$, tak $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$.
7) Ak $a \equiv b \pmod m$, tak $a^k \equiv b^k \pmod m$.

Veta. (Fermatova malá.)
Ak $a \in \mathbb{Z}$ a p je prvočíslo, tak $a^p \equiv a \pmod p$.

II. RELAČNÉ ŠTRUKTÚRY

1. Binárne relácie

Definícia. Karteziánsky súčin $A \times B$ množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b), pričom $a \in A$ a $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b)\,; a \in A,\ b \in B\}$$

Definícia. Nech A a B sú ľubovoľné množiny. Binárna relácia z A do B je ľubovoľná podmnožina $\mathcal{R}$ množiny $A \times B$.

$\mathcal{R} \subset A \times B \qquad (a, b) \in \mathcal{R} \qquad a\,\mathcal{R}\,b$

Definícia. Inverznou reláciou k relácii $\mathcal{R}$ je relácia
$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a);\ (a, b) \in \mathcal{R}\}$, pričom $a \in A$ a $b \in B$.

$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}^{-1}a \qquad (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$

Definícia. Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny.
Nech $\mathcal{R} \subset A \times B$,
$\mathcal{S} \subset B \times C$.
Potom relácia $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ definovaná vzťahom

$$a\,(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})\,b \Leftrightarrow \exists b \in B \,:\, (a\,\mathcal{R}\,b) \wedge (b\,\mathcal{S}\,c)$$

nazývame súčinom (kompozíciou, zložením) relácií $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$.

Veta. Nech $\mathcal{R} \subset A \times B$, $\mathcal{S} \subset B \times C$ a $\mathcal{T} \subset C \times D$ sú binárne relácie. Potom

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} = \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})\,.$$

$\mathcal{R} \subset A \times A$ – binárna relácia **na** množine A

Veta. Binárna relácia $\mathcal{R} \subset A \times A$ sa nazýva:

reflexívna $\Leftrightarrow \forall a \in A \; : \quad a\,\mathcal{R}\,a\,,$
symetrická $\Leftrightarrow \forall a, b \in A \; : \quad a\,\mathcal{R}\,b \Rightarrow b\,\mathcal{R}\,a\,,$
antisymetrická $\Leftrightarrow \forall a, b \in A \; : \quad a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a \Rightarrow a = b\,,$
tranzitívna $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A \; : \; a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,c \Rightarrow a\,\mathcal{R}\,c\,.$

Veta. Nech $\mathcal{R} \subset A \times A$ a nech $M \subset A$, $M \neq \emptyset$.
Reláciu $\mathcal{R}_M$ nazývame zúžením relácie $\mathcal{R}$ na množinu M , ak pre každé $(a, b) \in M \times M$ platí, že $a\,\mathcal{R}_M\,b \Rightarrow a\,\mathcal{R}\,b\,.$

Definícia. Binárnu reláciu $\mathcal{R} \subset A \times A$, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna, nazývame **ekvivalencia** na množine A .

Definícia. Nech A je neprázdna množina. **Rozklad** množiny A je systém množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pre ktorý platí:

1) $\emptyset \neq A_i \subset A, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

2) $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \; i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

3) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$.

Veta. Každá ekvivalencia na neprázdnej množine A definuje rozklad tejto množiny a naopak, každý rozklad množiny A definuje reláciu ekvivalencie.

2. Zobrazenia

Definícia. Zobrazenie z X do Y je binárna relácia $f \subset X \times Y$ s vlastnosťou

$$x\, f\, y \ \wedge \ x\, f\, y' \ \Rightarrow \ y = y' \ .$$

$D(f) = \{x \in X \,;\, \exists\, y \in Y \,,\, (x, y) \in f\}$ – obor definície

$H(f) = \{y \in Y \,;\, \exists\, x \in X \,,\, (x, y) \in f\}$ – obor hodnôt

Zápisy: $(x, y) \in f$ $\qquad x\, f\, y$ $\qquad y = f(x)$

Ak $D(f) = X$, hovoríme, že f je zobrazenie X **do** Y.

Zapisujeme to $f : X \to Y$.

Teda $f : X \to Y$ znamená, že $\forall x \in X \,,\, \exists^1 y \in Y \ : y = f(x)$.

Definícia. Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame **surjektívne**, ak $\forall y \in Y, \exists x \in X$, že $y = f(x)$.

Definícia. Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame **injektívne**, ak $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definícia. Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame **bijektívne**, ak je injektívne aj surjektívne.

Veta. Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie X do Y. Potom inverzná binárna relácia f^{-1} je zobrazením Y do X práve vtedy, ak zobrazenie f je bijektívne.

Definícia. Nech $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ sú zobrazenia. **Súčinom (zložením)** zobrazení f a g je zobrazenie $h : X \to Z$ definované predpisom $h(x) = g(f(x))$, pre každé $x \in X$.

Zapisujeme $h = f \circ g$. Platí teda $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

3. Mohutnosť množín

Definícia. Množina A je **ekvivalentná** s množinou B práve vtedy, ak existuje bijektívne zobrazenie $f : A \to B$.

Hovoríme tiež, že množiny A a B majú rovnakú **mohutnosť**.

Zapisujeme to: $|A| = |B| \qquad \#A = \#B \qquad \mathrm{card}\, A = \mathrm{card}\, B$

Veta. Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny.
Potom: 1) $|A| = |B| \Leftrightarrow |B| = |A|$,
2) $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$.

Definícia. Množina A je **konečná** práve vtedy, ak existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že A je ekvivalentná s množinou $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Množina A je **nekonečná**, ak nie je konečná.

Definícia. Nekonečná Množina A je:
spočítateľná práve vtedy, ak $|A| = |\mathbb{N}|$,
nespočítateľná práve vtedy, ak $|A| \neq |\mathbb{N}|$.

III. ZVÄZY A BOOLOVSKÉ ALGEBRY

1. Čiastočne usporiadané množiny

Definícia. **Čiastočným usporiadaním** na množine $A \neq \emptyset$ nazývame takú binárnu reláciu $\mathcal{R} \subset A \times A$, ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Definícia. **(rovnocenná)** Nech $A \neq \emptyset$. Potom binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine A je **Čiastočné usporiadanie**, ak

1) $\forall a \in A : \quad a \,\mathcal{R}\, a\,,$
2) $\forall a, b \in A : \quad a \,\mathcal{R}\, b \wedge b \,\mathcal{R}\, a \Rightarrow a = b\,,$
3) $\forall a, b, c \in A : a \,\mathcal{R}\, b \wedge b \,\mathcal{R}\, c \Rightarrow a \,\mathcal{R}\, c\,.$

Usporiadaná dvojica $(A; \mathcal{R})$ sa nazýva **čiastočne usporiadaná množina**.

Definícia. ČUM $(A; \mathcal{R})$ sa nazýva **reťazec** (**lineárne usporiadaná množina**), ak

$$\forall a, b \in A \; : \; a \,\mathcal{R}\, b \;\vee\; b \,\mathcal{R}\, a \,.$$

Hovoríme, že prvky $a, b \in A$ sú **porovnateľné** v $(A; \mathcal{R})$.

Definícia. Hovoríme, že prvok b **pokrýva** prvok a , ak $a \,\mathcal{R}\, b$, $a \neq b$, pričom neexistuje $x \in A$ také, že $x \neq a$, $x \neq b$ a platí $a \,\mathcal{R}\, x \wedge x \mathcal{R}\, b$.

Definícia. Nech $(A; \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina.
Prvok $a \in A$ je **minimálny** v $(A; \mathcal{R})$, ak $\nexists\, x \in A$, $x \neq a$, že $x \,\mathcal{R}\, a$,

Prvok $b \in A$ je **maximálny** v $(A; \mathcal{R})$, ak $\nexists\, x \in A$, $x \neq b$, že $b \,\mathcal{R}\, x$,

Prvok $c \in A$ je **najmenší** v $(A; \mathcal{R})$, ak $\forall\, x \in A$, platí $c \,\mathcal{R}\, x$,

Prvok $d \in A$ je **najväčší** v $(A; \mathcal{R})$, ak $\forall\, x \in A$, platí $x \,\mathcal{R}\, d$.

Definícia. Nech $(A; \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina a nech $\emptyset \neq M \subset A$.
Množina

$$h(M) = \{x \in A;\ (\forall a \in M :\ a\,\mathcal{R}\,x)\}$$

je **množina všetkých horných ohraničení** množiny M a množina

$$d(M) = \{x \in A;\ (\forall a \in M :\ x\,\mathcal{R}\,a)\}$$

je **množina všetkých dolných ohraničení** množiny M.

Najmenší prvok množiny $h(M)$, ak existuje, sa nazýva **suprémum** množiny M a zapisuje sa $\sup M$.

Najväčší prvok množiny $d(M)$, ak existuje, sa nazýva **infimum** množiny M a zapisuje sa $\inf M$.

2. Zväzy

Poznámka. V tejto kapitole symboly $\vee$ a $\wedge$ nebudú znamenať logické „a zároveň“, resp. „alebo“ .

$\inf\{x,y\} = x \wedge y$ **priesek** prvkov x a y
$\sup\{x,y\} = x \vee y$ **spojenie** prvkov x a y

Definícia. **Zväz** je taká čiastočne usporiadaná množina, v ktorej pre každé dva prvky **existuje** priesek aj spojenie.

Veta. Nech $(A;\mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina. Potom pre ľubovoľné prvky $x, y, z \in A$ platí:

$x \vee x = x$; $x \wedge x = x$ **idempotentnosť**,
$x \vee y = y \vee x$; $x \wedge y = y \wedge x$ **komutatívnosť**,
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ **asociatívnosť**,
$x \vee (y \wedge x) = x$ $x \wedge (y \vee x) = x$ **absorbcia**.

Definícia. **(Ekvivalentná definícia zväzu.)** Nech $(L; \vee, \wedge)$, $L \neq \emptyset$, je algebraický systém, v ktorom pre binárne operácie $\vee$ a $\wedge$ platia vlastnosti:
1) idempotentnosť,
2) komutatívnosť,
3) asociatívnoať,
4) absorbcia.
Potom $(L; \vee, \wedge)$, je **zväz**.

Definícia. Nech $(L; \vee, \wedge)$ a $(M; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$, $\emptyset \neq M \subset L$, sú zväzy. Potom $(M; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$, sa nazýva **podzväz** zväzu $(L; \vee, \wedge)$, ak
$\forall x, y \in M$ je $x \dot{\vee} y = x \vee y$
aj $x \dot{\wedge} y = x \wedge y$.

Definícia. Zväz $(L; \vee, \wedge)$ sa nazýva **distributívny**, ak pre každé $x, y, z \in L$ platí:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\,,$$

aj

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\,.$$

Definícia. Zväzy $(L; \vee, \wedge)$ a $(L^*; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$ sú **izomorfné**, ak existuje **bijektívne** zobrazenie $\varphi : L \to L^*$ také, že pre všetky $x, y \in L$ platí:

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \,\dot{\vee}\, \varphi(y)\,,$$

aj

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \,\dot{\wedge}\, \varphi(y)\,.$$

Takéto zobrazenie $\varphi : L \to L^*$ sa nazýva **izomorfizmus** zväzov $(L; \vee, \wedge)$ a $(L^*; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$.

Zápis: $(L; \vee, \wedge) \cong (L^*; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$

V každom **konečnom** zväze existuje:
najväčší prvok I – **horné univerzálne ohraničenie** ,
najmenší prvok 0 – **dolné univerzálne ohraničenie** .

Definícia. Nech $(L; \vee, \wedge, 0, \mathrm{I})$ je (konečný) zväz. Prvok $x' \in L$ nazývame **komplementom** k prvku $x \in L$ práve vtedy, ak

$$x \vee x' = \mathrm{I} \qquad \mathrm{a} \qquad x \wedge x' = 0 \ .$$

Definícia. Zväz $(L; \vee, \wedge, 0, \mathrm{I})$ sa nazýva **komplemenárny** práve vtedy, ak každý jeho prvok má komplement.

Definícia. Zväz, ktorý je distributívny aj komplementárny nazývame **boolovským** zväzom.

Veta. V boolovskom zväze $(L; \vee, \wedge, 0, \mathrm{I})$ má každý prvok práve jeden komplement.

3. Boolovské algebry

$'$ – unárna operácia z L do L
$\vee, \wedge$ – binárne operácie z $L \times L$ do L
$0, \mathrm{I}$ – konštanty (univerzálne ohraničenia)

$(L; \vee, \wedge, 0, \mathrm{I})$ – boolovský zväz $\approx$ $(L; \vee, \wedge, {}', 0, \mathrm{I})$ – boolovská algebra

Definícia. **Boolovská algebra** je algebraický systém
$\mathcal{B} = (L; \vee, \wedge, {}', 0, \mathrm{I})$, $L \neq \emptyset$, v ktorom pre ľubovoľné x, y, z platí:

(1) $x \vee y = y \vee x$
(2) $x \wedge y = y \wedge x$
(3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
(4) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
(5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
(6) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
(7) $x \vee 0 = x$
(8) $x \wedge \mathrm{I} = x$
(9) $x \vee x' = \mathrm{I}$
(10) $x \wedge x' = 0$

Veta. Nech $\mathcal{B} = (L; \vee, \wedge, {}', 0, \mathrm{I})$ je boolovská algebra. Potom pre každé $x, y, z \in L$ platí:

1) $x \vee x = x \wedge x = x$
2) $x \wedge 0 = 0$
3) $x \vee \mathrm{I} = \mathrm{I}$
4) $(x')' = x$
5) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$
6) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
7) $x \vee (y \wedge x) = x \wedge (y \vee x) = x$
8) $x \vee (x' \wedge y) = x \vee y$
9) $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$
10) $x \vee y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
11) $x \wedge y = \mathrm{I} \Leftrightarrow x = y = \mathrm{I}$
12) $x = y \Leftrightarrow (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0$
13) $x = y \Leftrightarrow (x \vee y') \wedge (x' \vee y) = \mathrm{I}$

4. Boolovské funkcie

Definícia. Nech $(D; \vee, \wedge, {}', 0, 1)$ je boolovská algebra, pričom $D = \{0, 1\}$. Každá funkcia

$$f : D^n \to D$$

sa nazýva **boolovská funkcia** n premenných.

Zápis: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i, y \in D$.

Veta. Existuje práve 2^{2^n} rôznych boolovských funkcií n premenných.

Dôkaz.

$$n = 2 \qquad f : D^2 \to D$$

$$f : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

(x_1, x_2)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
(0,0)	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
(0,1)	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
(1,0)	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
(1,1)	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1

$$\begin{array}{llll}
f_1 = x_1 & f_5 = x_1 \wedge x_2 & f_9 = x_1 \vee x_2 & f_{13} = x_1 \wedge x_1' \\
f_2 = x_2 & f_6 = x_1 \wedge x_2' & f_{10} = x_1 \vee x_2' & f_{14} = x_1 \vee x_1' \\
f_3 = x_1' & f_7 = x_1' \wedge x_2 & f_{11} = x_1' \vee x_2 & f_{15} = (x_1 \wedge x_2') \vee (x_1' \wedge x_2) \\
f_4 = x_2' & f_8 = x_1' \wedge x_2' & f_{12} = x_1' \vee x_2' & f_{16} = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1' \wedge x_2')
\end{array}$$

Definícia. Nech $x_i^* = \begin{cases} x_i \\ x_i' \end{cases}$, pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$.
Boolovskú funkciu

$$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^* \wedge x_2^* \wedge \cdots \wedge x_n^*$$

nazývame **elementárna konjunkcia**.

Boolovskú funkciu

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^* \vee x_2^* \vee \cdots \vee x_n^*$$

nazývame **elementárna disjunkcia**.

Veta. Existuje práve 2^n rôznych elementárnych konjunkcií (elementárnych disjunkcií) z D^n do D .

Dôkaz.

Definícia. Nech $k_1, k_2, \dots, k_j$, $0 \le j \le 2^n$, sú rôzne elementárne konjunkcie.
Funkcia

$$f = 0 \vee k_1 \vee k_2 \vee \cdots \vee k_j$$

je boolovská funkcia s n premennými v **normálnom disjunktívnom tvare**. (NDT, resp. NDF)

Nech $d_1, d_2, \dots, d_r$, $0 \le r \le 2^n$, sú rôzne elementárne disjunkcie.
Funkcia

$$f = 1 \wedge d_1 \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge d_r$$

je boolovská funkcia s n premennými v **normálnom konjunktívnom tvare**. (NKT, resp. NKF)

Veta. Každá boolovská funkcia sa dá zapísať v NDT aj v NKT.

Dôkaz.

IV. VÝROKOVÁ LOGIKA

1. Výroky a formuly výrokovej logiky

Matematická logika:
– Nástroj na presnú formuláciu a správny spôsob uvažovania.
– Zaoberá sa jazykom matematiky s cieľom presne formulovať tvrdenia tak, aby nedochádzalo k rozporom a nedorozumeniam.
– Pri formálnom zápise abstrahuje od významu použitých symbolov.

Sémantika:
– V jazykovede – význam slov, viet, textu.
– V logike – význam a zmysel symbolov a formúl z nich zložených.

Syntax:
– V jazykovede – pravidlá spájania slov do viet a vetných celkov.
– V logike – zostavovanie reťazcov symbolov podľa daných pravidiel.
– odvodzovacie pravidlá na vytváranie nových reťazcov symbolov (logických formúl).

Definícia. Výrok (zložený výrok) je oznamovacia veta, pri ktorej má zmysel uvažovať, či je alebo nie je pravdivá.

Elementárny výrok je výrok, ktorý prestáva byť výrokom vynechaním akejkoľvek jeho časti.

symboly pre elementárne výroky: $p, q, r, \ldots \quad A, B, C, \ldots$

p – je pondelok
q – dnes máme prednášku z diskrétnej matematiky
r – chce sa mi učiť

Zložený výrok vznikne spájaním elementárnych výrokov pomocou logických spojok

Logické spojky:

$\neg$	**negácia**	„nie je pravda, že“	
$\wedge$	**konjunkcia**	„a“	(a zároveň)
$\vee$	**disjunkcia**	„alebo“	
$\Rightarrow$	**implikácia**	„ak ..., tak ...“	
$\Leftrightarrow$	**ekvivalencia**	„práve vtedy, ak“	

Definícia. **Abeceda** výrokovej logiky je množina symbolov:

1) $p, q, r, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ – výrokové premenné
2) $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ – logické spojky
3) (,), [,], ... – pomocné symboly.

Slovo nad abecedou výrokovej logiky je ľubovoľná postupnosť symbolov výrokovej logiky.

Poznámka. Nie každé slovo dáva zmysel. Napríklad slovo

$$\alpha \ : \ \ p \Rightarrow q \Rightarrow r \ ,$$

nedáva zmysel.
Ale slová

$$\beta \ : \ \ p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \ , \qquad \gamma \ : \ (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

už zmysel dávajú.

Definícia. Slovo α nad abecedou výrokovej logiky sa nazýva **formula** výrokovej logiky práve vtedy, ak existuje postupnosť slov

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

taká, že α_n je slovo α a pre každé $i \leq n$ je splnená jedna z podmienok:

1) α_i je výroková premenná ,

2) α_i je negácia niektorého zo slov $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$,

3) α_i je tvaru $(\alpha_j \wedge \alpha_k)$, $(\alpha_j \vee \alpha_k)$, $(\alpha_j \Rightarrow \alpha_k)$, $(\alpha_j \Leftrightarrow \alpha_k)$,

pre nejaké $j, k < i$.

Postupnosť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sa nazýva **vytvárajúca postupnosť** formuly α .

Definícia. **Podformula** formuly α je formula výrokovej logiky, ktorá sa vyskytuje vo všetkých vytvárajúcich postupnostiach formuly α .

Slovo

$$\alpha \ : \ \wedge()\neg p \Rightarrow q$$

nie je formula výrokovej logiky, ale slovo

$$\beta \ : \ (p \vee r) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow \neg p) \wedge r)$$

je formula výrokovej logiky.

Postupnosť

$$p, r, q, \neg p,\ p \vee r,\ q \Rightarrow \neg p, (q \Rightarrow \neg p) \wedge r,\ (p \vee r) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow \neg p) \wedge r)$$

je minimálna vytvárajúca postupnosť formuly β .

2. Ekvivalencia formúl výrokovej logiky

Zaujímajú nás formuly výrokovej logiky z hľadiska syntaxu, t.j. zaujíma nás význam, ktorý dávajú z pohľadu toho, či sú pravdivé alebo nepravdivé.
Keďže formuly sa skladajú z elementárnych výrokov, tak nás zaujíma ako závisí ich pravdivosť, resp. nepravdivosť od toho, ako sú pravdivé, resp. nepravdivé elementárne výroky, z ktorých tá formula pozostáva.

Výrokové premenné sú symboly, ktorými označujeme **elementárne výroky**.
Napríklad: $p, q, r, \ldots, x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$

Definícia. **Pravdivostné ohodnotenie** u výrokových premenných je priradenie hodnoty 0 alebo hodnoty 1 každej z výrokových premenných.

$u(p) = 1$ znamená, že p je pravdivý elementárny výrok.
$u(p) = 0$ znamená, že p je nepravdivý elementárny výrok.

O každej formule výrokovej logiky vieme potom rozhodnúť, či je pravdivá alebo nepravdivá na základe nasledujúcich pravidiel:

$\neg\alpha$ je pravdivá práve vtedy, ak α je nepravdivá,

$\alpha \wedge \beta$ je pravdivá práve vtedy, ak α aj β súčasne sú pravdivé,

$\alpha \vee \beta$ je pravdivá práve vtedy, ak aspoň jedna z α, β je pravdivá,

$\alpha \Rightarrow \beta$ je nepravdivá práve vtedy, ak α je pravdivá a β je nepravdivá,

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ je pravdivá práve vtedy, ak obe α aj β sú pravdivé,
alebo obe α aj β sú nepravdivé.

Definícia. Ak $u(\alpha) = 1$, hovoríme, že formula α je pravdivá pri ohodnotení u výrokových premenných.
Ak $u(\alpha) = 0$, hovoríme, že formula α je nepravdivá pri ohodnotení u výrokových premenných.

Definícia. Formula výrokovej logiky sa nazýva **tautológia** práve vtedy, ak je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných.
Formula výrokovej logiky sa nazýva **kontradikcia** práve vtedy, ak je nepravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných.

Označenie: T – tautológia
F – kontradikcia

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_k$ – formuly výrokovej logiky

$\mathcal{S} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_k\}$ – systém formúl výrokovej logiky

Definícia. Formula výrokovej logiky sa nazýva **splniteľná** práve vtedy, ak je pravdivá pri nejakom ohodnotení výrokových premenných.

Systém formúl $\mathcal{S}$ sa nazýva **splniteľný** práve vtedy, ak existuje ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému.

Zaujíma nás, či z pravdivosti nejakých formúl vyplýva aj pravdivosť iných formúl.

Definícia. Hovoríme, že formula φ je **sémantickým dôsledkom** systému formúl $\mathcal{S}$ (vyplýva z tohto systému) práve vtedy, ak je pravdivá pri všetkých tých ohodnoteniach výrokových premenných, pri ktorých je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$.

Zápis: $\mathcal{S} \models \varphi$

Definícia. Hovoríme, že systém formúl $\mathcal{T}$ je **sémantickým dôsledkom** systému formúl $\mathcal{S}$ práve vtedy, ak každá formula z $\mathcal{T}$ je pravdivá pri všetkých tých ohodnoteniach výrokových premenných, pri ktorých je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$.

Zápis: $\mathcal{S} \models \mathcal{T}$

Poznámka.

Ak $\mathcal{S} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$, tak môžeme písať aj

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\} \models \varphi\,, \quad \text{resp.} \quad \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\} \models \mathcal{T}\,.$$

Ak $\mathcal{S} = \{\psi\}$, tak môžeme písať aj $\psi \models \varphi$, resp. $\psi \models \mathcal{T}$.

Ak $\mathcal{S} = \emptyset$, tak môžeme písať aj $\models \varphi$, resp. $\models \mathcal{T}$.

Platí.

$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$ práve vtedy, ak $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \wedge \neg\psi$ je kontradikcia.

Vlastnosti vyplývania.

Veta. Ak $\mathcal{S}$ je systém formúl a $\varphi \in \mathcal{S}$, tak $\mathcal{S} \models \varphi$.

Myšlienka dôkazu: Ak sú pravdivé všetky formuly v $\mathcal{S}$, tak je zrejmé, že je pravdivá aj formula φ.

Veta. Tautológia je sémantickým dôsledkom každého systému formúl. (Aj $\models T$.)

Myšlienka dôkazu: Neexistuje ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom by bola pravdivá každá formula systému, ale tautológia nie.

Veta. Formula φ je tautológia práve vtedy, ak $\models \varphi$.

Myšlienka dôkazu: Vzhľadom na predchádzajúcu vetu stačí ukázať, že ak $\models \varphi$, tak φ je tautológia. Ak by φ nebola tautológia, tak existuje ohodnotenie u výrokových premenných, že $u(\varphi) = 0$. Potom ale nemôže platiť $\models \varphi$, pretože aj pri tomto ohodnotení výrokových premenných sú všetky formuly prázdnej množiny pravdivé.

Veta. Každá formula je sémantickým dôsledkom systému formúl $\mathcal{S} = \{\varphi, \neg\varphi\}$.

Myšlienka dôkazu: Ak by nejaká formula ψ nebola sémantickým dôsledkom systému $\{\varphi, \neg\varphi\}$, tak by musela byť nepravdivá za predpokladu, že obe formuly φ aj $\neg\varphi$ sú pravdivé. To je nemožné.

Veta. Pre ľubovoľné systémy formúl $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{R}$ platí:
a) ak $\mathcal{S}$ je podsystém systému $\mathcal{T}$, tak $\mathcal{T} \models \mathcal{S}$,
b) ak $\mathcal{T} \models \mathcal{S}$ a $\mathcal{S} \models \mathcal{R}$, tak $\mathcal{T} \models \mathcal{R}$.

Veta. Pre ľubovoľný systém formúl $\mathcal{S}$ a pre formulu φ platí $\mathcal{S} \models \varphi$ práve vtedy ak $\mathcal{S} \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplniteľný systém.

Myšlienka dôkazu: Nech $\mathcal{S} \models \varphi$. Potom pri každom ohodnotená výrokových premenných, pri ktorom sú pravdivé všetky formuly z $\mathcal{S}$, je pravdivá aj formula φ. Teda $\neg\varphi$ je nepravdivá a $\mathcal{S} \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplniteľný systém.
Naopak, nech $\mathcal{S} \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplniteľný systém. Potom pre ohodnotenie, pri ktorom je pravdivá každá formula z $\mathcal{S}$ je $\neg\varphi$ nepravdivá. Teda φ je pravdivá formula a platí $\mathcal{S} \models \varphi$.

Definícia. Hovoríme, že formuly φ a ψ sú **sémanticky ekvivalentné** práve vtedy, ak

$$\varphi \models \psi \quad \text{a zároveň} \quad \psi \models \varphi\,.$$

T.j. φ a ψ sú sémanticky ekvivalentné, ak pre každé ohodnotenie u výrokových premenných platí $u(\varphi) = u(\psi)$.

Zápis: $\varphi \models\!\dashv \psi$

Veta. $\varphi \models\!\dashv \psi$ práve vtedy, ak $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautológia.

Dôsledok. Pre každé dve tautológie T_1 a T_2 platí $T_1 \models\!\dashv T_2$.
Pre každé dve kontradikcie F_1 a F_2 platí $F_1 \models\!\dashv F_2$.

Veta. Relácia $\models\!\dashv$ je ekvivalencia.

$\mathcal{F}$ – systém všetkých formúl výrokovej logiky

$\mathcal{F}_e$ – množina tried ekvivalencie

Veta. Pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky α, β, γ a pre ľubovoľnú tautológiu T ako aj pre ľubovoľnú kontradikciu F platí:

(1) $\alpha \wedge \beta \models\mid \beta \wedge \alpha$

(2) $\alpha \vee \beta \models\mid \beta \vee \alpha$

(3) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \models\mid (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

(4) $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \models\mid (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$

(5) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \models\mid (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

(6) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \models\mid (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

(7) $T \wedge \alpha \models\mid \alpha$

(8) $F \vee \alpha \models\mid \alpha$

(9) $\alpha \wedge \neg\alpha \models\mid F$

(10) $\alpha \vee \neg\alpha \models\mid T$

Záver.
Nech $\mathcal{F}$ je systém všetkých formúl výrokovej logiky pre n výrokových premenných. Potom $(\mathcal{F}_e; \vee, \wedge, \neg, T, F)$ je boolovská algebra.

Veta. Pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky α, β, γ a pre ľubovoľnú tautológiu T ako aj pre ľubovoľnú kontradikciu F platí:

1. $\alpha \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$ $\qquad$ $\alpha \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$
2. $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \models\!\!\!\dashv \alpha$ $\qquad$ $\alpha \vee (\beta \wedge \alpha) \models\!\!\!\dashv \alpha$
3. $\neg\neg\alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$
4. $\neg(\alpha \wedge \beta) \models\!\!\!\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\qquad$ $\neg(\alpha \vee \beta) \models\!\!\!\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
5. $\alpha \Rightarrow \beta \models\!\!\!\dashv \neg\alpha \vee \beta$
6. $\alpha \Rightarrow \beta \models\!\!\!\dashv \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$

Back
Close

7. $\alpha \Leftrightarrow \beta \models\!\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

8. $\alpha \wedge \beta \models\!\!\!\!\dashv \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)$

9. $\alpha \vee \beta \models\!\!\!\!\dashv \neg\alpha \Rightarrow \beta$

10. $\alpha \Leftrightarrow \beta \models\!\!\!\!\dashv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$

3. Realizácia formúl výrokovej logiky pomocou boolovských funkcií

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ – výrokové premenné

u – ohodnotenie výrokových premenných, t.j. $u(p_i) \in D = \{0, 1\}$

$\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – formula výrokovej logiky

K usporiadanej n – tici výrokových premenných $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ existuje usporiadaná n – tica $(u(p_1), u(p_2), \ldots, u(p_n))$ ich ohodnotení, pričom $(u(p_1), u(p_2), \ldots, u(p_n)) \in D^n$.

Potom pre formulu výrokovej logiky $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ je

$u(\varphi) = u(\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n))$ prvok z množiny $D = \{0, 1\}$.

Takže $u : D^n \to D$.

Veta. Ku každej formule $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ výrokovej logiky existuje boolovská funkcia $f : D^n \to D$, ktorá ju realizuje.

I. Grafy

1. Definícia grafu

V – ľubovoľná konečná množina (aj prázdna)

$\binom{V}{2} = \{A \subset V \ : \ |A| = 2\}$ – množina všetkých dvojprvkových podmnožín množiny V

Definícia. Nech V je ľubovoľná konečná množina a nech $H \subset \binom{V}{2}$. Potom usporiadaná dvojica (V, H) sa nazýva **graf**.

Zápis. $G = (V, H)$

V sa nazýva **vrcholová množina** , jej prvky sa nazývajú **vrcholy**.

H sa nazýva **hranová množina** , jej prvky sa nazývajú **hrany**.

Nech $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a nech $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$.

Ak $h_k = \{v_i, v_j\}$, tak hovoríme, že hrana h_k inciduje s vrcholmi v_i a v_j, resp. vrcholy v_i a v_j incidujú s hranou h_k.
Tiež hovoríme, že vrcholy v_i a v_j sú koncové vrcholy hrany h_k.

Hrany h_k a h_l sa nazývajú susedné, ak incidujú s tým istým vrcholom.

Vrcholy v_i a v_j sa nazývajú susedné, ak incidujú s tou istou hranou.

$K_n = (V, \binom{V}{2})$ – kompletný graf na n vrcholoch, t.j. $|V| = n$.

$D_n = (V, \emptyset)$ – diskrétný graf na n vrcholoch, t.j. $|V| = n$.

$G = (\emptyset, \emptyset)$ – prázdny graf.

Definícia. Graf $G_1 = (V_1, H_1)$ je **podgrafom** grafu $G = (V, H)$, ak $V_1 \subset V$ a $H_1 \subset H$.

Zápis. $G_1 \subset G$

G_1 je vlastným podgrafom grafu G , ak $G_1 \subset G$, ale $G_1 \neq G$.

Definícia. Podgraf $G_1 = (V, H_1)$ grafu $G = (V, H)$ sa nazýva **faktor** grafu $G = (V, H)$.

Back
Close

Nech $G = (V, H)$, nech $u, v \in V(G)$ a nech $h \in H(G)$.

$G - v = (V', H')$, pričom $V' = V \setminus \{v\}$ a $H' = H \setminus \{\{u, v\} ; u \in V\}$
– vynechanie vrcholu v z grafu G .

$G - h = (V, H')$, pričom $H' = H \setminus \{h\}$
– vynechanie hrany h z grafu G .

$G + h = (V, H')$, pričom $H' = H \cup \{h\}$ a zároveň $h = \{u, v\}$

– pridanie hrany h ku grafu G .

Definícia. Nech $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$.
Zjednotením grafov G_1 a G_2 je graf $G = (V_1 \cup V_2, H_1 \cup H_2)$.
Prienikom grafov G_1 a G_2 je graf $G = (V_1 \cap V_2, H_1 \cap H_2)$.

Zápis. $G_1 \cup G_2$, resp. $G_1 \cap G_2$

Definícia. Nech $G_1 = (V_1, H_1)$ je podgrafom grafu $G = (V, H)$.
Rozdielom grafu G a G_1 nazývame taký minimálny graf $G_2 \subset G$, pre ktorý platí, že $G = G_1 \cup G_2$.

Definícia. **Komplementom** grafu $G = (V, H)$ nazývame graf $\overline{G} = (V, \binom{V}{2}) \setminus H)$.

Grafy G a $\overline{G}$ sú navzájom komplementárne.

Definícia. Nech $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$.
Hovoríme, že grafy G_1 a G_2 sú **izomorfné**, ak existuje bijektívne zobrazenie $\varphi : V_1 \to V_2$ také, že

$$\forall u, v \in V_1 \quad \text{platí} \quad \{u, v\} \in H_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in H_2 .$$

Zobrazenie φ sa nazýva **izomorfizmus** grafov G_1 a G_2.

Zápis. $G_1 \cong G_2$

2. Súvislosť grafu

Definícia. Nech $G = (V, H)$ a nech $u \in V$ je ľubovoľný vrchol grafu G.
Nech $\Gamma(u) = \{v \in V \,:\, \{u, v\} \in H\}$ je množina susedov vrchola u.
Číslo $\delta_G(u) = |\Gamma(u)|$ nazývame **stupeň** vrchola u v grafe G.

Ak $\delta_G(u) = 0$, vrchol u je **izolovaný**.

Veta. Pre ľubovoľný graf $G = (V, H)$ platí

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2 \cdot |H| \,.$$

Dôsledok. Počet vrcholov s nepárnym stupňom je v každom grafe číslo párne.

Definícia. Graf $G = (V, H)$, ktorý má všetky vrcholy stupňa k sa nazýva **pravidelný graf stupňa** k.
(Niekedy tiež regulárny.)

Definícia. Postupnosť nezáporných celých čísel sa nazýva **grafová**, ak existuje graf s odpovedajúcimi stupňami vrcholov.

Veta. (Havlova, 1955)
Nech pre postupnosť $s_1, s_2, \ldots, s_n$ nezáporných celých čísel platí

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots \geq s_n \ .$$

Táto postupnosť je grafová práve vtedy, ak je grafová aj postupnosť

$$s_2 - 1, s_3 - 1, \ldots, s_{s_1+1} - 1, s_{s_1+2}, \ldots, s_n \ .$$

Definícia. Nach pre danú dvojicu vrcholov u a v existuje striedajúca postupnosť vrcholov a hrán

$$v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, h_3, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n \ ,$$

kde $v_i \in V$ pre $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, pričom $v_0 = u$, $v_n = v$
a $h_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$ pre $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Takúto postupnosť nazývame **sledom** dĺžky n medzi vrcholmi u a v.

Ak $u = v$ ($u \neq v$), tak sled je uzavretý (otvorený).

Obvykle na určenie sledu zapisujeme iba postupnosť vrcholov,
teda $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Špeciálne sledy:

ťah – sled, v ktorom sú všetky hrany rôzne

cesta – ťah, v ktorom sú všetky vrcholy rôzne (aj hrany)

kružnica – uzavretá cesta dĺžky aspoň 3.

Dĺžka ťahu, cesty P_n, kružnice C_n je rovná počtu hrán.

Definícia. Hovoríme, že graf G je **súvislý**, ak pre každé dva jeho vrcholy že u a v existuje v ňom sled (cesta) z u do v.
Graf, ktorý nie je súvislý, sa nazýva **nesúvislý**.

Definícia. **Komponent** grafu G je každý jeho maximálny súvislý podgraf.
Taký súvislý podgraf, ktorý nie je podgrafom žiadneho iného podgrafu tohto grafu.

Veta. Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, je graf, v ktorom súčet stupňov ľubovoľnej dvojice nesusedných vrcholov je aspoň $n - 1$.
Potom graf G je súvislý.

Veta. Nech $G = (V, H)$, $|V| \geq 2$, je súvislý graf.
Potom v G existujú aspoň dva také vrcholy, že vynechaním ľubovoľného z nich sa súvislosť grafu G neporuší.

Veta. Nech $G = (V, H)$ je konečný súvislý graf. Potom

$$|V| - 1 \leq |H| \leq |\tbinom{V}{2}| .$$

3. Vzdialenosť v grafe

Definícia. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf.
Vzdialenosť $d(u, v)$ vrcholov u a v v grafe G je dĺžka najkratšej cesty spájajúcej vrcholy u a v.

Na vzdialenosť v grafe sa môžeme pozerať ako na zobrazenie $d : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, ktoré má nasledujúce vlastnosti:

1. $d(u, v) \geq 0; \qquad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,
2. $d(u, v) = d(v, u)$,
3. $d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v)$ pre všetky $z \in V$.

Tieto vlastnosti sú axiómy metriky, preto usporiadaná dvojica (V, d) je metrický priestor.

Definícia. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf.
Excentricita vrcholu u v grafe G je číslo

$$e(u, G) = \max_{v \in V} \{d(u, v)\}.$$

Priemer grafu G je číslo

$$P(G) = \max_{v \in V} \{e(v, G)\}.$$

Polomer grafu G je číslo

$$r(G) = \min_{v \in V} \{e(v, G)\}.$$

Stred grafu G je množina vrcholov, ktorých excentricita je rovná polomeru.

Poznámka. Priemer grafu G môžeme definovať aj vzťahom

$$P(G) = \max_{u,v \in V} \{d(u, v)\}.$$

Veta. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf. Potom

$$r(G) \leq P(G) \leq 2 \cdot r(G) \ .$$

4. Maticová reprezentácia grafu

Definícia. Nech $G = (V, H)$, pričom $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$.

Maticou incidencie grafu G nazývame maticu $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ typu $n \times m$, ak pre jej prvky platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ak hrana } h_j \text{ je incidentná s vrcholom } v_i\,, \\ 0\,, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Veta. Dva grafy sú izomorfné práve vtedy, ak ich matice incidencie sa stotožnia po konečnom počte permutácií riadkov a stĺpcov jednej z nich.

Definícia. Nech $G = (V, H)$, pričom $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Maticou susednosti grafu G nazývame maticu $\mathbf{B} = (b_{i,j})$ typu $n \times n$, ak pre jej prvky platí

$$b_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } \{v_i, v_j\} \in H\,, \\ 0\,, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Veta. Dva grafy sú izomorfné práve vtedy, ak ich matice susednosti sa stotožnia po konečnom počte rovnakých permutácií riadkov aj stĺpcov jednej z nich.

$\mathbf{B}$ – matica susednosti grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$

$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B} + \mathbf{I}$

$\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$ $\qquad b_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}^{(1)} \cdot b_{k,j}^{(1)}$ $\quad$ Pozor! $\quad 1 + 1 = 1$

$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k-1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$

Veta. Nech $\mathbf{B}$ je matica susednosti súvislého grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$.
Potom pre ľubovoľné $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je prvok $b_{i,j}^{(k)}$ matice $\mathbf{B}^{(k)}$ rovný jednej práve vtedy, ak $d(v_i, v_j) \leq k$.

Dôsledok 1. Graf $G = (V, H)$, $|V| = n$, je súvislý práve vtedy, ak všetky prvky matice $\mathbf{B}^{(n-1)}$ sú rovné 1.

Dôsledok 2. Pre každú dvojicu vrcholov v_i a v_j grafu $G = (V, H)$ platí $\quad d(v_i, v_j) = \min\{k\,;\ b_{i,j}^{(k)} = 1\}$.

Veta. Nech $\mathbf{A}$ je matica incidencie grafu $G = (V, H)$ a $\mathbf{A}^T$ je transponovaná matica k $\mathbf{A}$. Nech $\mathbf{B}$ je matica susednosti a nech $\mathbf{D}$ je diagonálna matica. (Na hlavnej diagonále sú stupne vrcholov a ostatné prvky sú nuly.) Potom platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{B} + \mathbf{D} \ .$$

II. STROMY

1. Stromy a ich vlastnosti

Definícia. **Strom** je neprázdný súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnicu. **Les** je graf, ktorého komponenty sú stromy.

Veta. Nech $T = (V, H)$, $|H| \geq 1$, je strom. Potom v T existujú aspoň dva vrcholy stupňa jeden.

Veta. Nech $T = (V, H)$ je strom. Potom

$$|H| = |V| - 1 \ .$$

Dôkaz. Matematická indukcia vzhľadom na počet vrcholov.

1. Základný krok:
Nech $n = 1$.
Potom strom $T = (V, H)$ obsahuje jediný vrchol a žiadnu hranu. Teda

platí $|H| = |V| - 1$.

Indukčný predpoklad (I.P.):
Nech pre nejaké $n \geq 1$ tvrdenie vety platí pre každý n–vrcholový strom.

2. Indukčný krok:
Uvažujme ľubovoľný strom $T = (V, H)$ s $|V| = n+1$ vrcholmi. Podľa predchádzajúcej vety, T obsahuje aspoň dva vrcholy stupňa jeden. Nech $\delta_T(v) = 1$.
Potom strom $T_1 = (V_1, H_1) = T - v$ získaný z T vynechaním vrchola v (a hrany s ním incidentnej) obsahuje n vrcholov. Takže podľa I.P. preň veta platí. Teda

$$|H_1| = |V_1| - 1 .$$

Keďže $|H_1| = |H| - 1$ a $|V_1| = |V| - 1$, dostávame

$$|H| - 1 = (|V| - 1) - 1$$

teda

$$|H| = |V| - 1$$

a veta platí aj pre $(n+1)$–vrcholový strom $T = (V, H)$.

Back
Close

Veta. Graf $G = (V, H)$ je stromom $\Leftrightarrow$ ak medzi ľubovoľnou dvojicou jeho vrcholov existuje práve jedna cesta.

Ľubovoľné tri z nasledujúcich vlastností implikujú zvyšnú:

(a) T je súvislý graf,

(b) T neobsahuje kružnicu,

(c) T má $|V| = n$ vrcholov,

(d) T má $n - 1$ hrán.

Priemer a polomer stromu:

Veta. Nech $T = (V, H)$ je strom.
Ak priemer stromu $P(T)$ je číslo párne, tak stredom stromu je jeden vrchol a platí

$$P(T) = 2 \cdot r(T)\,.$$

Ak priemer stromu $P(T)$ je číslo nepárne, tak stredom stromu sú dva vrcholy a platí

$$P(T) = 2 \cdot r(T) - 1\,.$$

2. Kostry a kružnice

Definícia. **Kostra** grafu $G = (V, H)$ je taký jeho faktor, ktorý je stromom.
T.j., podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy, je súvislý a neobsahuje kružnicu.

Veta. V grafe $G = (V, H)$ existuje kostra $\Leftrightarrow$ ak G je súvislý.

Veta. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf a nech T je jeho podgraf s $|V| - 1$ hranami, ktorý neobsahuje kružnicu.
Potom T je kostra grafu G.

Definícia. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf a nech $T = (V, H_v)$ je kostra grafu G.
Hrany grafu G patriace kostre T sú **vetvy** grafu G vzhľadom na kostru T. (H_v)
Ostatné rany grafu G sú **tetivy** grafu G vzhľadom na kostru T. $(H_t = H - H_v)$

Graf $G = (V, H)$ obsahuje
$|V| - 1$ vetiev a
$|H| - (|V| - 1) = |H| - |V| + 1$ tetív.

Veta. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf a nech T je jeho kostra.
Nech h je ľubovoľná tetiva grafu G vzhľadom na kostru T.
Potom graf $T + h$ obsahuje práve jednu kružnicu.

Definícia. Nech $H_t = \{h_1, h_2, \ldots, h_{|H|-|V|+1}\}$ je množina tetív súvislého grafu $G = (V, H)$ vzhľadom na kostru T.
Nech C_i je kružnica, ktorá vznikne v kostre T pridaním tetivy h_i.
Systém kružníc $\{C_1, C_2, \ldots, C_{|H|-|V|+1}\}$ sa nazýva **fundamentálny systém kružníc** grafu G vzhľadom na kostru T.

Poznámka. Rôzne kostry grafu G dávajú rôzne fundamentálne systémy kružníc.

Počet rôznych kostier grafu.

$G = (V, H)$ je súvislý graf, $|V| = n$

$\mathbf{B}$ je matica susednosti grafu G

$\mathbf{D}$ je diagonálna matica

$\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i$ je matica získaná z $\mathbf{D} - \mathbf{B}$ vynechaním i-tého riadku a i-tého stĺpca pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Potom počet rôznych kostier grafu G je číslo

$$p(T) = \det(\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i) \ .$$

III. PLANÁRNE GRAFY

1. Eulerova veta a jej dôsledky

Definícia. Graf $G = (V, H)$ sa nazýva **planárny**, ak jeho diagram v rovine je možné zostrojiť bez pretínania sa hrán.
Ak graf nie je planárny, nazýva sa **neplanárny**.

Definícia. Diagram planárneho grafu bez pretínajúcich sa hrán nazývame **rovinný diagram**.
Časti roviny rovinného diagramu planárneho grafu ohraničené vrcholmi a hranami nazývame **oblasti** rovinného diagramu grafu.

Pozor! O oblastiach nemôžeme hovoriť, ak sa hrany diagramu grafu pretínajú.

Veta. (Eulerova veta o planárnosti.)
Nech $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf a nech r je počet oblastí jeho rovinného diagramu. Potom

$$|H| - |V| + 2 = r \ .$$

Dôkaz. Matematická indukcia vzhľadom na počet oblastí r.

1. Základný krok:
Nech $r = 1$.
Potom graf $G = (V, H)$ je stromom a teda platí $|H| = |V| - 1$.
Po jednoduchej úprave dostávame

$$|H| - |V| + 2 = 1 \ ,$$

čo znamená, že veta platí pre každý súvislý planárny graf s jednou oblasťou.

Indukčný predpoklad (I.P.):

Nech pre nejaké $r \geq 1$ tvrdenie vety platí pre každý súvislý planárny graf s r oblasťami.

2. Indukčný krok:
Uvažujme ľubovoľný súvislý planárny graf $G = (V, H)$ s $r = n + 1$ oblasťami. Keďže $r \geq 2$, graf G obsahuje aspoň jednu kružnicu C. Nech h je hrana kružnice C.
Potom graf $G_1 = (V_1, H_1) = G - h$ získaný z G vynechaním hrany h obsahuje r oblastí, je súvislý a planárny. Takže podľa I.P. preň veta platí. To znamená, že

$$|H_1| - |V_1| + 2 = r\,.$$

Keďže $|H_1| = |H| - 1$ a $|V_1| = |V|$, dostávame

$$(|H| - 1) - |V| + 2 = r\,,$$

čo po malej úprave dáva

$$|H| - |V| + 2 = r + 1\,.$$

To znamená, že veta platí aj pre náš graf $G = (V, H)$ s $r+1$ oblasťami.

Dôsledok 1. Ak každá oblasť rovinného diagramu planárneho grafu $G = (V, H)$ je ohraničená kružnicou dĺžky k, tak

$$|H| = k \cdot \frac{|V| - 2}{k - 2} \ .$$

Dôsledok 2. Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf, tak

$$|H| \leq 3 \cdot |V| - 6 \ .$$

Dôsledok 3. Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf bez trojuholníkov, tak

$$|H| \leq 2 \cdot |V| - 4 \ .$$

Dôsledok 4. Každý planárny graf obsahuje vrchol, ktorého stupeň nie je väčší ako 5.

Dôsledok 5. Grafy K_5 a $K_{3,3}$ sú neplanárne.

rozpoľovanie hrany

Definícia. Grafy G_1 a G_2 sú **homeomorfné**, ak sú izomorfné, alebo konečným počtom rozpoľovania ich hrán sa dajú upraviť na izomorfné grafy.

Veta. (Kuratowski, 1930)
Graf G je planárny práve vtedy, ak neobsahuje podgraf homeomorfný s K_5 ani s $K_{3,3}$.

IV. FARBENIE GRAFOV

1. Farbenie vrcholov grafu

– farbenie politickej mapy – farbenie vrcholov grafu

Regulárne farbenie vrcholov – priradenie farieb vrcholom grafu tak, že susedné vrcholy majú rôzne farby.

Definícia. Graf $G = (V, H)$ sa nazýva **k–chromatický**, ak na jeho regulárne zafarbenie vrcholov stačí **k** farieb.
Chromatické číslo $\chi(G)$ grafu $G = (V, H)$ je také najmenšie k, že graf G je k–chromatický.

Veta. Pre každý strom $T = (V, H)$, $|H| \geq 1$ platí $\chi(T) = 2$.

$$\chi(C_{2k}) = 2\,, \qquad \chi(C_{2k+1}) = 3\,, \quad k \geq 1$$

Veta. Nutná a postačujúca podmienka na to, aby graf mal chromatické číslo dva.
Graf $G = (V, H)$ má chromatické číslo dva práve vtedy, ak neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

T.j.: $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ neobsahuje C_{2k+1}.

Dôkaz.

Definícia. Graf $G = (V, H)$ sa nazýva **bipartitný**, ak $\chi(G) = 2$.

kompletný bipartitný graf – $K_{m,n}$

Veta. Nech $\Delta(G)$ je maximálny stupeň vrcholov v grafe $G = (V, H)$.
Potom

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \ .$$

Back
Close

2. Iné farbenia

Regulárne farbenie hrán – priradenie farieb hranám grafu tak, že susedné hrany majú rôzne farby.

Definícia. Chromatický index $\overline{\chi}(G)$ grafu $G = (V, H)$ je také najmenšie k, pre ktoré existuje regulárne zafarbenie hrán grafu k farbami.

Veta. Nech $\Delta(G)$ je maximálny stupeň vrcholov v grafe $G = (V, H)$. Potom

$$\Delta(G) \leq \overline{\chi}(G) \leq \Delta(G) + 1 \ .$$

Regulárne farbenie vrcholov a hrán – priradenie farieb vrcholom a hranám grafu tak, že:
– susedné vrcholy majú rôzne farby,
– susedné hrany hrany majú rôzne farby,
– ak vrchol a hrana incidujú, tak majú rôzne farby.

Definícia. Totálny chromatický index $\chi_t(G)$ grafu $G=(V,H)$ je také najmenšie k, pre ktoré existuje regulárne zafarbenie vrcholov a hrán grafu k farbami.

Veta. Nech $\Delta(G)$ je maximálny stupeň vrcholov v grafe $G=(V,H)$. Potom

$$\Delta(G)+1 \leq \chi_t(G)\ .$$

Hypotéza.

$$\Delta(G)+1 \leq \chi_t(G) \leq \Delta(G)+2\ .$$

Back

Close

Veta. Veta o štyroch farbách.
Nech $G = (V, H)$ je planárny graf. Potom $\chi(G) \leq 4$.

V. EULEROVSKÉ A HAMILTONOVSKÉ GRAFY

1. Eulerovské grafy

Definícia. **Hranové pokrytie grafu** je taký rozklad jeho hranovej množiny H na triedy $H_1, H_2, \ldots, H_k$, v ktorom sú hrany každej triedy H_i usporiadané do ťahu.
Minimálne hranové pokrytie grafu G je pokrytie s najmenším počtom tried.

Veta. Graf $G = (V, H)$ bez izolovaných vrcholov má všetky vrcholy párneho stupňa práve vtedy, ak ho je možné vyjadriť ako zjednotenie sústavy navzájom hranovo disjunktných kružníc.

Definícia. Graf $G = (V, H)$ sa nazýva **eulerovský**, ak existuje jeho pokrytie jedným uzavretým ťahom.

Back
Close

Veta. Graf $G = (V, H)$ je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a všetky jeho vrcholy majú párny stupeň.

Veta. Graf $G = (V, H)$ je možné pokryť jedným otvoreným ťahom práve vtedy, ak je súvislý a práve dva jeho vrcholy majú nepárny stupeň.

Poznámka. Graf $G = (V, H)$ má pokrytie p $(p > 1)$ otvorenými ťahmi práve vtedy, ak má $2p$ vrcholov s nepárnym stupňom.

2. Mosty a artikulácie

Definícia. Nech $G = (V, H)$ je graf. Hrana $h \in H$ sa nazýva **most** grafu G, ak v grafe neexistuje kružnica, ktorá obsahuje hranu h.

Veta. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf a nech hrana h je mostom v G. Potom graf $G_1 = G - h$ je nesúvislým podgrafom grafu G.

Veta. Každá kostra súvislého grafu $G = (V, H)$ obsahuje všetky mosty grafu G.

Veta. Ak graf $G = (V, H)$ má všetky vrcholy párneho stupňa, tak neobsahuje most.

Definícia. Nech $G=(V,H)$ je graf. Vrchol $v \in V$ je **artikuláciou** grafu G, ak graf $G-v$ má viac komponentov ako graf G.

Veta. Vrchol $v \in V$ je artikuláciou grafu $G=(V,H)$ práve vtedy, ak v grafe G existujú dve rôzne hrany $\{v,u\},\{v,w\}$, ktoré nie sú hranami tej istej kružnice grafu G.

3. Hamiltonovské grafy

Definícia. **Hamiltonovská kružnica** grafu $G = (V, H)$ je kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu G.
(Súvislý kvadratický faktor grafu.)

Definícia. Graf sa nazýva **Hamiltonovský**, ak obsahuje aspoň jednu hamiltonovskú kružnicu.

Veta. Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, $n \geq 3$.
Ak stupeň každého vrchola je aspoň $\frac{n}{2}$, tak graf G je hamiltonovský.

Veta. Ore, 1960
Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, $n \geq 3$.
Ak pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy $u, v \in V$ platí

$$\delta_G(u) + \delta_G(v) \geq n\,,$$

tak graf G je hamiltonovský.

Veta. L. Pósa, 1963

Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, $n \geq 3$.

Nech pre každé $j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$, počet vrcholov stupňa nie väčšieho ako j v grafe G je menší ako číslo j . Potom graf G je hamiltonovský.

VI. DIGRAFY

1. Definícia digrafu

Definícia. Nech $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je ľubovoľná konečná množina a nech $H \subset V \times V \setminus \{(v_1, v_1), (v_2, v_2), \dots, (v_n, v_n)\}$.
Potom usporiadaná dvojica (V, H) sa nazýva **digraf**.

Poznámka. Používa sa aj pojem **orientovaný graf**.

Zápis. $\overrightarrow{G} = (V, H)$

V sa nazýva **vrcholová množina** , jej prvky sa nazývajú **vrcholy**.

H sa nazýva **hranová množina** , jej prvky sa nazývajú **orientované hrany**.

Zachovávajú sa pojmy: susednosť vrcholov, resp. hrán, incidencia, poddigraf, zjednotenie, prienik, . . .

Back
Close

Definícia. Nech $\overrightarrow{G}_1 = (V_1, H_1)$ a $\overrightarrow{G}_2 = (V_2, H_2)$.
Hovoríme, že digrafy $\overrightarrow{G}_1$ a $\overrightarrow{G}_2$ sú **izomorfné**, ak existuje bijektívne zobrazenie $\varphi : V_1 \to V_2$ také, že

$$\forall u, v \in V_1 \quad \text{platí} \quad (u, v) \in H_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in H_2 .$$

Zobrazenie φ sa nazýva **izomorfizmus** digrafov $\overrightarrow{G}_1$ a $\overrightarrow{G}_2$.

Zápis. $\overrightarrow{G}_1 \cong \overrightarrow{G}_2$

2. Súvislosť a silná súvislosť digrafu

Zrušením orientácie na každej hrane v digrafe $\overrightarrow{G}$ sa získa graf G. (niekedy multigraf)

Sled v $\overrightarrow{G}$ – postupnosť vrcholov a hrán, ktorá je sledom aj v G
(Dĺžka sledu je rovná počtu jeho hrán.)

Spojenie v $\overrightarrow{G}$ – sled v $\overrightarrow{G}$, v ktorom sa rešpektuje orientácia hrán

Orientovaný ťah v $\overrightarrow{G}$ – spojenie v $\overrightarrow{G}$, ktoré je ťahom aj v G

Dráha v $\overrightarrow{G}$ – spojenie v $\overrightarrow{G}$, ktoré je cestou v G

Cyklus v $\overrightarrow{G}$ – uzavretá dráha v $\overrightarrow{G}$, je to kružnica v G

Definícia. Hovoríme, že digraf $\overrightarrow{G}$ je **súvislý**, ak pre každé dva jeho vrcholy u a v existuje v ňom sled z u do v.

T.j., súvislý je aj jemu odpovedajúci graf G.

Definícia. Hovoríme, že digraf $\overrightarrow{G}$ je **silne súvislý**, ak pre každé dva jeho vrcholy u a v existuje v ňom spojenie z u do v aj z v do u.

Definícia. **Silný komponent** digrafu $\overrightarrow{G}$ je každý jeho maximálny silne súvislý poddigraf.

Definícia. **Vzdialenosť** z vrchola u do vrchola v v digrafe $\overrightarrow{G}$ je číslo $\overrightarrow{d}(u,v)$, ktoré je rovné dĺžke minimálnej dráhy z u do v.
(Je rovné počtu hrán na najkratšej dráhe z u do v.)

$\overrightarrow{d}(u,v) = \infty$, ak neexistuje spojenie z u do v.

Veta. Pre digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

a) digraf $\overrightarrow{G}$ je silne súvislý,

b) digraf $\overrightarrow{G}$ je súvislý a každá jeho hrana sa vyskytuje v nejakom cykle,

c) pre ľubovoľný rozklad $\{V_1, V_2\}$ vrcholovej množiny V digrafu $\overrightarrow{G}$ existuje hrana z V_1 do V_2 aj hrana z V_2 do V_1.

Definícia. Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf. Označme $\delta^+(v)$, resp. $\delta^-(v)$, počet hrán, ktorých vrchol v je začiatočným vrcholom, resp. koncovým vrcholom. Číslo $\delta^+(v)$, resp. $\delta^-(v)$, nazývame **vonkajší stupeň**, resp. **vnútorný stupeň** vrchola v.

Platí.

$$\delta^+(v) + \delta^-(v) = \delta(v)$$

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |H|$$

$\delta^+(v) = \delta^-(v)$ – rovnovážny vrchol

$\delta^+(v) > 0\,,\ \ \delta^-(v) = 0$ – prameň

$\delta^+(v) = 0\,,\ \ \delta^-(v) > 0$ – ústie

$\delta^+(v) > \delta^-(v) > 0$ – zosilňovač

$0 < \delta^+(v) < \delta^-(v)$ – zoslabovač

Ak $\forall v \in V$ je $\delta^+(v) + \delta^-(v) = 1$, tak $\overrightarrow{G}$ je zjednotením hrán.

Ak $\forall v \in V$ je $\delta^+(v) = \delta^-(v) = 1$, tak $\overrightarrow{G}$ je zjednotením cyklov.

Veta. Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je súvislý digraf.
Ak pre každý vrchol $v \in V$ je $\delta^+(v) = 1$, tak digraf $\overrightarrow{G}$ obsahuje jediný cyklus.

Poznámka. Tvrdenie vety platí aj za predpokladu, že $\forall v \in V$ je $\delta^-(v) = 1$.

Veta. Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je súvislý digraf.
Ak $\forall v \in V$ je $\delta^+(v) > 1$, alebo $\forall v \in V$ je $\delta^+(v) < 1$, tak digraf $\overrightarrow{G}$ obsahuje aspoň jeden cyklus.

3. Acyklické digrafy

Definícia. Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$, ktorý neobsahuje cyklus, sa nazýva **acyklický**.

Veta. Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, $H \neq \emptyset$, je acyklický digraf. Potom existuje aspoň jeden vrchol $v \in V$, pre ktorý platí

$$\delta^+(v) > 0 \qquad \text{a} \qquad \delta^-(v) = 0\,.$$

T.j., $\overrightarrow{G}$ obsahuje aspoň jeden prameň.

Poznámka. Rovnaké tvrdenie platí aj o ústí.

Veta. (Nutná a postačujúca podmienka pre acyklickosť digrafu.)
Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je acyklický práve vtedy, ak jeho vrcholy je možné očíslovať číslami $1, 2, 3, \ldots, |V|$ tak, že každá hrana (i, j) spĺňa podmienku $i < j$.

T.j., každá hrana začína vo vrchole s menším číslom a končí vo vrchole s väčším číslom.

4. Turnaje

Definícia. **Turnaj** $\mathcal{T}_n$ je digraf získaný orientáciou každej hrany kompletného grafu K_n.

Definícia. Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ sa nazýva **tranzitívny**, ak pre každú dvojicu hrán (u, v), (v, w) existuje hrana (v, w).

Poznámka. Pre turnaj $\mathcal{T}_n$ sú pojmy tranzitívnosť a acyklickosť rovnocenné.

Veta. Každý tranzitívny turnaj s n vrcholmi je izomorfný s turnajom $\mathcal{T}_n$, kde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ a každá hrana (i, j) spĺňa podmienku $i < j$.

5. Matice digrafov

Definícia. Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, pričom $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$.

Maticou incidencie digrafu $\overrightarrow{G}$ nazývame maticu $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ typu $n \times m$, ak pre jej prvky platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak vrchol } v_i \text{ je začiatočným vrcholom hrany } h_j, \\ -1, & \text{ak vrchol } v_i \text{ je koncovým vrcholom hrany } h_j, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Definícia. Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, pričom $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Maticou susednosti digrafu $\overrightarrow{G}$ nazývame maticu $\mathbf{B} = (b_{i,j})$ typu $n \times n$, ak pre jej prvky platí

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } (v_i, v_j) \in H, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Veta. Nech $\mathbf{B}$ je matica susednosti digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.
Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ prvok b_{ik}^n matice $\mathbf{B}^n$ udáva počet spojení dĺžky n z vrchola v_i do vrchola v_j .

Veta. Nech $\mathbf{A}$ je matica incidencie, $\mathbf{B}$ je matica susednosti a $\mathbf{D}$ je diagonálna matica $(d_{ii} = \delta^+(v_i) + \delta^-(v_i))$ digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$. Potom

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{D} - \mathbf{B} - \mathbf{B}^T .$$

VII. ORIENTOVANÉ STROMY

1. Orientované stromy a orientované kostry

Definícia. Nech $T = (V, H)$ je strom. Ak každej jeho hrane priradíme jednu z dvoch možných orientácií, získame **orientovaný strom** $\overrightarrow{T} = (V, H)$.

Definícia. Nech $\overrightarrow{T}_v = (V, H)$, $|V| \geq 2$, je orientovaný strom, v ktorom existuje dráha z vrchola v do všetkých ostatných vrcholov. Potom $\overrightarrow{T}_v$ sa nazýva **koreňový strom** a vrchol v je **koreňom stromu**.

Definícia. Nech $\overrightarrow{K}$ je taký poddigraf digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$, ktorý sa po zrušení orientácie v $\overrightarrow{G}$ stane kostrou grafu (multigrafu) G. Potom $\overrightarrow{K}$ je **orientovaná kostra** digrafu $\overrightarrow{G}$.

Definícia. **Koreňová kostra** digrafu $\overrightarrow{G}$ je taká jeho orientovaná kostra, ktorá je koreňovým stromom.

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf a nech $v \in V$ je jeho vrchol.
Nech $V_i = \{u \in V\,;\ \overrightarrow{d}(v, u) = i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, s$, sú disjunktné podmnožiny vrcholovej množiny digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.

Veta. V súvislom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H)$ existuje kostra $\overrightarrow{T}_v$ s koreňom vo vrchole v práve vtedy, ak platí

$$V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s\,.$$

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, $|V| = n$, je digraf a nech B je jeho matica susednosti. Nech $\mathbf{K} = (k_{ij})$ je matica $n \times n$, pre prvky ktorej platí:

$$k_{ij} = \begin{cases} \delta^-(v_i)\,, & \text{ak } i = j \\ -b_{ij} \quad, & \text{ak } i \neq j\,. \end{cases}$$

Nech $\mathbf{K}_s$ je matica získaná z matice $\mathbf{K}$ vynechaním s–tého riadku a s–tého stĺpca.

Potom počet rôznych koreňových kostier s koreňom vo vrchole v_s je

$$p(\overrightarrow{T}_{v_s}) = \det(\mathbf{K}_s)\ .$$

Definícia. **Binárny strom** je koreňový strom $\overrightarrow{T}_v$, v ktorom pre každý vrchol $u \in V$ je $\delta^+(u) = 0$, alebo $\delta^+(u) = 2$.
Hĺbka binárneho stromu je číslo

$$\mathrm{hl}(\overrightarrow{T}_v) = \max_{u \in V}\{\overrightarrow{d}(v, u)\}.$$

Kompletný binárny strom hĺbky k je taký binárny strom $\overrightarrow{T}_v$, v ktorom pre každý vrchol u s vonkajším stupňom rovným nule je $\overrightarrow{d}(v, u) = k$.

Nech $V_e = \{u \in V\,;\, \delta^+(u) = 0\}$. Vrcholom množiny V_e hovoríme **vonkajšie vrcholy**, resp. **listy**.

Nech $V_i = \{u \in V\,;\, \delta^+(u) = 2\}$. Vrcholom množiny V_i hovoríme **vnútorné vrcholy**.

Definícia. Nech $\overrightarrow{T}_v = (V, H)$ je binárny strom.
Vonkajšia dĺžka binárneho stromu $\overrightarrow{T}_v = (V, H)$ je číslo

$$E(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{u \in V_e} \overrightarrow{d}(v, u).$$

Vnútorná dĺžka binárneho stromu $\overrightarrow{T}_v = (V, H)$ je číslo

$$I(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{u \in V_i} \overrightarrow{d}(v, u).$$

Veta. Pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, existuje binárny strom s n listami.

Veta. Binárny strom s n listami obsahuje $n - 1$ vnútorných vrcholov a $2(n - 1)$ hrán.

Veta. Pre každý binárny strom s n listami platí

$$E = I + 2(n-1)\,.$$

$\dfrac{E}{n}$ je priemerná vzdialenosť listu od koreňa.

$\dfrac{I}{n-1} = \dfrac{E}{n-1} - 2$ je priemerná vzdialenosť vnútorného vrchola od koreňa.

Veta. Binárny strom $\overrightarrow{T}_v$ s n listami má minimálnu vnútornú (vonkajšiu) dĺžku práve vtedy, ak pre každý list u platí

$$k-1 \le \overrightarrow{d}(v,u) \le k\ , \quad \text{kde} \quad k = \mathrm{hl}(\overrightarrow{T}_v)\ .$$

Definícia. Nech každému listu u_i binárneho stromu $\overrightarrow{T}_v$ s n listami je priradené nezáporné číslo w_i .
Vonkajšia w–dĺžka binárneho stromu $\overrightarrow{T}_v$ je číslo

$$E_w(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \overrightarrow{d}(v, u_i) \, .$$

Algiritmus zostrojenia binárneho stromu s minimálnou vonkajšou w–dĺžkou pri daných hodnotách w_i na listoch.

VIII. GRAFOVÉ ALGORITMY

1. Algoritmy a ich zložitosť

Pod pojmom **algoritmus** rozumieme postupnosť krokov, ktorá nás dovedie k žiadanému riešeniu daného problému.
Žiada sa, aby algoritmus mal tieto vlastnosti:

– **determinovanosť** – má byť zadaný konečným počtom jednoznačných pravidiel

– **efektívnosť** – má zaručiť vyriešenie úlohy po konečnom počte krokov

– **hromadnosť** – má byť použiteľný na celú triedu prípadov úlohy svojho typu

Pravidlá v algoritme musia byť rozhodnuteľné v okamihu výpočtu.

Výpočtová náročnosť algoritmov

Ukázalo sa rozumné posudzovať algoritmy podľa počtu elementárnych krokov, ktoré sú potrebné na vyriešenie daného problému. Tieto elementárne kroky môžu byť:

– sčítanie
– odčítanie
– násobenie
– delenie
– porovnávanie s vetvením
– atď

Jednotlivé elementárne kroky považujeme za rovnako časovo náročné.

Budeme hovoriť, že algoritmus vyrieši danú konkrétnu úlohu U v čase T, ak na jej vyriešenie potrebujeme T elementárnych krokov.

Pre ohodnotenie výpočtovej zložitosti algoritmu nás však viac ako jeden konkrétny prípad zaujíma závislosť počtu elementárnych krokov $T(n)$ algoritmu na veľkosti, resp. rozsahu počítanej úlohy „veľkosti“ n.

Veľkosť vstupu – množstvo vstupných dát príslušnej úlohy.

Definícia. Nech $g(n)$ a $h(n)$ sú dve kladné funkcie definované na množine $\mathbb{N}$. Budeme písať $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$ a hovoriť, že funkcia $h(n)$ asymptoticky dominuje funkcii $g(n)$, ak existuje konštanta K a prirodzené číslo n_0, také, že

$$g(n) \leq K \cdot h(n)\,, \qquad \forall n \geq n_0\,.$$

Definícia. Hovoríme, že algoritmus $\mathcal{A}$ má zložitosť $\mathcal{O}(f(n))$, ak pre horný odhad $T(n)$ počtu krokov algoritmu $\mathcal{A}$ pre úlohu s veľkosťou vstupu n platí

$$T(n) = \mathcal{O}(f(n)).$$

Skrátene budeme hovoriť o $\mathcal{O}(f(n))$ algoritme.

Špeciálne, ak $f(n) \leq n^k$ pre nejaké konštantné k, hovoríme, že $\mathcal{A}$ je **polynomiálny algoritmus**.

Tieto algoritmy sú považované za **rýchle algoritmy**.

Definícia. Hovoríme, že problém **má zložitosť nanajvýš** $\mathcal{O}(f(n))$, ak preň existuje $\mathcal{O}(f(n))$ algoritmus.

funkcia počtu operácií	20	40	100	1000
n	20 μs	40 μs	0.1 ms	1 ms
$n \cdot \log n$	86 μs	0.2 ms	0.7 ms	10 ms
n^2	0.4 ms s	1.6 ms	10 ms	1 s
n^3	8 ms	64 ms	1 s	17 min
2^n	1 s	11,7 dní	$> 10^5$ r	
$n!$	77 000 r			

Back
Close

2. Minimálna kostra grafu

Definícia. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf.
Zobrazenie $f : H \to \mathbb{R}^+$ je **hranové ohodnotenie** grafu G.

Pre každú hranu $\{v_i, v_j\} \in H$ je číslo $w_{ij} = f(\{v_i, v_j\}) \in \mathbb{R}^+$ **ohodnotením hrany** $\{v_i, v_j\}$.

Každý súvislý graf obsahuje aspoň jednu kostru.

Definícia. Nech $T = (V, H')$ je kostra hranovo ohodnoteného grafu $G = (V, H)$.
Hodnota kostry T je číslo rovné súčtu ohodnotení na jej hranách.
Minimálna kostra grafu G je tá z jeho kostier, ktorá má minimálnu hodnotu.

Minimálnych kostier môže byť v grafe viac.

I. Algoritmus určenia minimálnej kostry (Kruskal)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$.
Výstup: Minimálna kostra $T = (V, H')$.

1. Zostroj diskrétny faktor $T = (V, \emptyset)$.
2. Zoraď hrany grafu G do neklesajúcej postupnosti vzhľadom na ich ohodnotenia.
3. Do T pridaj z neklesajúcej postupnosti prvú hranu, ktorá v T nevytvorí kružnicu, a z postupnosti hrán ju odober.
4. Ak $|H'| = |V| - 1$ STOP ($T = (V, H')$ je minimálna kostra), inak skok na krok 3.

Veta. Pre graf s n vrcholmi a m hranami pracuje Kruskalov algoritmus v čase $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$.

II. Algoritmus určenia minimálnej kostry (Prim)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
Výstup: Minimálna kostra $T = (V(T), H'(T))$.

1. Polož $T := (V(T), H'(T))$, $V(T) := \{v_1\}$, $H'(T) := \emptyset$.
2. Ak $|V(T)| = n$, STOP (T je minimálna kostra).
3. Pre $v_i \in V(T)$ a $v_j \in V(G) \setminus V(T)$ zvoľ hranu $\{v_i, v_j\}$ s minimálnym ohodnotením.
   Polož $V(T) := V(T) \cup \{v_j\}$, $H'(T) := H'(T) \cup \{v_i, v_j\}$.
   (Ak je viac hrán $\{v_i, v_j\}$ s rovnakým minimálnym ohodnotením, najprv majú prednosť hrany s najmenším i a potom s najmenším j).
   Skok na krok 2.

Veta. Primov algoritmus dáva na výstupe minimálnu kostru grafu. Pre graf s n vrcholmi pracuje v čase $\mathcal{O}(n^3)$.

3. Minimálna cesta v hranovo ohodnotenom grafe

V hranovo neohodnotenom grafe $G = (V, H)$:
– dĺžka cesty z vrchola u do vrchola v – počet hrán na ceste z vrchola u do vrchola v
– vzdialenosť z vrchola u do vrchola v – číslo $d(u, v)$ rovné dĺžke najkratšej cesty z vrchola u do vrchola v

---

V hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H)$:

$f : H \to \mathbb{R}^+$

Pre každú hranu $\{v_i, v_j\} \in H$ je $w_{ij} = f(\{v_i, v_j\}) \in \mathbb{R}^+$.

Definícia. Nech S je cesta z vrchola v_i do vrchola v_j v hranovo ohodnotenom grafe $G = (V, H)$.
Súčet ohodnotení hrán cesty S nazveme **dĺžkou cesty** S.

Pre dva vrcholy v_i a v_j potom minimálnu z dĺžok ciest medzi v_i a v_j nazveme **dĺžkou minimálnej cesty** a označíme symbolom $d_w(v_i, v_j)$.

Pri riešení úloh súvisiacich so vzdialenosťou sa najčastejšie stretávame s nasledujúcimi variantmi.

1. Pre dané dva vrcholy u a v ohodnoteného grafu určiť vzdialenosť medzi u a v.
2. Pre daný vrchol u určiť vzdialenosti z u do všetkých ostatných vrcholov ohodnoteného grafu.
3. Určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu.

Algoritmus určenia minimálnej cesty (Dijkstra)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$, začiatočný vrchol a.
Výstup: $L(x) = d_w(a, x)$ pre každý vrchol $x \in V$.

1. Polož $L(a) := 0$; $L(x) := \infty$ pre každé $x \in V \setminus \{a\}$; $A := V$.
2. Ak $A = \emptyset$, STOP.
3. Polož $v := \{y \in A;\ L(y) \le L(z),\ z \in A\}$ (ak je viac možností, zvoľ ľubovoľnú).
   Polož $A := A \setminus \{v\}$.
4. Pre všetky $x \in A$ také, že $\{v, x\} \in H$ polož
   $L(x) := \min\{L(x),\ L(v) + f(\{v, x\})\}$.
   Skok na krok 2.

Veta. Nech G je súvislý hranovo ohodnotený graf s n vrcholmi. Ak $f(n)$ je počet preverovaných hrán v najhoršom prípade, tak $f(n) = \mathcal{O}(n^2)$. (T.j., algoritmus pracuje v čase $\mathcal{O}(n^2)$.)

4. Dĺžka minimálneho spojenia v digrafe

V hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H)$:

$f \ : \ H \to \mathbb{R}^+$

Pre každú hranu $(v_i, v_j) \in H$ je $w_{ij} = f((v_i, v_j)) \in \mathbb{R}^+$.

Definícia. Nech $\overrightarrow{S}$ je spojenie z vrchola v_i do vrchola v_j v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H)$.
Súčet ohodnotení hrán spojenia $\overrightarrow{S}$ nazveme **dĺžkou spojenia** $\overrightarrow{S}$.

Pre dva vrcholy v_i a v_j potom minimálnu z dĺžok spojení z v_i do v_j nazveme **dĺžkou minimálneho spojenia** a označíme symbolom $\overrightarrow{d}_w(v_i, v_j)$.

Poznámka. Ak neexistuje spojenie z v_i do v_j , tak $\overrightarrow{d}_w(v_i, v_j) = \infty$.

Definícia. Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, je hranovo ohodnotený digraf, pričom $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Cenovou maticou digrafu $\overrightarrow{G}$ nazývame maticu $\mathbf{W} = (w_{i,j})$ typu $n \times n$, ak pre jej prvky platí

$$w_{ij} = \begin{cases} f((v_i, v_j)), & \text{ak} \quad (v_i, v_j) \in H \\ \infty, & \text{ak} \quad (v_i, v_j) \notin H \\ 0, & \text{ak} \quad i = j \end{cases}$$

Definícia. Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, $|V| = n$, je hranovo ohodnotený digraf. Štvorcovú maticu $\mathbf{D} = (d_{ij})$ rádu n nazývame **dištančnou maticou** (maticou vzdialenosti), ak pre jej prvky platí

$$d_{ij} = \begin{cases} \overrightarrow{d}_w(v_i, v_j), & \text{ak existuje spojenie z } v_i \text{ do } v_j, \\ \infty, & \text{ak neexistuje spojenie z } v_i \text{ do } v_j, \\ 0, & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

Back
Close

Algoritmus určenia minimálneho spojenia (Floyd)

Vstup: Hranovo ohodnotený digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Výstup: Dištančná matica $\mathbf{D} = (d_{ij})$.

1. Polož $\mathbf{D}^{(0)} := \mathbf{W}$, kde $\mathbf{W}$ je cenová matica digrafu $\overrightarrow{G}$, teda $d_{ij}^{(0)} = c_{ij}$ pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
   Polož $k := 1$.
2. Vytvor maticu $\mathbf{D}^{(k)} = d_{ij}^{(k)}$ tak, že
   $d_{ij}^{(k)} := \min\{d_{ij}^{(k-1)},\ d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$.
3. Ak $k = n$, STOP ($\mathbf{D}^{(k)} = \mathbf{D}$), inak polož $k := k + 1$.
   Skok na krok 2.

Veta. Nech G je súvislý hranovo ohodnotený graf s n vrcholmi. Potom Floydov algoritmus pracuje v čase $\mathcal{O}(n^3)$.