# Matematika 1 – 11.cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

**Pr. 7** – 75 / 26: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$\begin{array}{lllll}
x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = 6 \\
3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 2 \\
5x_1 & +2x_2 & -x_3 & -3x_4 & = -2 \\
6x_1 & +8x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = 4
\end{array}$$

**Pr. 8**: Pomocou GEM riešte sústavu linear. rovníc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3 \qquad (2-u, 1-t, u, t)^T$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2R_1 \\ -2R_1 \\ +R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

h(A) = 2

h(A´) = 2

h(A) = h(A´) = 2 < 4 (počet neznámych) ⇒ sústava má ∞ veľa riešení

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$-x_2 \qquad - x_4 = -1$$
$$x_4 = t \qquad x_2 = 1 - t$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 + 1 - t + x_3 + t = 3$$
$$x_3 = u$$
$$x_1 + 1 - t + u + t = 3$$
$$x_1 = 2 - u$$

$$(2-u, 1-t, u, t)^T u, t \in R$$

# Determinant matice

determinant matice A – číslo, ktoré priradíme štvorcovej matici A typu n, označenie: **det A, resp. |A|**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Subdeterminant (minor) $\mathbf{D_{ij}}$ vzhľadom na prvok $\mathbf{a_{ij}}$ matice A je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním i -tého riadku a j -tého stĺpca matice A

subdeterminanty

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

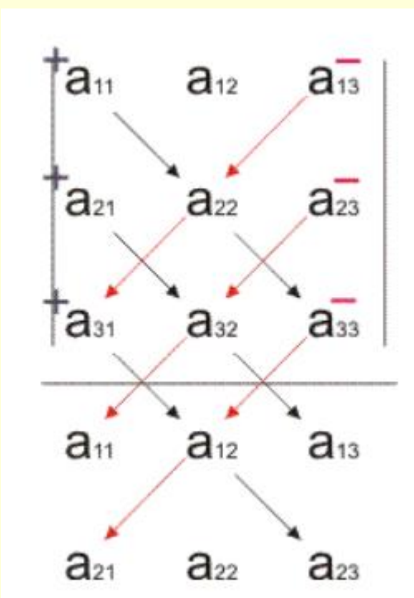
Výpočet determinantu matice

determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

súčin prvkov na hlavnej diagonále mínus súčin prvkov na vedľajšej diagonále

determinant 3. stupňa - **Sarrusovo pravidlo -** pod tretí riadok v matici podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach




$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}\right)$$

determinant $n$ - tého stupňa, $n \geq 4$ – počíta sa pomocou rozvoja determinantu podľa riadka alebo * stĺpca

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$ **rozvoj podľa riadku**

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$ **rozvoj podľa stĺpca**

$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je **algebrický doplnok**

$D_{ij}$ je **subdeterminant prvku $a_{ij}$** matice A
(vznikne zakrytím i -tého riadku a j - tého stĺpca matice A )

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$a_{32} = 4$

$* \quad a_{32} \cdot A_{32} = a_{32} \cdot \underbrace{(-1)^{3+2} \cdot D_{32}}$

## Postup pri výpočte determinantu *n* - tého stupňa, $n \geq 4$:

1. Štvorcovú maticu *A* nahradíme determinantom $|A|$.

2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili <u>ľubovoľný riadok (stĺpec)</u> **obsahujúci čo najviac núl**.

3. Vytvorený <u>riadok, resp. stĺpec</u> použijeme k **rozvoju determinantu**.

## Úpravy v determinante:

- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A vynásobením niektorého riadku matice A nenulovým číslom r, tak
  $|B| = r|A|$.
- Ak B je matica, ktorá vznikne z matice A pripočítaním reálneho násobku niektorého riadku matice A k inému jej riadku, tak $|B| = |A|$ $\rightarrow$ **ekvivalentná úprava**

**Pr. 1** – 63 / 5:  Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = -8$$

**Pr. 2** – 63 / 6: Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. maticu nahradíme determinantom

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

2. pri úprave determinantu použijeme Sarrusovo pravidlo - pod tretí riadok v determinante podpíšeme prvý a druhý riadok a násobíme po uhlopriečkach (najprv zľava doprava, potom sprava doľava)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (1.7.-5) + (2.1.4) + (3.2.3) - (3.7.4) - (1.1.3) - (2.2.-5)$$

$$|A| = (-35) + (8) + (18) - (84) - (3) - (-20) = -9 + (-67) = -76$$

**Pr. 3** – 65 / 21: Vypočítajte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1. Štvorcovú maticu *A* nahradíme determinantom $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Determinant upravíme pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok (stĺpec) **obsahujúci čo najviac núl**.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}D_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}D_{21}$$

3. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k **rozvoju determinantu**.

$$= 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.[(-4) + (36) + (0) - (0 + 12 + (-3)] +$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$-1[(-2) + 36 + 0) - (0 + 6 + 0]$$

$$= 2.(32 - 9) - 1.(34 - 6) = 46 - 28 = 18$$

**Pr. 4** – 64 / 19:  Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Pr. 5** – 64 / 17: Vypočítajte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = 1(-1)^{1+2}D_{12} = -1\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{array}$$

$$= -1.\left[[(1.-1.-4) + (-1.-1.4) + (-2.5.-3)] - [(-2.-1.4) + (1.-1.3) + (-1.5.-4)]\right] =$$

$$= -[(4) + (4) + (30) - ((8) + (3) + (20))] = -(38 - 31) = -7$$

**Pr. 6 :** Vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} = -3(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$-S_1$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= -3.[(2 + 2 + (-2)) - (8 + 1 + (-1))] =$$

$$= -3[2 - (8)] = 18$$

Dú: Str. 64 – 65 / 12-16, 18, 20, 22