

# Matematika III – pomocný 3

# DIFERENCIÁLNE ROVNICE

## a) Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu bez pravej strany

Rovnice typu:  $f(x).y' + f(y) = 0$

prvého rádu = najvyššia prvá derivácia -  $y'$

bez pravej strany = na pravej strane rovnice **nula**

**pomocné vzorce:**

$$\ln e^y = y \quad e^{\ln x} = x$$

$$e^{\ln x + c} = e^{\ln x} \cdot e^c = x \cdot e^c = x \cdot c$$

$$e^{2x+c} = e^{2x} \cdot e^c = e^{2x} \cdot c$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

**Úprava rovnice:**

1. nahradíme  $y' = \frac{dy}{dx}$

2. separujeme premenné (oddelíme  $y$ ,  $dy$  na jednu stranu a  $x$ ,  $dx$  na druhú, tak aby  $dy$  a  $dx$  boli v čitateli)

3. upravené strany integrujeme (úprava pomocou per partes, substitúcia alebo obyčajný integrál)

4. vo výsledku výrazy s rovnakou premenou necháme na tej istej strane

## b) Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu s pravou stranou

Rovnice typu:  $y' + p(x)y = q(x)$

**pomocné vzorce:**

$$-\ln x = \ln x^{-1}$$

$$2 \ln x = \ln x^2, \quad \frac{1}{3} \ln x = \ln x^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\ln x^2} = x^2$$

$$e^{\ln x^{-1}} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

prvého rádu = najvyššia prvá derivácia -  $y'$

s pravou stranou = na pravej strane rovnice je **funkcia  $q(x)$**

**Úprava rovnice: 2. spôsob:**

1. upravíme rovnicu tak, aby člen  $y'$  bol osamotený (násobíme alebo delíme celú rovnicu)

**Napr.:** rovnicu  $xy' + 4y = \frac{e^x}{x^3}$ , predelíme  $x$ , potom  $y' + \frac{4y}{x} = \frac{e^x}{x^4}$

2. upravenú rovnicu vynásobíme integračným faktorom  $IF = e^{\int p(x)dx}$  (najprv učíme  $p(x)$ , potom vypočítame  $\int p(x)dx$  a nakoniec  $IF$ )

$$\underline{y' \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} y = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}}$$

**Napr.:**

$$y' + \frac{4y}{x} = \frac{e^x}{x^4}, \quad \text{kde } p(x) = \frac{4}{x}$$
$$\int \frac{4}{x} dx = \ln x^4, \quad IF = e^{\ln x^4} = x^4$$

3. ľavá strana rovnice predstavuje súčin derivácie funkcie  $y$  a  $IF$  (pri jej úprave súčinu na ľavej strane rovnice opíšeme  $y$  bez derivácie a  $IF$ )

$$[y \cdot e^{\int p(x)dx}]' = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

**Napr.:**

$$y'x^4 + 4yx^3 = e^x$$

úprava ľavej strany: prvý člen je  $y$  a druhý je  $x^4$

$$(yx^4)' = e^x$$

### 3. integrujeme obe strany rovnice

$$y \cdot e^{\int p(x) dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c,$$

kde využijeme, že  $\int (y \cdot e^{\int p(x) dx})' dx = y \cdot e^{\int p(x) dx}$

**Napr.:**

$$\int (y \cdot x^4)' = \int e^x dx$$

Úprava ľavej strany:  $y \cdot x^4 = \int e^x dx$

### 4. upravíme ľavú stranu rovnice (vynásobíme alebo delíme vhodným výrazom, aby na ľavej strane zostalo len $y$ )

$$y = e^{-\int p(x) dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \cdot e^{-\int p(x) dx}, c \in \mathbb{R}.$$

**Napr.:**

$$y \cdot x^4 = \int e^x dx = e^x + c$$

Úprava rovnice (predelíme celú rovnicu  $x^4$ ):

$$y = \frac{e^x}{x^4} + \frac{c}{x^4}$$

## c) Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu bez pravej strany

Rovnice typu:  $y'' + ay' + by = 0$

druhého rádu = najvyššia druhá derivácia -  $y''$   
bez pravej strany = na pravej strane rovnice **nula**

### Úprava rovnice:

1. vytvoríme charakteristickú rovnicu  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$   
(nahradíme v rovnici  $y'' \rightarrow \lambda^2, y' \rightarrow \lambda, y$  - vynecháme)

2. riešime charakteristickú rovnicu ako kvadratickú rovnicu a určíme diskriminant

a) ak  $D > 0, \lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 \neq \lambda_2$

potom dve riešenia charakteristickej rovnice  $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$

všeobecné riešenie dif. rovnice je  $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

**Napr.:**  $D = 9, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$

Všeobecné riešenie dif. rovnice je  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

b) ak  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

potom riešenia charakteristickej rovnice

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}$$

všeobecné riešenie dif. rovnice je

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

**Napr.:**  $D = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Všeobecné riešenie dif. rovnice je  $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

c) ak  $\mathbf{D} < \mathbf{0}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$

potom riešenia charakteristickej rovnice

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

všeobecné riešenie dif. rovnice je

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

**Napr.:**  $D = -4 = 4i^2, \lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i$

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$$

porovnaním výsledkov zo všeobecným zápisom,  $\alpha = -1, \beta = 3$

všeobecné riešenie dif. rovnice je  $y = c_1 e^{-x} \cos 3x + c_2 e^{-x} \sin 3x$

## c) Diferenciálne rovnice druhého rádu s pravou stranou

Rovnice typu:  $y'' + ay' + by = f(x)$

druhého rádu = najvyššia druhá derivácia -  $y''$

bez pravej strany = na pravej strane rovnice **funkcia  $f(x)$**

### Úprava rovnice:

1. riešime rovnicu bez pravej strany (môžu tri prípady riešenia)

2. riešime rovnicu s pravou stranou

riešenie dif. rovnice = všeob. riešenie DR bez pravej strany + partikulárne riešenie  $y^*$

3. určíme partikulárne riešenie  $y^*$  podľa pravej strany DR

a) ak na pravej strane funkcia typu

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$$

kde  $P_m(x)$  – polynóm  $m$  – tého stupňa

$\alpha \in R$ ,  $\alpha$  je  $k$  – násobný koreň charakteristickej rovnice DR bez pravej strany

partikulárne riešenie  $y^* = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m)e^{\alpha x} x^k$

Napr.: 1)  $f(x) = (5x^1 + 2)e^{2x}$ ,  $\alpha = 2$  je 1- násobný koreň charakteristickej rovnice

porovnaním s  $y^* = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m)e^{\alpha x} x^k$

$$\alpha = 2$$

$$m = 1$$

$$k = 1$$

potom  $y^* = (a + bx)e^{2x} x^1$

2)  $f(x) = (-8x)e^{-x}$ ,  $\alpha$  nie je k - násobný koreň charakteristickej rovnice,  $\alpha = -1$

$$m = 1$$

$$k = 0$$

potom  $y^* = (a + bx)e^{-x}$

3)  $f(x) = x^2 + 3x - 5$ ,  $\alpha$  nie je k - násobný koreň charakteristickej rovnice,  $\alpha = 0$

$$m = 2$$

$$k = 0$$

potom  $y^* = ax^2 + bx + c$

**Poznámka:** pri učovani  $k$  musí byť  $\alpha$  koreňom charakteristickej rovnice DR bez pravej strany



b) ak na pravej strane funkcia typu

$f(x) = \left( P_{n_1}^{(1)}(x) \cos \beta x + P_{n_2}^{(2)}(x) \sin \beta x \right) e^{\alpha x}$ , kde  $P_{n_1}^{(1)}(x)$ ,  $P_{n_2}^{(2)}(x)$  sú polynómy stupňa  $n_1, n_2$ ,  $\alpha, \beta \in R$ ,  $\beta \neq 0$  a  $\alpha + \beta i$  je  $k$ -násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany,

partikulárne riešenie  $y^* = Q_m^{(1)}(x)(\cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin \beta x) e^{\alpha x} x^k$

kde  $Q_m^{(1)}(x)$ ,  $Q_m^{(2)}(x)$  - sú polynómy stupňa  $m = \max \{n_1, n_2\}$

Napr.: 1)  $f(x) = 8 \cos x$ ,  $\alpha + \beta i$  nie je koreň k-násobný koreň charakteristickej rovnice,

porovnaním s  $y^* = Q_m^{(1)}(x)(\cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin \beta x) e^{\alpha x} x^k$

$$\alpha = 0, \beta = 1$$

$$m = 0 \quad (8x^0 = 8)$$

$$k = 0$$

potom  $y^* = a \cos x + b \sin x$

2)  $f(x) = 4 \cos 2x + \sin 2x$ ,  $\alpha + \beta i$  nie je koreň charak. rovnice

$$\alpha = 0, \beta = 2$$

$$m = 0$$

$$k = 0$$

potom  $y^* = a \cos 2x + b \sin 2x$

3)  $f(x) = \sin(3x)e^{-x}$ ,  $\alpha + \beta i$  nie je koreň charak. rovnice

$$\alpha = -1, \beta = 3$$

$$m = 0$$

$$k = 0$$

potom  $y^* = (a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-x}$

**Poznámka:** pri učovani  $k$  musí byť  $\alpha + \beta i$  koreňom charak. rovnice DR bez pravej strany

4. vypočítame prvú a druhú deriváciu partikulárneho riešenie  $y^*$  a dosadíme do DR s pravou stranou  $(y^*)'' + a(y^*)' + by^* = f(x)$
5. po úprave rovnice porovnáme koeficienty ( $a, b, c, \dots$ ) pri rovnakých členoch na pravej a ľavej strane DR a vypočítame ich hodnotu

**Napr.:** úpravou DR vyšlo

$$-4a \cos 2x - 4b \sin 2x - 6a \sin 2x + 6b \cos 2x = 4 \cos 2x + \sin 2x$$

porovnaním koeficientov pri  $\cos 2x$  a  $\sin 2x$

$$\cos 2x: \quad -4a + 6b = 4$$

$$\sin 2x: \quad -4b - 6a = 1$$

6. dosadíme vypočítané hodnoty koeficientov do partikulárneho riešenie  $y^*$  a zapíšeme výsledok DR s pravou stranou v tvare

riešenie dif. rovnice = všeob. riešenie DR bez pravej strany + partikulárne riešenie  $y^*$