DETERMINANTY

POJEM:

Nech A je □ matica n-tého stupňa

$A_{n\times n} \longrightarrow$ číslo … $\det(A) = |A|$ $\begin{cases} \neq 0 \ldots \text{REGULÁRNA} \\ = 0 \ldots \text{SINGULÁRNA} \end{cases}$ MATICA A:

VYUŽITIE:

CRAMEROVO PRAVIDLO
výpočet INVERZNEJ MATICE a pod.

VÝPOČET:

- determinant 2. stupňa:

PR. 1:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = \boxed{-2}$$

- det. 3. stupňa … SARUSOVO PRAVIDLO

PR. 2:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{matrix} = 1\cdot 2\cdot(-2) + 1\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot(-2) = \cancel{-4} + 9 - 6 - 6 + 9 \cancel{+4} = \boxed{6}$$

- DET. 4 stupňa a vyššie …. ROZVOJ PODĽA PRVKOV ĽUB. i-teho R / j-teho S

$$|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \dots + a_{in}\cdot A_{in}$$

A_{ij} … ALGEBRICKÝ DOPLNOK prvku a_{ij}

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot D_{ij}}$$

D_{ij} … SUBDETERMINANT (minor) prvku a_{ij} matice A – vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca

PR. 3:

ROZVOJ PODĽA 1. STĹPCA

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-1) & /\cdot(-4) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (-1)\cdot\left[1\cdot 2\cdot(-2) + 2\cdot(-3)\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot(-3)\cdot 1 - (-2)\cdot 1\cdot 2\right] + 0 + 0 =$$

$$= (-1)\cdot[\cancel{-4} - 6 + 9 - 6 + 9 \cancel{+4}] = (-1)\cdot 6 = \boxed{-6}$$

PR. 4:

ROZVOJ PODĽA 3. R

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{+} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + (-4)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (-4)\cdot\left[12 + 0 + 0 - 0 - 3 - 4\right] = -4\cdot 5 = \boxed{-20}$$

VPLYV EKV. ÚPRAV NA HODNOTU DET.:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = \boxed{1}$

b) VÝMENA RIADKOV / STĹPCOV:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$A \sim B$ … $|A| \overset{?}{=} |B|$

$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = \boxed{-1}$ … $|B| = -|A|$

→ MENÍ ZNAMIENKO DETERMINANTOV

c) VYNÁSOBENIE R/S NENUL. KONŠT.: $k \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} /\cdot 5 \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$ $|A| \overset{?}{=} |C|$

$|C| = 5\cdot 1 - 0\cdot 0 = 5 = 5\cdot|A|$ …. $|C| = k\cdot|A|$

⇒ MENÍ HODNOTU DET. O TÚTO KONŠT.

d) PRIPOČÍTANIE NÁSOBKU R/S K INÉMU R/S:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\cdot 5}{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = D$

$|D| = 1\cdot 1 - 0\cdot 5 = 1 = \boxed{A}$ … $|D| = |A|$

→ HODNOTA DET. SA NEMENÍ!

ĎALŠIE VLASTN. DET.:

- $\boxed{|A^T| = |A|}$ … pozri PR. 2 a PR. 3
- AK JE V MATICI JEDEN R/S LIN. KOMB. JEJ OSTATNÝCH R/S, t.j. MATICA OBSAHUJE NULOVÝ R/S ⇒ $\boxed{|A| = 0}$

LSR: $\underbrace{A}_{\text{matica koef.}}\cdot\underbrace{\vec{x}}_{\text{stĺpcový vektor neznámych premenných}} = \vec{b}$ — stĺpc. vektor pravých strán

GEM: $\underbrace{A'}_{\text{rozšírená matica súst.}} = (A \mid b)$ … $h(A')$, $h(A)$, n ⇒ FV LSR nemá rieš. / má 1 rieš. / má ∞-veľa rieš.

CRAMEROVO PRAVIDLO (CP):

$D = |A| \neq 0$ … ak je A reg. ⇒

$$\boxed{x_i = \frac{D_i}{D \neq 0}}, \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$$

(CP vie zrátať rieš. LSR len ak súst. má práve 1 rieš.)

D_i … determinanty, kt. vzniknú z matice A nahradením i-teho stĺpca vektorom pravých strán $\vec{b}$

PR. 1:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 3\cdot 1 = -1 \neq 0$ ⇒ A je reg.
✓ CP
✓ $(x_1, x_2)^T$

$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$ ⇒ $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$ ⇒ $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$

$$\boxed{x^T = (x_1, x_2)^T = (3, 1)^T}$$

PR. 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 \qquad - 2x_3 &= -4 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 3\cdot 8\cdot 3 +$$

$$+ 1\cdot 2\cdot(-2) - 0 - (-2)\cdot 8\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot(-3) = -72 - 4 + 16 + 18 = \boxed{-42} \neq 0 \Rightarrow A \text{ je reg. } \checkmark CP$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0 + (-4)\cdot 8\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot(-2) - 0 - 0 - 3\cdot 2\cdot(-4) = 0 - 96 - 12 + 24 = -84$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-84}{-42} = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 27 + 0 - (-12) - (-6) - 0 = -21$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{-42} = \frac{1}{2}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 8 - 0 + 32 + 18 = 42$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{42}{42} = 1$$

$$\boxed{x^T = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(2, \tfrac{1}{2}, -1\right)^T}$$

JEDNODUCHŠÍ VÝPOČET:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot 3 & /\cdot(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 6\cdot 7\cdot 1 - 0 = \boxed{-42} \neq 0$$