

HOZDNOŠŤ MATICE

$h(A)$... počet nenulových riadkov matice A
 upravenej na hornú a / lichobežníkovú
 tvar

PR. 1: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $h(A) = 3$ $h(B) = 2$
 REDUKČIE PRVKY RIADKU (prvé nenulové prvky)

$A \sim B$... jednu sa dá upraviť na 2. pomocou ekvivalentných úprav:

- R... riadok
 S... slupka
- 1) ZMENA PORADIA R/S
 - 2) VYĽAŠOVANIE R/S NEKON. KONŠTANTOU
 - 3) PŘIPOČÍTANIE LIN. KOMB. iných R/S k niektorému R/S

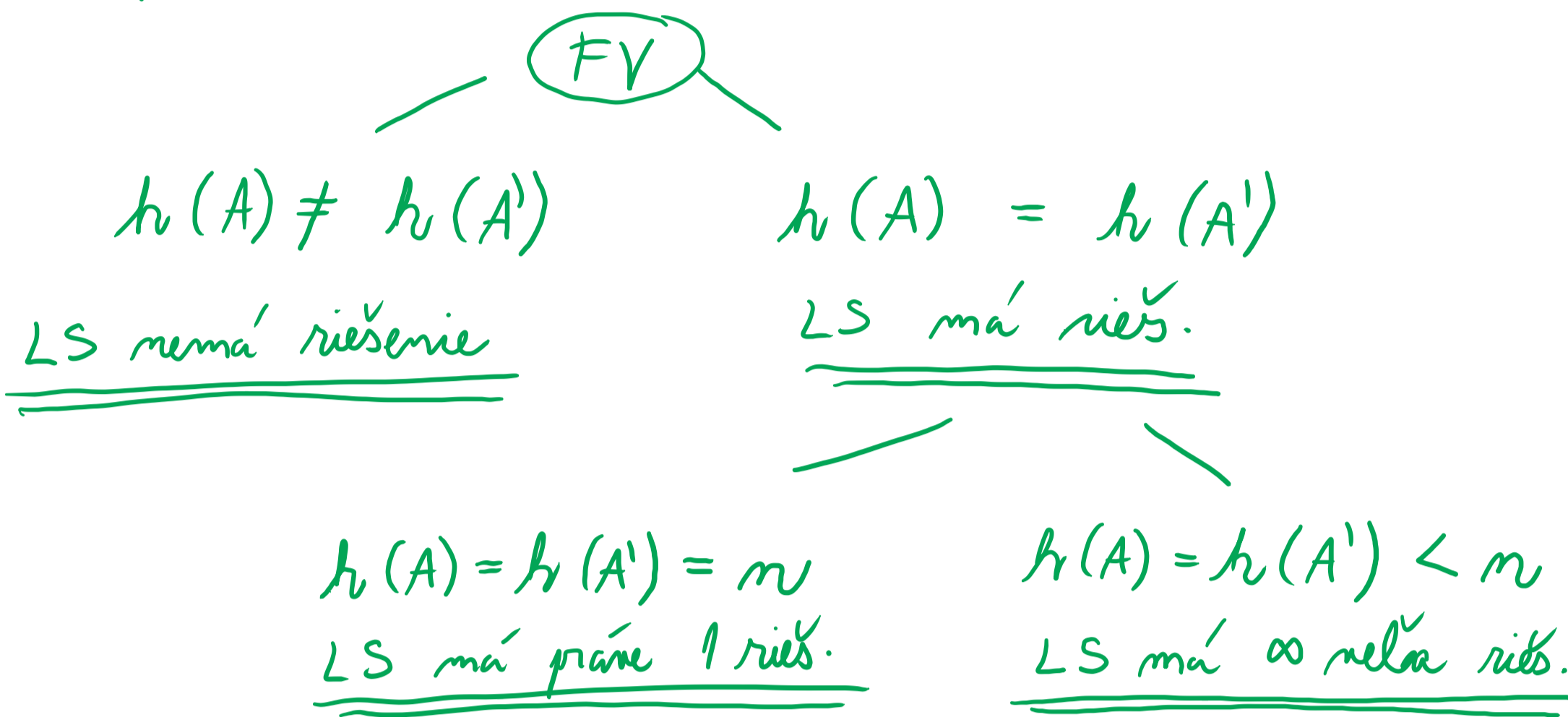
PR. 2:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 4 \\ -1 & 9 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot 1/4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ -1 & 9 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1, R_3 - 3R_1, R_4 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 10 & -1.5 & 1 \\ 0 & -4 & 3.5 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot 1/10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & -0.15 & 0.1 \\ 0 & -4 & 3.5 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 4R_2, R_4 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & -0.15 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2.8 & 5.4 \\ 0 & 0 & 2.45 & 1.7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot 1/2.8, R_4 \cdot 1/2.45} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & -0.15 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9286 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7143 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & -0.15 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9286 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2143 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.65 & 0.9 \\ 0 & 1 & -0.15 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9286 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2143 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 0.65R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.2571 \\ 0 & 1 & -0.15 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9286 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2143 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 0.2571R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.15 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9286 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2143 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 0.15R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.2857 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9286 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2143 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 1.2857R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.9286 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2143 \end{pmatrix}$$

GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA (GEN)

FROBENIOVA VETA (FV): $h(A), h(A'), m$

A - matrica LS (koeficienty)
 A' - rozšírená matrica LS (koef. + pravé strany)
 m - počet rovníc



PR. 3: str 13/1a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1, R_3 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 8R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 3, h(A') = 3, m = 3 \Rightarrow$ LS má práve 1 rieš.

$-x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$
 $-x_2 + x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 1 + 2 = 3$
 $x_1 + x_2 - x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - 3 + 2 = 1$

$(x_1, x_2, x_3)^T = (1, 3, 2)^T$

PR. 4: str 13/1c

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 2, h(A') = 3, m = 3 \Rightarrow$ LS nemá rieš.

$0 \neq 1 \Rightarrow \mathcal{R} = \emptyset$

PR. 5:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 2, h(A') = 2, m = 3 \Rightarrow$ LS má ∞ rieš. (neľahé rieš.)

$0 = 0 \Rightarrow \mathcal{R} = \mathbb{R}$

$x_3 = d \in \mathbb{R}$

$x_2 + 2x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 - 2d$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 + 1 + 2d - d = 3 + d$

$(x_1, x_2, x_3)^T = (3 + d, -1 - 2d, d)^T, d \in \mathbb{R}$

FINITA: VÝROB "1"

PR. 6:

$$A' = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 9 & 21 & 3 \\ 11 & -5 & 10 & 24 & 1 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & 0 \\ 8 & 6 & -1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot 1/12} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 11 & -5 & 10 & 24 & 1 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & 0 \\ 8 & 6 & -1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 11R_1, R_3 - 7R_1, R_4 - 8R_1} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 0 & -4.25 & 7.25 & 19.25 & 0.75 \\ 0 & -1.25 & 1.75 & 12.25 & -1.75 \\ 0 & 12.5 & -6.5 & -14.25 & 7.75 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1/4.25), R_3 \cdot (-1/1.25)} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & -1.7 & 4.5 & -0.176 \\ 0 & 1 & 1.4 & 9.8 & -1.4 \\ 0 & 12.5 & -6.5 & -14.25 & 7.75 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & -1.7 & 4.5 & -0.176 \\ 0 & 0 & 3.1 & 5.3 & -1.224 \\ 0 & 12.5 & -6.5 & -14.25 & 7.75 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - 12.5R_2} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & -1.7 & 4.5 & -0.176 \\ 0 & 0 & 3.1 & 5.3 & -1.224 \\ 0 & 0 & 14.4 & -40.2 & 10.02 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - 4.6R_3} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & -1.7 & 4.5 & -0.176 \\ 0 & 0 & 3.1 & 5.3 & -1.224 \\ 0 & 0 & 0 & -20.2 & 15.02 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \cdot (-1/20.2)} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & -1.7 & 4.5 & -0.176 \\ 0 & 0 & 3.1 & 5.3 & -1.224 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.7475 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot 1/3.1, R_2 + 1.7R_3} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & 13.45 & -1.392 \\ 0 & 0 & 1 & 1.71 & -0.395 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.7475 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 13.45R_4} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.75 & 1.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.975 \\ 0 & 0 & 1 & 1.71 & -0.395 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.7475 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 0.5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.75 & 1.75 & -0.2375 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.975 \\ 0 & 0 & 1 & 1.71 & -0.395 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.7475 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 0.75R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.05625 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.975 \\ 0 & 0 & 1 & 1.71 & -0.395 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.7475 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 1.71R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.05625 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.975 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2.58625 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.7475 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 0.05625R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.975 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2.58625 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.7475 \end{pmatrix}$$

$x_4 = d \in \mathbb{R}$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

$2x_2 + 7x_3 + 19x_4 = -7 \Rightarrow x_2 = \frac{-7 - 7s - 19d}{2}$

$x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 + \frac{-7 - 7s - 19d}{2} + s + 3d = \frac{-3 - 5s - 13d}{2}$

$x^T = \left(\frac{-3 - 5s - 13d}{2}, \frac{-7 - 7s - 19d}{2}, s, d \right), s, d \in \mathbb{R}$