Matematika 1 – 10.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 7 – 75 / 26: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$\begin{array}{lllll} x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = 6 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 2 \\ 5x_1 & +2x_2 & -x_3 & -3x_4 & = -2 \\ 6x_1 & +8x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 6 & 8 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3R_1 \\ -5R_1 \\ -6R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & -14 & -13 & -14 & -16 \\ 0 & -28 & -26 & -28 & -32 \\ 0 & -28 & -26 & -28 & -32 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2R_2 \\ -2R_2 \end{array}$$

h(A) = 2

h(A´) = 2

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & -14 & -13 & -14 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

h(A) = 2 < 4 (počet neznámych) ⇒ sústava má ∞ veľa riešení

$$x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 6$$
$$-14x_2 - 13x_3 - 14x_4 = -16$$

$x_2 = t$ $\qquad$ $x_3 = u$

$$-14x_2 - 13x_3 - 14x_4 = -16$$

$$-14t - 13u - 14x_4 = -16$$

$$x_4 = \frac{-16}{-14} + \frac{14t}{-14} + \frac{13u}{-14} = \frac{8}{7} - t - \frac{13u}{14}$$

$$x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 6$$

$$x_1 + 6t + 5u + 5\left(\frac{8}{7} - t - \frac{13u}{14}\right) = 6$$

$$x_1 + 6t + 5u + \frac{40}{7} - 5t - \frac{65u}{14} = 6$$

$$x_1 = \frac{2}{7} - t - \frac{5u}{14}$$

$$\left(\frac{2}{7} - t - \frac{5u}{14}, t, u, \frac{8}{7} - t - \frac{13u}{14}\right)^T, u, t \in R$$

Pr. 8: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3$$

$$(2-u, 1-t, u, t)^T$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2R_1 \\ -2R_1 \\ +R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

h(A) = 2

h(A´) = 2

h(A) = 2 < 4 (počet neznámych) ⇒ sústava má ∞ veľa riešení

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$-x_2 - x_4 = -1$$
$$x_4 = t \qquad x_2 = 1 - t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 + 1 - t + x_3 + t = 3$$
$$x_3 = u$$
$$x_1 + 1 - t + u + t = 3$$
$$x_1 = 2 - u$$

$$(2-u, 1-t, u, t)^T \; u, t \in R$$

Determinant matice

determinant matice A – číslo, ktoré priradíme štvorcovej matici A typu n, označenie: **det A, resp. |A|**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Subdeterminant (minor) $\mathbf{D_{ij}}$ vzhľadom na prvok $\mathbf{a_{ij}}$ matice A je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním i -tého riadku a j -tého stĺpca matice A

subdeterminanty

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

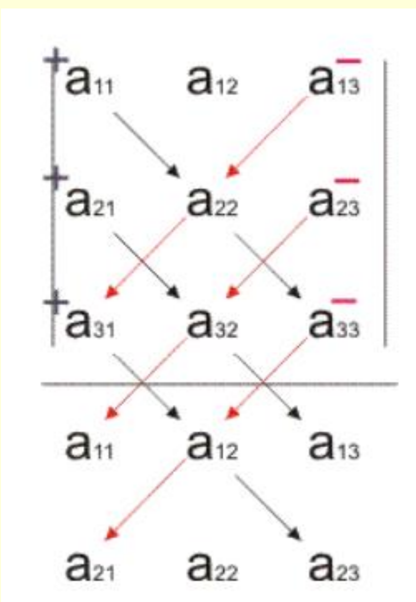
Výpočet determinantu matice

determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}\,a_{22}}_{} - \underbrace{a_{12}\,a_{21}}_{}$$

súčin prvkov na hlavnej diagonále mínus súčin prvkov na vedľajšej diagonále

determinant 3. stupňa - **Sarrusovo pravidlo -** pod tretí riadok v matici podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}\right)$$

determinant n - tého stupňa, $n \geq 4$ – počíta sa pomocou rozvoja determinantu podľa riadka alebo stĺpca

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$ **rozvoj podľa riadku**

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$ **rozvoj podľa stĺpca**

$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je **algebrický doplnok**

D_{ij} je **subdeterminant prvku a$_{ij}$** matice A
(vznikne zakrytím i -tého riadku a j - tého stĺpca matice A)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$a_{32} = 4$

$* \quad a_{32} \cdot A_{32} = a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot D_{32}$

Postup pri výpočte determinantu *n* - tého stupňa, $n \geq 4$:

1. Štvorcovú maticu *A* nahradíme determinantom $|A|$.

2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok (stĺpec) **obsahujúci čo najviac núl**.

3. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k **rozvoju determinantu**.

Úpravy v determinante:

- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vynásobením niektorého riadku matice A nenulovým číslom r, tak
  $|B| = r|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A pripočítaním reálneho násobku niektorého riadku matice A k inému jej riadku, tak $|B| = |A|$ → **ekvivalentná úprava**

Pr. 1 – 63 / 6: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. maticu nahradíme determinantom

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

2. pri úprave determinantu použijeme Sarrusovo pravidlo - pod tretí riadok v determinante podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach (najprv zľava doprava, potom sprava doľava)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \ (1.7.-5) + (2.1.4) + (3.2.3) - (3.7.4) - (1.1.3) - (2.2.-5)$$

$$|A| = (-35) + (8) + (18) - (84) - (3) - (-20) = -9 + (-67) = -76$$

Pr. 2 – 63 / 5: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = -8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-15) + (16) + (3) - (18) - (4) - (-10)$$

$$= 4 + (-12) = -8$$

Pr. 3 – 65 / 21: Vypočítajte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1. Štvorcovú maticu *A* nahradíme determinantom $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok (stĺpec) **obsahujúci čo najviac núl**.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}D_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}D_{21}$$

3. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k **rozvoju determinantu**.

$$= 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.[(-4) + (36) + (0) - (0 + 12 + (-3)] +$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$-1[(-2) + 36 + 0) - (0 + 6 + 0]$$

$$= 2.(32 - 9) - 1.(34 - 6) = 46 - 28 = 18$$

Pr. 4 – 64 / 19: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a_{33}A_{33} = a_{33}(-1)^{3+3}D_{33} = 1(-1)^{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$-S_4$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$1.\,[(2) + (18) + (6) - (9 + 3 + 8)] = 6$$

Pr. 5 – 64 / 17: Vypočítajte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = 1(-1)^{1+2}D_{12} = -1\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{matrix}$$

$$= -1.[(1.-1.-4) + (-1.-1.4) + (-2.5.-3) - ((-2.-1.4) + (1.-1.3) + (-1.5.-4)] =$$

$$= -[(4) + (4) + (30) - ((8) + (3) + (20)] = -(38 - 31) = -7$$

Pr. 6 : Vypočítajte determinant matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} = -3(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-S_2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$= -3.\left[(2 + 2 + (-2)) - (8 + 1 + (-1))\right] =$$

$$= -3[2 - (8)] = 18$$

Dú: Str. 64 – 65 / 12-16, 18, 20, 22

6. Malá písomka

Skupina A : 1. Riešte sústavu lineárnych rovníc pomocou GEM.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 5x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

2. Vypočítajte deriváciu bez ďalších úprav

$$f(x) = \frac{3^x}{\operatorname{tg} x} + \ln(2x) - \sqrt{x}.(x^4 + e^x)$$

7. Malá písomka

Skupina C: (online): Riešte sústavu lineárnych rovníc pomocou GEM.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Určte A.B, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

6. Malá písomka

Skupina B : 1. Riešte sústavu lineárnych rovníc pomocou GEM.

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7$$
$$-2x_1 - 6x_2 + 6x_3 = -14$$

2. Vypočítajte deriváciu bez ďalších úprav

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^4} + \operatorname{arccotg}(5x) - x^{-2}. \log_3 x$$

6. Malá písomka - riešenie

Skupina A : 1. Riešte sústavu lineárnych rovníc pomocou GEM.

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - 5x_3 &= -3\\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4\\
2x_2 + x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

0,1 0,1 0,1

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & -3\\ 2 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) -2R_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & -3\\ 0 & 5 & 11 & 10\\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(-2)\\ .5 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & -3\\ 0 & -10 & -22 & -20\\ 0 & 10 & 5 & 20 \end{array}\right) +R_2
$$

0,1

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & -3\\ 0 & -10 & -22 & -20\\ 0 & 0 & -17 & 0 \end{array}\right)
$$

h(A) = 3 = h(A´) = 3 SLR má riešenie 0,1

h(A) = 3 = počet neznámych) ⇒ sústava má jedno riešenie

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - 5x_3 &= -3\\
-10x_2 - 22x_3 &= 20\\
-17x_3 &= 0\\
x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

0,1 0,1

0,1

$$
\begin{aligned}
-10x_2 - 22.0 &= 20\\
-10x_2 &= -20\\
x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

0,1

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - 5x_3 &= -3\\
x_1 - (2) - 0 &= -3\\
x_1 &= -1
\end{aligned}
$$

$$(-1,2,0)^T$$ 0,1

Skupina A :

2. Vypočítajte deriváciu bez ďalších úprav

$$f(x) = \frac{3^x}{\operatorname{tg} x} + \ln(2x) - \sqrt{x}.(x^4 + e^x)$$

0,1 0,1 0,2 0,1 0,2

$$f'(x) = \frac{3^x \ln 3 \,.\, \operatorname{tg} x - 3^x \dfrac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2} + \frac{1.}{2x}.\,2 - \left[\frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}.\,(x^4 + e^x) + \sqrt{x}.\,(4x^3 + e^x)\right]$$

0,2 0,1

6. Malá písomka - riešenie

Skupina B : 1. Riešte sústavu lineárnych rovníc pomocou GEM.

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7$$
$$-2x_1 - 6x_2 + 6x_3 = -14$$

0,1 0,1 0,1 0,1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 7 \\ -2 & -6 & 6 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2R_1 \\ +2R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

h(A) = 2 = h(A´) = 2 SLR má riešenie 0,1

h(A) = 2 < 3 = počet neznámych) ⇒ sústava má ∞ veľa riešení

$$x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7$$
$$-7x_2 + 7x_3 = -14$$

0,1

$x_3 = t$ 0,1

0,1

$$-7x_2 + 7t = -14$$
$$-7x_2 = -14 - 7t$$
$$x_2 = 2 + t$$

0,1

$$x_1 + 3(2 + t) - 3t = 7$$
$$x_1 + 6 + 3t - 3t = 7$$
$$x_1 = 1$$

$(1,2 + t, t)^T$ 0,1

Skupina B :

2. Vypočítajte deriváciu bez ďalších úprav

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^4} + \operatorname{arccotg}(5x) - x^{-2}.\log_3 x$$

0,1 0,1 0,2 0,1 0,2

$$f'(x) = \frac{\cos x\,.\,x^4 - \sin x\ \ (4x^3)}{(x^4)^2} + \frac{-1.}{1+(5x)^2}.\,5 - \left[-2x^{-3}.\,(\log_3 x) + x^{-2}.\,(\frac{1}{x \ln 3})\right]$$

0,2 0,1

7. Malá písomka

Skupina C: (online): Riešte sústavu lineárnych rovníc pomocou GEM.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1\\
-x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 4\\
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 2\\
x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

0,1 0,1 0,1 0,1 0,1

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 3 & 1 & 1\\
-1 & 1 & -3 & 1 & 4\\
2 & 4 & 6 & 2 & 2\\
1 & -1 & 3 & -1 & 0
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & 1 & -3 & 1 & 4\\
2 & 1 & 3 & 1 & 1\\
2 & 4 & 6 & 2 & 2\\
1 & -1 & 3 & -1 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ +2R_1\\ +2R_1\\ +R_1 \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & 1 & -3 & 1 & 4\\
0 & 3 & -3 & 3 & 9\\
0 & 6 & 0 & 4 & 10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2\\ \\ \end{array}
$$

0,1

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & 1 & -3 & 1 & 4\\
0 & 3 & -3 & 3 & 9\\
0 & 0 & 6 & -2 & -8\\
0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{array}\right)
$$

0,1

h(A) = 3 h(A´) = 4 0,2

h(A) $\neq$ h(A´) $\Rightarrow$ sústava nemá riešenie 0,1